This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

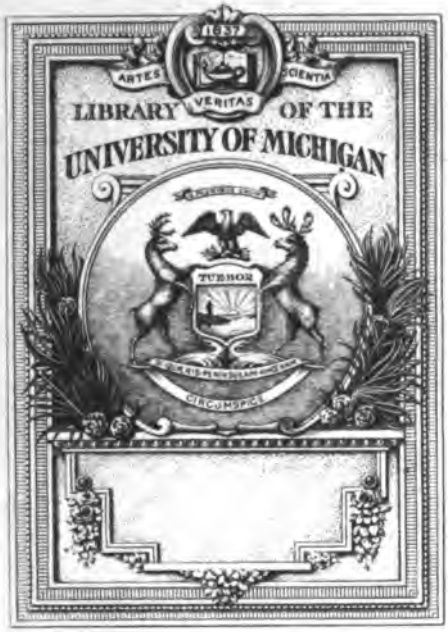
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
5-
.K44

Digitized by Google

Digitized by Google

1885-6

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

griffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und litterarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung

von

Georg Simon Klügel

ofessor der Mathematik und Physik auf der Friedrichs-
iversität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten
Wissenschaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und
Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomi-
schen Gesellschaft zu Leipzig.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Erste Abtheilung

Die reine Mathematik.

Dritter Theil

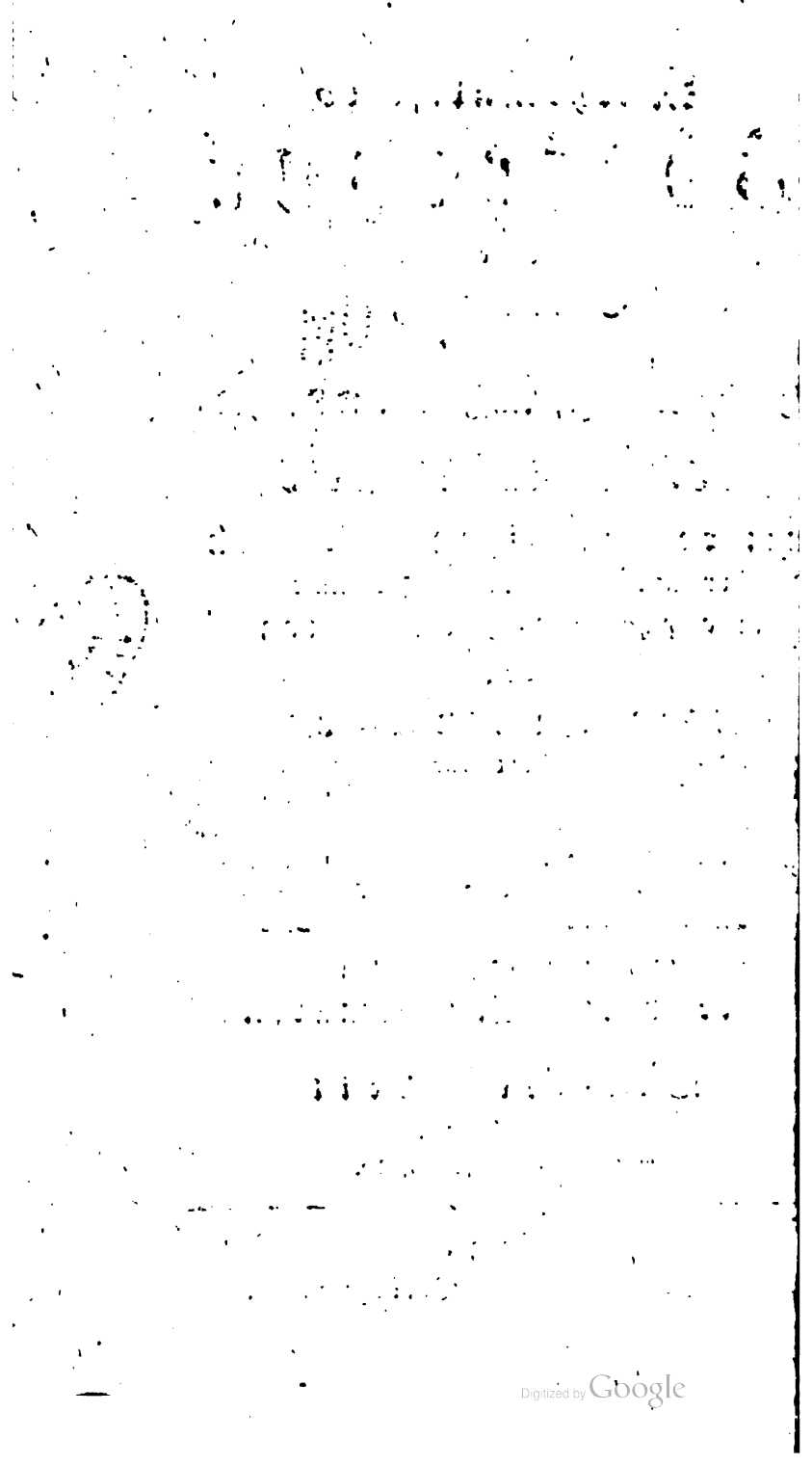
von K bis P.

Mit zehn Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage 1808.

Digitized by Google


Digitized by Google

Mathematisches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literarischen Nachrichten, in alphabetischer Ordnung.

Erste Abtheilung.

Arithmetik, Analysis und Geometrie, die niedere und die höhere.

K.

Kante bezeichnet sehr gut den Winkel zweyer Seitenflächen eines Prisma oder einer Pyramide, oder eines andern zwischen ebenen Flächen eingeschlossenen Körpers. Der Winkel dreyer oder mehrerer Ebenen ist ein körperlicher Winkel, eine Ecke. Euler gebraucht für jenen Flächenwinkel das lateinische Wort Acies. — Sollte man im gemeinen Leben unter Kante (einem im Niedersächsischen besonders üblichen Worte) mehr den Durchschnitt der beiden Ebenen, als ihren Winkel verstehen, so hindert dieses doch nicht, jene Bedeutung zum geometrischen Gebrauche festzusetzen. Adelung giebt als eigentliche Bedeutung des Wortes, Kante, an: die Ecke, scharfe Seite eines Dinges, und in weiterer, die äußerste Seite oder Fläche eines Dinges, den Rand. Diese letztere möchte die ursprüngliche Bedeutung seyn, die auch Fulda als die einzige angiebt.

Kegel, (Conus) ist ein Körper, der zwischen einer Kreisfläche und einer krummen Fläche enthalten ist,

Digitized by Google

die von einer durch einen festen Punct gelegten, um dem Umfange des Kreises ganz herumgeführten, u stimmt langen geraden Linie beschrieben wird.

In Fig. 1. ist A der feste Punct, oder der Sc tel (Vertex) des Kegels, BCDE die Kreisfl oder die Grundfläche (Basis) desselben, AB oder die herumgeführte gerade Linie, oder die Seite Kegels.

1. Da die gerade AB in A nicht begränzt, dern unbestimmt verlängert gedacht werden muß, so mit dem Kegel ABCDEA auf der andern Seite vo noch ein entgegengesetzter Kegel Abcde verb den. — Jeden Kegel muß man nach beiden Seiten unbestimmt fortlaufend sich gedenken.

2. Die gerade AF, von dem Scheitel nach d Mittelpuncte der Grundfläche F, heißt die Axe des Keg Diese in den entgegengesetzten Kegel verlängert ist in d selben die Axe.

3. Wenn die Axe senkrecht auf die Grundfl steht, so ist der Kegel ein senkrechter oder glei seitiger. Ist sie gegen diese geneigt, so ist der K ein schiefer oder ungleichseitiger (Scalenu Euklides betrachtet nur den gleichseitigen Kegel. XI. Erkl. 18.

4. Die Kegel gehören mit den Pyramiden zu e Gattung von Körpern. Ein Kegel ist die Gränze der P ramiden, welche bey einem gemeinschaftlichen Sche über regulären, in demselben Kreise beschriebenen F ren, errichtet werden. Je größer die Anzahl der Se ist, desto näher kommen sie dem Kegel. Daher ha Kegel und Pyramiden verschiedenes mit einander gem was die Form der mit der Grundfläche parallelen Schn und den körperlichen Inhalt betrifft.

5. Anstatt des Kreises kann man auch eine an in sich herumlaufende Figur, als eine Ellipse, zur Gru fläche nehmen. Läßt man anstatt der geraden AB

Digitized by Google

linie sich um ihre Axe ganz herumdrehen, so ent- kegelartiger Körper, den man Konoid nennt.

Wenn ein Kegel parallel mit seiner Grundfläche en wird, so ist der Schnitt ein Kreis, der Schnitt- dem einen oder dem andern der entgegengesetzten führt werden. Der Mittelpunct des Kreises ist ct, in welchem die Axe die Ebene desselben trifft. he jede Anfangsgründe.

. Die Durchmesser der Kreisschnitte verhalten ihre Abstände von dem Scheitel; ihre Flächen wie drate dieser Abstände.

. Ein schiefer Kegel, (Fig. 2.) dessen Grundflä- D ist, werde durch seine Axe von einer Ebene geschnitten, die senkrecht auf die Grundfläche ist. ehe in dem Dreyeck ABD die gerade EF, so daß AEF = ADB, also W. AFE = ABD ist, re durch diese EF einen Schnitt senkrecht auf die ABD, welcher die Kegelfläche in der krummen GFH schneide: es ist dieser Schnitt ein Kreis, Durchmesser EF ist.

Denn man ziehe durch irgend einen Punct K der e parallele LM mit BD, und führe durch diese Schnitt LGMH parallel mit der Grundfläche. Schnitt ist ein Kreis, dessen Durchmesser LM ist. derselbe senkrecht auf die Ebene ABD (s. Ebene,

Die Durchschnittslinie GH der beiden auf ABD hten Schnitte ist senkrecht auf die Ebene ABD (a. 2.), also senkrecht sowohl auf EF als auf LM. der parallelen BD, LM ist W. ALM = ABD, . AML = ADB, also ist W. AEF = AML, W. AFE = ALM. Daher sind die Dreyecke . und MKF einander ähnlich, und es ist KL = KM : KF, also KE × KF = KL × KM. m Kreise LGMH ist KL × KM = KG² = KH². ist KE × KF = KG² = KH², für jeden Punct F. Da zugleich die gerade GH, welche von EF halbirt wird, auf dieselbe senkrecht steht, so ist der

Digitized by Google

Schnitt EGFH ein Kreis, deſſen Durchmeſſer EF zufolge der Natur des Kreiſes.

9. Der Schnitt EGFH heißt ein Wechſchnitt (Sectio ſubcontraria). Würde der K EGFH, oder ein mit demſelben paralleler, als Gr fläche angenommen, ſo wären LGMH oder B Wechſelſchnitte. Die geraden BD, EF heißen A parallelen.

10. Auf der Beſchaffenheit des Wechſelſchnit daß er ein Kreis iſt, beruhen die ſchönen Eigenſchaften ſtereographiſchen Projection der Kreiſe in einer Kugel.

11. Der körperliche Inhalt eines Ke iſt der dritte Theil eines Cylinders, der mit dem Kegel ſelbe Grundfläche und dieſelbe Höhe hat. Euklid XII. 10. Vergl. den Artikel, Exhauſtions-Meth Th. II. S. 155. Wie Cavaleri den Beweis nach ner Methode des Untheilbaren geführt hat, iſt in Th S. 420. angeführt.

12. Nach der von Archimedes angewan Methode für die Cubirung der Konoiden wird der In eines Kegels folgendergeſtalt gefunden. Man theil Höhe des Kegels in m gleiche Theile, und nenne j Theil h, ſo daß die ganze Höhe des Kegels = m h Durch jeden Theilungspunct führe man einen Schnitt allel mit der Grundfläche, und errichte über jedem ſelben, ſo wie über der Grundfläche einen Cylinder der Höhe h, ſo iſt der Kegel kleiner als die Su aller dieſer Cylinder, aber größer als die Summe der linder über den Schnitten, ohne denjenigen über der Gr fläche. Man ſetze den Halbmeſſer des oberſten oder ſten Schnittes = a, ſo iſt der Halbmeſſer der Grundf = m a. Die Halbmeſſer der Schnitte, nebſt demjen der Grundfläche machen die Progreſſion, a, 2a, 3a, 4 m a; und ihre Flächen die Progreſſion πaa, 4π $9\pi aa \ldots m^2\pi aa$, wo π der halbe Kreisumfang zur heit als Halbmeſſer iſt. Der Kegel iſt kleiner als Summe, $(1+4+9\ldots+m^2)\pi aah$, und größer

Digitized by Google

nme, $(1+4+9 \ldots +(m-1)^2)\pi aah$.
Summe ist $=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)\pi aah$,
$=\frac{1}{3}(m-1).m.(2m-1)\pi aah$,. Der
r über der Grundfläche des Kegels mit derselben
ah ist $=\pi m^2a^2.mh=\pi m^3a^2h$; also ist der
heil desselben kleiner als die erstere Summe, und
als die zweyte; liegt daher zwischen denselben Grö-
der Kegel. Da beide Summen um den Cylinder
^2h unterschieden sind, der kleiner als jeder angeb-
rperliche Inhalt gemacht werden kann, so sind der
und der dritte Theil des Cylinders nicht von einan-
rschieden, oder sie sind gleich groß.

Die Integralrechnung macht die Rechnung viel
, s. Cubirung.

13. Aufg. Den Inhalt eines zwischen zwey par-
Kreisflächen eingeschlossenen Kegelstücks zu finden.

Es sey a der Halbmesser der größern Kreisfläche,
kleinern, ihr senkrechter Abstand $=c$. Der In-
st $=\frac{1}{3}\pi(aa+bb+ab)c$.

Die Höhe des ergänzenden Kegels sey $=x$, so daß
öhe des vollständigen Kegels $=c+x$ ist. Es ist
$=c+x:x$ (Dreyeck 8.), daher $a-b:b=c:x$,
$x=\frac{bc}{a-b}$. Der Inhalt des vollständigen Ke-
ist $=\frac{1}{3}\pi aa(c+x)$, des ergänzenden $=\frac{1}{3}\pi bbx$;
des Kegelstücks $=\frac{1}{3}\pi(aa-bb)x+\frac{1}{3}\pi aac$.
$aa-bb=(a+b)(a-b)$ ist, so wird, wenn
x dessen Werth gesetzt wird, der angegebene Inhalt
Kegelstücks erhalten.

14. Satz. Unter allen senkrechten Kegeln, die in
und dieselbe Kugel eingetragen werden können, ist der-
e der größte, dessen Höhe vier Drittheilen des Halb-
ers der Kugel gleich ist.

Es sey der Halbmesser der Kugel $=a$, der Abstand
Grundfläche des gesuchten Kegels von dem Mittelpuncte

Digitized by Google

$= x$, so ist der Halbmesser der Grundfläche $= \sqrt{(a\,a - x$ und der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi(a\,a - x\,x)(a +$ $= \frac{1}{3}\pi(a^3 - a\,x^2 + a^2\,x - x^3)$. Daß hier ein Größ Statt findet, erhellt daher, weil der Inhalt Null wi wenn entweder die Grundfläche Null und die Höhe d Durchmesser gleich ist, oder wenn beide Null sind, d. wenn $x = -a$ ist. Nimmt man das Differential d Ausdrucks, und setzt es $= 0$ (Größtes und Kleinste 34.) so ist, $-2\,a\,x + a\,a - 3\,x^2 = 0$, das ist, $x^2 +$ $\frac{2}{3}\,a\,x = \frac{1}{3}\,a\,a$. Daraus wird gefunden $x = -\frac{1}{3}\,a + \frac{2}{3}\,a =$ $\frac{1}{3}\,a$ (Gleichung, 34.) Dieser Werth von x gehört dem größten Inhalte eines eingeschriebenen Kegel; d negative Wurzel $-a$, gehört zu dem Kleinsten, welch hier $= 0$ ist. Die Höhe des gesuchten Kegels ist al $= \frac{4}{3}\,a$.

Der Halbmesser der Grundfläche ist $= \sqrt{\frac{8}{9}\,a\,a} =$ $\frac{2}{3}\,a\sqrt{2}$. Es verhält sich die Höhe dieses größten Kegel zu dem Halbmesser der Grundfläche wie die Diagonal eines Quadrats zu dessen Seite.

15. Eben dieser Kegel hat auch unter allen in di Kugel eingetragenen senkrechten Kegeln die größte Obe fläche. — Denn es ist, wie gleich gezeigt werden wird, die Oberfläche eines senkrechten Kegels gleich einem Drey eck, dessen Grundlinie der Umfang seiner Grundfläche un die Höhe die Seite des Kegels ist. Mit Anwendung de vorigen Bezeichnungen ist das Quadrat der Seitenlini $= (a + x)^2 + a^2 - x^2 = 2\,a\,a + 2\,a\,x$. Der Umfang ist $= 2\pi\sqrt{(a^2 - x^2)}$, also die Kegelfläche $= \pi\sqrt{(a^2 - x^2)}$ $(2\,a\,a + 2\,a\,x)$. Diese ist am größten, wenn das Pro duct, $(a^2 - x^2)(2\,a\,a + 2\,a\,x)$, oder das Aggregat $2\,a^4 - 2\,a^2\,x^2 + 2\,a^3\,x - 2\,a\,x^3$ am größten ist. Das Differential dieses Ausdrucks Null gesetzt, giebt $a^2 - 2\,a\,x$ $- 3\,x^2 = 0$, oder $3\,x^2 + 2\,a\,x = a^2$, welches dieselbe Gleichung wie die vorher gefundene ist.

16. Satz. Die Fläche eines Sectors der Ober fläche eines senkrechten Kegels ist so groß als ein ebenes

Digitized by Google

Dreyeck, dessen Grundlinie der zugehörige Bogen des Grundkreises, und die Höhe die Seite des Kegels ist. Daher ist dann die ganze krumme Oberfläche eines senkrechten Kegels gleich einem ebenen Dreyeck, dessen Grundlinie der Umfang seiner Grundfläche und die Höhe die Seitenlinie des Kegels ist.

Man beschreibe in und um den Grundkreis ein gleichseitiges Vieleck, jedes von derselben Anzahl Seiten und errichte über beiden eine senkrechte Pyramide, deren Spitze in den Scheitel des Kegels fällt. Die krumme Oberfläche des Kegels liegt zwischen den Summen der Seitenflächen der einen und der andern Pyramide. Ein Sector der Kegelfläche, der zu einem der Bogen, worin der Kreis getheilt ist, gehört, liegt zwischen den beiden Dreyecken, welche die Seitenflächen beider Pyramiden bilden. Daher liegt jeder Sector der Kegelfläche zwischen zwey Dreyecken, die auf gleiche Art, wie jene gebildet werden, der zugehörige Bogen mag ein aliquoter Theil des Grundkreises seyn oder nicht. Man setze nun einen Bogen des Grundkreises $= z$, den zugehörigen Sector der Kegelfläche $= S$, die Seitenlinie des Kegels $= b$. Eine endliche Zunahme des Bogens sey Δz, der Kegelfläche $= \Delta S$; die Chorde des Bogens Δz werde durch $m\Delta z$; die berührende an der Mitte des Bogens bis an die aus dem Mittelpunete durch die Endpunkte gezogenen geraden, durch $n\Delta z$ bezeichnet. Die senkrechte vom Scheitel auf die Chorde sey $= \beta$. Nun ist $\Delta S > \frac{1}{2}\beta . m\Delta z$, und

$$\Delta S < \tfrac{1}{2} b . n\Delta z; \quad \text{also auch} \quad \frac{\Delta S}{b\Delta z} > \frac{\beta . m\Delta z}{2 b\Delta z},$$

und $\frac{\Delta S}{b\Delta z} < \frac{b . n\Delta z}{2 b\Delta z}$. Für den Differentialquotienten $\frac{\partial S}{b\partial z}$, der von der Größe der Veränderungen nicht abhängt, ist statt der Verhältnisse $b : \beta$; $\Delta z : m\Delta z$; $\Delta z : n\Delta z$ zu setzen $1 : 1$. Dadurch wird $\frac{\partial S}{b\partial z} = \frac{1}{2}$, und $\partial S =$

Digitized by Google

$\frac{1}{2} b \delta z$, folglich $S = \frac{1}{2} b z$, welches der erste Theil des Satzes ist, wovon der zweyte eine unmittelbare Folge wird.

Der Halbmesser des Kreises sey $= a$, so ist der Umfang $= 2 \pi a$, und die krumme Kegelfläche $= \pi a b$.

17. Archimedes druckt den Satz (16.) folgendergestalt aus: Jedes gleichschenklichten Kegels Oberfläche, ohne seine Grundfläche, ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser der Grundfläche (von Kugel und Cylinder, Buch I. S. 15.). Nämlich wenn man in der Formel für die Kegelfläche, $\pi a b$, setzet $a b = c$, so ist die Kegelfläche $= \pi c c$, einem Kreise, dessen Halbmesser $= c$ ist. — Der Archimedeische Beweis zeigt, daß die Kegelfläche weder größer noch kleiner als die angegebene Kreisfläche seyn kann, daher ihr gleich ist.

18. Nimmt man den Winkel ω so, daß $2 \pi : \omega = b : a$ ist, so ist der Kreisbogen $b \omega =$ dem Kreisumfange $2 \pi a$, und der Sector mit dem Halbmesser b und dem Winkel ω ist $= \frac{1}{2} b . b \omega = \pi a b$, der Kegelfläche.

19. Satz. Die krumme Oberfläche eines senkrechten Kegelstücks ist gleich der krummen Oberfläche eines senkrechten Kegels, dessen Grundfläche zum Halbmesser die Summe der Halbmesser von den Grundflächen des Kegelstücks hat, und dessen Seite dieselbe mit der Seite des Kegelstücks ist.

Denn es seyn die Halbmesser der beiden Grundflächen a und α, die Seiten der zugehörigen Kegel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel, b und β, so ist die krumme Oberfläche des Kegelstücks $= \pi (a b - \alpha \beta)$. Es ist $a : b = \alpha : \beta$; daraus $a b : b b = \alpha \beta : \beta \beta$; hieraus $a b - \alpha \beta : b b - \beta \beta = a b : b b = a : b$. Also ist $a b - \alpha \beta = \frac{a (b + \beta) (b - \beta)}{b}$. Aus der ersten Proportion folgt noch diese, $a + \alpha : b + \beta = a : b$. Dadurch wird $a b - \alpha \beta = (a + \alpha) (b - \beta)$, und die krumme Fläche des Kegelstücks $= \pi (a + \alpha) (b - \beta)$.

Digitized by Google

20. Für die Oberfläche des ungleichseitigen Kegels einen endlichen analytischen Ausdruck zu finden, ist wegen der verwickelten Integrationsformel nicht möglich. Die Differentialformel ist inzwischen bald gefunden, wie jetzt gezeigt werden wird.

21. Es ist AMBA (Fig. 3.) die Grundfläche eines ungleichseitigen Kegels, dessen Scheitel in D, die Axe DC ist. Das Dreyeck ADB, worin die Axe DC ist, sey senkrecht auf die Grundfläche. Die senkrechte DE auf die Ebene derselben treffe den (hier verlängerten) Durchmesser BA in E. Auf dem Umfange der Grundfläche nehme man irgend zwey Puncte, M, m, und ziehe die Seitenlinien DM, Dm, so ist MDm ein Sector der Kegelfläche, der als die Zunahme des unbestimmten Sectors ADM angesehen werde. Die Fläche desselben liegt zwischen zwey ebenen Dreyecken, deren eines von der Chorde des Bogens Mm und den beiden Seitenlinien DM, Dm gebildet wird, das andere von der die Mitte von Mm berührenden, und von den beiden an ihre Endpuncte auf den verlängerten Halbmessern CM, Cm aus D gezogenen geraden Linien, auf gleiche Art, wie es in (16.) gezeigt ist. In M werde die berührende MN gezogen, und auf diese von D aus die senkrechte DP. Dieser DP nähern sich die von D auf die verlängerte Chorde von M und der die Mm in der Mitte berührenden gezogenen Perpendikel immer mehr, je kleiner Mm genommen wird. Es sey der Sector ADM = S, der Bogen AM = z, so ist auf gleiche Weise wie in (16.) der Differentialquotient $\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{2}DP$. Darum muß ein Ausdruck für das Perpendikel DP durch den Bogen AM oder den Winkel ACM gesucht werden.

22. Von dem Puncte E, wo die senkrechte aus D die Ebene der Grundfläche trifft, ziehe man auf die den Kreis in M berührende MN die senkrechte EP, und dann die gerade DP, so ist diese DP senkrecht auf MN. Denn

Digitized by Google

die Ebene DEP ist senkrecht auf die Ebene CME, da DE senkrecht auf sie ist (Ebene, 21.); und da MP senkrecht auf den Durchschnitt beider, EP ist, so ist sie senkrecht auf die Ebene DEP (Ebene, 25.), also senkrecht auf die durch P gezogene DP. — Man setze nun $AC = a$, $CD = b$, den spitzen Winkel $ACD = \alpha$; den unbestimmten Winkel $ACM = \varphi$. Es ist $CN = \frac{a}{\cos\varphi}$; $CE = b\cos\alpha$, also $EN = \frac{a}{\cos\varphi} - b\cos\alpha = \frac{a - b\cos\alpha.\cos\varphi}{\cos\varphi}$. Da W. $N = 90° - \varphi$, und EPN ein Rechter ist, so ist $EP = NE.\cos\varphi = a - b\cos\alpha.\cos\varphi$. Nun ist $PD^2 = DE^2 + PE^2$, und $DE = b\sin\alpha$, folglich ist

$$PD = \sqrt{(b^2\sin\alpha^2 + (a - b\cos\alpha.\cos\varphi)^2)}.$$

Der zwischen AD, MD und AM enthaltene Sector der Kegelfläche sey $= S$, so ist das Differential

$$\partial S = \tfrac{1}{2}a\partial\varphi\sqrt{(b^2\sin\alpha^2 + (a - b\cos\alpha.\cos\varphi)^2)}.$$

Man setze $b\sin\alpha = h$; $b\cos\alpha = g$, so ist

$$\partial S = \tfrac{1}{2}a\partial\varphi\sqrt{(a^2 + h^2 - 2ag\cos\varphi + g^2\cos\varphi^2)}.$$

Zur Abkürzung sey $a^2 + h^2 = c^2$, so ist

$$\partial S = \tfrac{1}{2}ac\partial\varphi\sqrt{(1 - \frac{2ag}{cc}\cos\varphi + \frac{g^2}{c^2}\cos\varphi^2)}$$

23. Das Integral dieser Formel ist nur in Gestalt einer Reihe anzugeben möglich. Die Wurzelgröße wird in eine Reihe verwandelt, entweder nach der Formel für den binomischen Lehrsatz, wenn der erste Theil $= 1$, der zweyte $= -\frac{2ag}{cc}\cos\varphi + \frac{g^2}{c^2}\cos\varphi^2$ genommen wird, oder bequemer, wenn man die Wurzel $= 1 + A\cos\varphi + B\cos\varphi^2 + C\cos\varphi^3 + D\cos\varphi^4 + \text{etc.}$ setzt, und die unbekannten Coefficienten durch Vergleichung des Quadrats dieser Reihe mit der Größe unter dem Wur-

Digitized by Google

zelzeichen bestimmt. Solchergestalt erhält man eine Reihe Differentialformeln von der Gestalt $\partial\varphi . \operatorname{col}\varphi^m$, deren Integral zu finden, in dem Artikel, Integralrechnung, 114, nebst 62. 63, gewiesen ist. Es ist

$$A = -\frac{ag}{cc}; \qquad B = \frac{g^2 h^2}{2c^4};$$
$$C = -AB; \qquad D = -AC - \tfrac{1}{2}B^2;$$
$$E = -AD - BC; \qquad F = -AE - BD - \tfrac{1}{2}C^2;$$
etc.

24. Für die halbe Kegelfläche, da $\varphi = \pi$ ist, werden die Integrale, in deren Differentialen der Exponent von $\operatorname{col}\varphi$ eine ungerade Zahl ist, alle Null, und die Integrale von den übrigen, mit geraden Potenzen von $\operatorname{col}\varphi$, enthalten nur ein einziges Glied, den Winkel φ mit einem numerischen Coefficienten, der ein eigentlicher Bruch ist, außer dem Coefficienten der Reihe. Nämlich, wenn in dem unbestimmten Integral, $\int \operatorname{col}\varphi^{2m}\partial\varphi$, gesetzt wird $\varphi = \pi$, so ist

$$\int \operatorname{col}\varphi^2\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi; \quad \int \operatorname{col}\varphi^4\partial\varphi = \frac{1.3}{2.4}\pi;$$
$$\int \operatorname{col}\varphi^6\partial\varphi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\pi; \int \operatorname{col}\varphi^8\partial\varphi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi;$$
u. s. f.

25. Dadurch wird die krumme Oberfläche des Kegels =

$$ac\left(\pi + \tfrac{1}{2}\pi . B + \frac{1.3}{2.4}\pi . D + \frac{1.3.5}{2.4.6}\pi . F + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi . H + \text{etc.}\right).$$

Die Entwickelung der Coefficienten aus den obigen Werthen giebt

Digitized by Google

$$A = -\frac{ag}{c^2}; \quad B = +\frac{g^2h^2}{2c^4};$$

$$C = +\frac{ag^3h^2}{2c^6}; \quad D = +\frac{g^4h^2(4a^2-h^2)}{8c^8};$$

$$E = +\frac{ag^5h^2(4a^2-3h^2)}{8c^{10}};$$

$$F = +\frac{g^6h^2(8a^4-12a^2h^2+h^4)}{16c^{12}};$$

u. s. f.

Folglich ist nunmehr die krumme Oberfläche des schiefen Kegels =

$$\pi ac\left(1+\frac{g^2h^2}{4c^4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{g^4h^2(4a^2-h^2)}{8c^8}\right.$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{g^6h^2(8a^4-12a^2h^2+h^4)}{16c^{12}}$$
$$\left.+\text{ etc.}\right).$$

26. In den mehrtheiligen Factoren der Glieder dieser Reihe setze man für h^2 seinen Werth, c^2-a^2, und drücke a und c durch ihr Verhältniß gegen h aus, so daß $a=mh$; $c=nh$ sey. Dadurch erhält man die krumme Oberfläche des schiefen Kegels =

$$\pi ac\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot\frac{g^2}{h^2}\right.$$
$$-\frac{1.3}{4.16}\left(\frac{1.3}{n^6}-\frac{3.5m^2}{n^8}\right)\frac{g^4}{3h^4}$$
$$+\frac{1.3.5}{4.16.36}\left(\frac{1.3.5}{n^8}-2.\frac{3.5.7m^2}{n^{10}}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5.7.9m^4}{n^{12}}\right)\frac{g^6}{5h^6}\right.$$
$$\left.-\text{ etc.}\right.$$

Digitized by Google

wo das Gesetz der Fortschreitung bemerkbar ist. Diese Form der Reihe hat Euler in den Novis Actis Acad. Petrop. T. III. p. 89. angegeben, wo noch zwey Glieder zugesetzt sind. Sie ist dadurch vorzüglich, daß die Progressionalgröße, $\frac{g^2}{h^2}$, diejenige ist, von welcher der Unterschied des senkrechten und schiefen Kegels abhängt. Es ist $\frac{g}{h}$ die Cotangente des Neigungswinkels der Axe. Der Quotient n ist immer größer als 1, und $\frac{m}{n}$ kleiner als 1.

27. Wenn aus der Formel in (25.) die Größe h ganz herausgeschafft wird, so läßt sich die Reihe nach Potenzen von $\frac{g^2}{c^2}$ ordnen, wobey sich auch ein Gesetz der Fortschreitung entdeckt. Diese Form hat l'Huilier der Reihe gegeben, in den Principiis calculi diff. et integr. §. 135. p. 199. Nur hat er die Progressionalgröße nicht abgesondert.

28. In dem Falle, daß die gefundene Reihe wegen des Verhältnisses von g zu h nicht brauchbar ist, würde man die Oberfläche einer um den Kegel gelegten, und einer in denselben getragenen Pyramide mit einer regulären Grundfläche zu berechnen haben. Die Oberfläche des Kegels liegt zwischen ihren beiden Oberflächen. Man theile also den Halskreis AMB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch jeden Theilungspunct, wie M, eine berührende. Auf dieser liegt eine Seite FG des Vielecks, so daß M die Mitte dieser Seite ist. Berechnet man für den Punct M die auf MN senkrechte DP, so erhält man aus der Seite des Vielecks FG und der DP den Inhalt der zu M gehörigen Seitenfläche FDG. Die halbe Oberfläche der umgeschriebenen Pyramiden ist gleich dem Dreyeck, dessen Grundlinie die Seite des Vielecks und die Höhe der Summe aller Perpendikel

Digitized by Google

wie DP ist. — Für die eingeschriebene Pyramide verfährt man eben so, nur daß hier statt des Halbmessers CM die von C auf die Seite des Vielecks gezogene senkrechte genommen wird.

29. Die Aufgabe über die Oberfläche eines schiefen Kegels hat mehrere Mathematiker beschäftigt. Ein Geometer in der Mitte des 17ten Jahrhunderts, Richard Albius, gab muthmaßlich eine Formel für diese Oberfläche an. Man findet sie in Kästners Geschichte der Mathematik, Th. III. S. 218. Varignon ist der erste, der sie aufzulösen suchte, kam aber nicht weiter, als daß er statt der Integration die Rectification einer transscendenten Curve setzte. Sein Aufsatz steht in den Miscell. Berolin. ad ann. 1727. Contin. 2da. Leibnitz wollte in einem Anhange zu dieser Abhandlung statt jener Curve eine algebraische anwenden. Das Verfahren ist sehr sinnreich; er übereilte sich aber dabey in einem Stücke. Euler zeigte in den Commentt. novis Acad. Petrop. T. I. a. ann. 1747 et 1748, wie algebraische Curven construirt werden können, durch deren Rectification die Oberfläche schiefer Kegel gefunden wird, erweiterte sogar die Auflösung auf Kegel mit andern Grundflächen als Kreisen. Dieses alles nach der ältern geometrisch-analytischen Methode. Im Jahr 1786 nahm Euler die Aufgabe wieder vor, und löfete sie durch die Integralrechnung auf, in den Novis Actis Acad. Petrop. T. III. a. a. 1785. Er findet zweyerley Formeln, deren eine die hier (25.) entwickelte ist, die er aber auf eine sehr künstliche Art herausbringt, weil er die Verwandlung des irrationalen Werths von DP auf eine andere Weise vornimmt. Aus derselben leitet er die in (26.) mitgetheilte her. Die zweyte Formel unterscheidet sich dadurch, daß in dem Differential ∂S statt $g^2 \cos\varphi^2$ gesetzt ist $\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}g^2 \cos 2\varphi$, welches eine leichte Annäherung in dem Falle giebt, daß $a^2 + h^2 + \frac{1}{2}g^2$ gegen $\frac{1}{2}g\cos 2\varphi - 2ag\cos\varphi$ groß ist. Euler zeigt auch, wie die ebene krummlinichte Figur, welche der Kegelfläche gleich ist, gezeichnet werden kann; wiewohl dieses immer mühsam seyn

Digitized by Google

möchte. In der zur Erläuterung beygefügten 8ten Figur ist der Winkel EAF, der längsten und der kürzesten Seitenlinie, unrichtig als ein Rechter dargestellt. — Um dieselbe Zeit legte Kästner der Göttingischen Societät der Wissenschaften seine Auflösung dieser Aufgabe vor, die in den Commentationen der Societät Bd. IX. enthalten ist. Von der neuen Eulerschen Auflösung konnte er nichts wissen, da er seine Abhandlung den 9. Jan. 1788 vorlas, und der dritte Band der Petersburgischen Acten erst im Jahre 1788 erschienen ist. Kästners Verfahren ist dasselbe mit dem hier angewandten. Nur entwickelt er die Coefficienten C, D, E, etc. nicht. Er giebt die Differentialgleichung für die abgewickelte Oberfläche an. Da diese auf keine bequeme Art integrirbar ist, so zeigt er, wie ein der wahren Figur nahe kommendes Netz gezeichnet werden möge. — Die Formel von l'Huilier ist oben angezeigt. Von dieser Materie hat noch Yelin in Erlangen 1794 eine gute Gradualschrift geliefert.

30. Anstatt die abgewickelte Kegelfläche selbst zeichnen zu wollen, zeichne man, welches viel leichter ist, und genau bewerkstelligt werden kann, die abgewickelte Fläche einer gleichseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein um den Kreis, oder in demselben beschriebenes reguläres Vieleck ist. Es sey (Fig. 3.) FG die Seite des umgeschriebenen Vielecks, welche den Kreis AMB in M berührt. Zieht man DF, DG, so ist das Dreyeck FDG eine der Seitenflächen der Pyramide. In diesem ist der Winkel FDG der Unterschied der Winkel FDP, GDP. Die Kathete MP in dem rechtwinklichten Dreyeck MDP ist $= EC. \sin ECM = g \sin \varphi$. Denn man ziehe EL senkrecht auf CM so ist $EL = PM$, da CM und EP parallel sind. Also $PM = g \sin \varphi$. Da MF und MG jede die halbe Seite des Vielecks sind, so ist sowohl PF als PG bekannt. Nun ist vorher auch die auf MP senkrechte DP gefunden, also werden $\tang FDP = \frac{FP}{DP}$.

Digitized by Google

und tang $GDP = \frac{GP}{DP}$ jede bekannt, und der Unterschied ihrer Winkel, FDG. Ferner ist $FD = DP \times$ sec. FDG, und $DG = DP$. sec. GDP. Solchergestalt findet man ein Dreyeck nach dem andern. Da je zwey eine Seite gemein haben, so braucht man nur immer eine Seite zu berechnen, außer in dem ersten, wenn man nicht zur Probe dieselbe Seite für zwey neben einander liegende Dreyecke berechnen will. — Mit der Abwickelung der eingeschriebenen Pyramide verfährt man auf ähnliche Art. — Durch dieses Verfahren erhält man in den Puncten M zugleich Puncte der abgewickelten Kegelfläche.

31. Es kann nöthig seyn, den Winkel der Ebene DCM mit der Grundfläche zu finden. Dieses geschieht leicht durch Hülfe der sphärischen Trigonometrie. Es sind hier drey Ebenen, diejenigen der Dreyecke ACD und MCD, und die des Sectors ACM, von welchen die beiden ersten auf einander senkrecht stehen. Man beschreibe aus C mit einem willkührlichen Halbmesser eine Kugelfläche, so geben die drey Puncte, worin die Linien CA, CD, CM sie treffen, die Winkelpuncte eines sphärischen, bey A rechtwinklichten, Dreyecks, in welchem die Katheten die zu ACD ($=\alpha$), und ACM ($=\varphi$) gehörigen Kreisbogen sind. Der Winkel, welcher der Seite, Bogen α, gegen über liegt, ist der gesuchte Winkel der Ebene DCM mit ACM. Es sey dieser Winkel ω, so ist $\text{tang } \omega = \frac{\text{tang } \alpha}{\sin \varphi}$.

32. Allgemeine Untersuchungen über die Abwickelung krummer Oberflächen sind befindlich in einer Abhandlung von Euler: De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. Commentt. novi Acad. Petrop. T. XVI. a. a. 1771. und noch vollständiger von Monge in den Mémoires présentés à l'Acad. des Sc. T. IX. à Paris 1780.

Digitized by Google

Kegelschnitt ist die ebene Figur, welche durch den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene entsteht. Wird der Schnitt durch den Scheitel geführt, so ist die Figur ein geradlinichter Winkel, in jeder andern Lage eine krumme Linie. Unter Kegelschnitt versteht man ausschließlich den letztern.

1. Es sey ABD (Fig. 4.) irgend ein Schnitt durch die Axe eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis BCDE ist, also ein Dreyeck, dessen Grundlinie ein Durchmesser BD ist. Man ziehe in der Ebene desselben die parallele MN mit BD, und führe durch diese einen Schnitt MQNR parallel mit der Grundfläche, so ist dieser Schnitt ein Kreis, dessen Durchmesser MN ist (Kegel, 6.). Zieht man in der Ebene dieses Schnittes die gerade QPR senkrecht auf MN durch einen Punct derselben P, so ist PQ = PR, und $PQ^2 = MP \times PN$.

2. Ein Kegel ACE (Fig. 5.) werde von einer Ebene FHK, die nicht durch den Scheitel geht, geschnitten; ihr Durchschnitt mit der Ebene der Grundfläche sey KHK. Durch den Mittelpunct O der Grundfläche ziehe man OH senkrecht auf KHK, und schneide den Kegel durch den Scheitel A und den Durchmesser BOD. Die den Kegel schneidende Ebene FHK schneide das Dreyeck ABD in FG: diese FG ist ein Durchmesser des krummlinichten Schnittes FQGR, nämlich so, daß sie alle in demselben mit KHK parallelen QR halbirt.

Denn man ziehe in dem Dreyeck ABD mit BD eine parallele MN, welche FG in P schneide, so ist die Ebene der Linien, MN, QR. parallel mit der Ebene der Linien BH, KK, und der Winkel MPQ = BHK (Ebene, 18. 13.), also MPQ ein Rechter. Daher PQ = PR, (1.).

3. Wenn das Dreyeck ABD senkrecht auf die Grundfläche ist, so steht die KK, welche auf den Durchschnitt beider Ebenen senkrecht ist, auf die Ebene des Dreyecks senkrecht, und die der KK parallele QR ebenfalls (Ebene, 25. 11.). Die QR steht also auf FG senk-

Digitized by Google

recht, und ist die Axe des Kegelschnitts. Eine Axe nämlich ein Durchmesser, der parallele Chorden rechtwi lich halbirt.

4. Bey der Schneidung eines Kegels sind dr Fälle möglich, außer dem Schnitte durch den Scheit Der Durchschnitt KK mit der Ebene der Grundfläc kann erstlich so liegen, daß der Durchschnitt FG mit de nach (2.) gelegten Dreyeck ABD beide Schenkel A AD des Winkels A treffe, wie in Fig. 5. Oder er lie zweytens so, daß FG parallel ist mit dem einen Schen AD; oder drittens so, daß FG nur den einen Schen schneidet, von dem andern aber die Verlängerung jensei des Scheitels A. In dem ersten Falle heißt der Schn eine Ellipse, in dem zweyten eine Parabel, und dem dritten eine Hyperbel. Der Grund dieser Ben nungen ist in dem Artikel: Ellipse, Th. II. S. 74 geführt.

5. Es sey der Schnitt eine Ellipse (Fig. 5 welche das nach der Bestimmung (2) durch die Axe legte Dreyeck ABD in FG schneide. Durch die En punete F, G seyn Ff, Gg parallel mit der Grundlin BD, eben so, MN durch einen Punct P der Linie FG und QPR sey parallel mit der Durchschnittslinie K der schneidenden Ebene und der Ebene der Grundfläche es ist $PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2$.

Denn es ist

$$PM : FP = Gg : FG,$$
$$PN : PG = Ff : FG,$$

also durch Zusammensetzung der Verhältnisse,

$$PM \times PN : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

Nun ist $PQ = PR$, und $PQ^2 = PM \times PN$ (1.), also ist

$$PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

6. In dem Mittelpunete des Durchmessers FG ist das Product oder Rechteck $FP \times PG = \frac{1}{4} FG^2$; als

Digitized by Google

Quadrat der Ordinate daselbst $= \frac{1}{4} Ff \times Gg$, oder Quadrat der Chorde, das ist, des conjugirten Durchmesses $= Ff \times Gg$.

7. Man nehme zu FG, Ff, Gg die vierte Proportionale Ll, so heißt diese der Parameter, und es ist $Q^2 : FG \times PG = Ll : FG$.

8. Da $FP \times PG = FP \times FG - FP^2$, so ist $Q^2 = FP \times Ll - FP \times \frac{FP \times Ll}{FG}$.

9. Der Kegelschnitt sey eine Parabel (Fig. 6.), wenn der Durchschnitt FH der schneidenden Ebene FHK dem Dreyeck durch die Axe dem Schenkel AD parallel ist. Man ziehe nun durch den Punct F die parallele Ff mit dem Durchmesser BD der Grundfläche; ferner wie vorher MN parallel mit BD, und QPR parallel mit der Durchschnittslinie KHK der Grundfläche und der schneidenden Ebene: Es ist $PQ^2 : FP \times Ff = Ff : Af$.

Denn es ist $PM : FP = Ff : Af$, wegen der ähnlichen Dreyecke, und daher $PM \times PN : FP \times PN = Ff : Af$. Da $PQ^2 = PM \times PN$ ist (1.), so ist $PQ^2 : FP \times Ff = Ff : Af$. Es ist nämlich $PN = Ff$.

10. Es sey $Af : Ff = Ff : Ll$, so ist $PQ^2 = FP \times Ll$. Die beständige Linie Ll heißt auch hier der Parameter.

11. Der Kegelschnitt sey eine Hyperbel (Fig. 7.), indem der Durchschnitt FH der schneidenden Ebene FHK mit dem Dreyeck durch die Axe (nach der in (2.) bestimmten Lage) den Schenkel AD jenseits A schneidet. Nach derselben Construction und denselben Bezeichnungen, wie für die Ellipse, ist

$$PM : FP = Gg : FG$$
$$PN : PG = Ff : FG.$$

$$PM \times PN : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

Digitized by Google

und, weil $PM \times PN = PQ^2$ ist,

$$PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

12. Daß für die Puncte zwischen F und G Ordinaten an den Kegelschnitt möglich sind, zeigt die der schneidenden Ebene; aber von G an ist in dem ge gengesetzten Kegel dieselbe Figur enthalten, wie in Kegel ABCD. Es sey die Abscisse Gp, die zugehö Doppel-Ordinate qpr, so ist daselbst auf gleiche Art in diesem,

$$pq^2 : Gp \times Fp = Gg \times Ff : FG^2.$$

Nimmt man $Gp = FP$, so ist $Fp = GP$, und da $pq = PQ$.

13. Es sey Ll die vierte Proportionale zu F Ff, Gg, so ist $PQ^2 : FP \times PG = Ll : FG$, und

$$PQ^2 = FP \times Ll + FP \times \frac{FP \times Ll}{FG}.$$

14. An der Hyperbel ist das Quadrat der Ordin größer als das Rechteck von dem Parameter und der scisse, an der Ellipse ist es kleiner. Der Unterschied Quadrats und des Rechtecks ist ein Rechteck über Grundlinie FP, welches dem Rechtecke von FG und ähnlich ist. Es verhalten sich nämlich die Seiten des tern $FG : Ll$ wie die Seiten des erstern $FP : \frac{FP \times L}{FG}$

Apollonius, druckt das Quadrat der Ordinate an Ellipse und Hyperbel aus durch das Rechteck von der A scisse mit der senkrechten (wie er den Parameter nenn dort vermindert, hier vergrößert um ein Rechteck über, d Abscisse, welches dem Rechteck von den Seiten FG u Ll ähnlich ist. Den Parameter setzt er an FG in d Puncte F senkrecht auf FG, und zeichnet über FP Rechteck, welches dem Quadrat von PQ gleich ist. W gen dieser Lage des Parameters nennt er diese Linie senkrechte, (ὀρθια), den Durchmesser FG aber schiefe, (πλαγια).

Digitized by Google

Die vornehmsten Eigenschaften der Ellipse
rbel sind in den ihnen gewidmeten Artikeln aus
ommenen Gleichung für rechtwinklichte Coordina-
von der einen oder der andern Axe halbirt werden,
worden. Für die Parabel wird weiterhin das-
hehen. Die allgemeinsten Eigenschaften werden
rtikel, krumme Linien, vorgetragen werden. Hier
bsicht zu zeigen, wie die drey Curven aus dem
einer Kegelfläche entstehen.

In der analytischen Abhandlung von der El-
der Hyperbel ist die Gleichung für die Ordinaten
d einem Durchmesser aus dem Winkel, welchen
it der großen Axe macht, hergeleitet worden, so
dieses Datis die conjugirten Durchmesser und ihr
sich ergeben. Bey der geometrischen Entstehung
r Winkel der Coordinaten durch das in dem Kegel
ie Axe gelegte Dreyeck, durch die Lage desselben ge-
Grundfläche, und durch die Lage der schneidenden
gegen beide bestimmt. Dieser Winkel ist FPQ
HK (Fig. 5.). Man beschreibe aus H mit einem
rlichen Halbmesser eine Kugelfläche, so zeichnen die
, HO, HK, HF, darauf die drey Winkelpuncte
pharischen Dreyecks, worin eine Seite, nämlich der
W. OHK gehörige Bogen ein Quadrant ist. Der
l der geraden HO, HF sey $= \beta$, der Winkel der
ABD mit der Grundfläche sey $= \omega$, so ist der zu
B. FHK gehörige Bogen die Seite, welche dem
ω gegen über steht. Diese wird nun aus zwey
, einem Quadranten und Bogen β, mit dem ein-
ssenen Winkel ω gefunden. Es ist, wegen des
anten, die Formel für den Cosinus dieses Winkels
ntheilige, nämlich $\cos FHK = \sin\beta . \cos\omega$. Die
ache mit der Grundfläche den Winkel α, und der
messer BD mit dem Durchmesser in dem auf die
fläche senkrechten Schnitte durch die Axe den Winkel
geben diese drey Linien auf einer aus dem Mittel-
O beschriebenen Kugelfläche ein rechtwinklichtes

Digitized by Google

Dreyeck, worin ist $\text{tang}\,\omega = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\sin\varphi}$. Es ist

$$\cos\omega^2 = \frac{1}{1+\text{tang}\,\omega^2} = \frac{\sin\varphi^2}{\sin\varphi^2 + \text{tang}\,\alpha^2}$$

$$= \frac{\sin\varphi^2.\cos\alpha^2}{\sin\varphi^2.\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2}, \quad \text{also ist}$$

$$\cos FHK = \frac{\sin\beta.\sin\varphi.\cos\alpha}{\sqrt{(\sin\varphi^2.\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2)}}.$$

Der Winkel FHK ist ein Rechter, wenn $\beta = 0$ ist, in welchem Falle FH parallel mit BD, und der Schnitt ein Kreis ist. Ferner wenn $\varphi = 0$ ist, da das Dreyeck ABD senkrecht auf die Grundfläche ist, wie schon (3.) bemerkt worden. Drittens, wenn $\alpha = 90°$, oder wenn der Kegel ein senkrechter ist. Der Winkel BHK ist in allen drey Fällen ein Rechter.

Zur Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten.

Die Griechen haben die Eigenschaften der Kegelschnitte schon mit solchem Scharfsinne entwickelt, daß den Neuern nur eine Nachlese geblieben ist, außer daß noch diese kurze und allgemeine Methoden durch die Analysis gefunden haben. Von den nicht mehr vorhandenen Schriften des Aristäus und Euklides ist in Th. II. S. 320 Erwähnung geschehen.

Die Betrachtung der Kegelschnitte war anfangs natürlich eine eingeschränkte. Die schneidende Ebene ward senkrecht auf die Seite eines gleichseitigen Kegels gesetzt. Wenn der Winkel an dem Scheitel in dem Dreyeck durch die Axe ein Rechter ist, so gab der Schnitt eine Parabel, bey einem spitzen Winkel eine Ellipse, bey einem stumpfen eine Hyperbel. Daher findet man in den Schriften des Archimedes die Benennungen Schnitt des rechtwinklichten Kegels, des schiefwinklichten und des stumpfwinklichten Kegels statt der jetzt gewöhnlichen, von Apollonius eingeführten Benennungen

Digitized by Google

Daher unterscheidet Euklides diese drey gleichseitigen Kegel, in der 18ten Erklär. des XI. B. ein Unterschied, der nunmehr unnöthig ist. Die Asymptoten der Hyperbel hat Archimedes schon gekannt. Er nennt sie Linien, die dem stumpfwinklichten Schnitte am nächsten sind, in der Zuschrift vor der Abhandlung von Konoiden und Sphäroiden.

Von dem großen Werke des Apollonius über die Kegelschnitte ist schon in dem Artikel, Geometrie, (Th. II. S. 322 f.) Nachricht ertheilt worden. Es ist in acht Bücher abgetheilt. In dem ersten wird die Entstehung der Kegelschnitte mit ihren vornehmsten Eigenschaften vorgetragen. Das zweyte betrifft die Durchmesser der Schnitte und die Asymptoten, nebst verschiedenen Sätzen, die zu dem Diorismus (Bestimmung aller möglichen Fälle einer Auflösung) gehören. Das dritte Buch enthält, wie Apollonius selbst sagt, viele sonderbare (παραδοξα), größtentheils schöne und neue Lehrsätze, die zu der Construction der soliden Oerter (solcher Aufgaben, die durch Hülfe der Kegelschnitte aufgelöset werden müssen), und zu den Diorismen dienen. Man muß sich wirklich über die mannichfaltigen Vergleichungen wundern, die hier an den Abschnitten der berührenden, der ihnen parallelen, der Durchmesser und anderer auf gewisse Arten gezogenen geraden Linien, gemacht werden, theils in Absicht der Dreyecke und Vierecke, die daraus entstehen, theils in Absicht der Verhältnisse ihrer Quadrate oder der Rechtecke aus zwey Theilen einer solchen Linie. Hier kommt auch die harmonische Theilung einer geraden Linie vor, die durch den Durchschnitt zweyer berührenden gezogen ist. Sehr merkwürdig ist die vermuthlich hier zuerst vorgetragene Lehre von den Brennpuncten mit manchen von ihnen abhängenden Vergleichungen der geraden Linien und der Winkel. Das vierte Buch zeigt, auf wie mancherley Arten Kegelschnitte sich schneiden können. Hierin kommt nach des Verfassers Angabe vieles neue und vortreffliche (ἐκ περισσου) vor. Doch ist die Ausführung leicht verständlich, so daß auch Eutocius, der fleißige Commen-

Digitized by Google

tator des Apollonius, keine Erläuterungen dem von ihm verbesserten Texte beyzufügen nöthig gefunden hat. Die vier übrigen Bücher enthalten sehr feine und schwere Untersuchungen, daher diese Bücher uns auch nicht in der Urschrift erhalten sind, wie die vier ersten, sondern in einer arabischen Übersetzung, in welcher aber das achte fehlt. Das fünfte ist der Untersuchung über die größten und kleinsten geraden Linien gewidmet, die von einem Puncte her an einen Kegelschnitt gezogen werden können, oder wie wir jetzt sie lieber nennen würden, Normalen an diese Curven. Von dieser sehr scharfsinnigen Abhandlung ist in dem Artikel, Größtes und Kleinstes (Th. II. S. 684. ff.), ein Abriß geliefert. Das sechste Buch betrifft die Gleichheit und Ähnlichkeit der Kegelschnitte, auch wird darin gezeigt, wie ein gegebener Schnitt in einen gegebenen senkrechten Kegel gelegt werden könne, und wie ein senkrechter Kegel, der einem gegebenen ähnlich ist, und einen gegebenen Schnitt enthalten soll, gefunden wird. In dem siebenten Buche kommen viele neue Sätze vor, die conjugirten Durchmesser betreffend, auch einige Sätze vom Größten und Kleinsten (Th. II. S. 688.). Das achte Buch, welches ganz verloren gegangen ist, enthielt bestimmte Aufgaben (προβλήματα διωρισμένα), und war ein Anhang des siebenten, zu welchem es Anwendungen lieferte. Halley hat es wieder herzustellen gesucht. Die Aufgaben, die er darin auflöset, haben zum Gegenstande, aus der Axe und dem Parameter eines Kegelschnitts nebst gewissen Annahmen in Beziehung auf einen Durchmesser, oder diesen und den conjugirten zugleich, beide zu bestimmen. — Halley hat bey seiner schönen Ausgabe des Apollonius, Oxford 1710, gr. Fol. zwey arabische handschriftliche Uebersetzungen des ganzen Werks, ohne des achten Buchs, zur Hand gehabt, von welchen die eine Golius vorher besessen hatte; auch einen arabisch verfaßten Auszug aus der einen derselben, wovon Rave eine schlechte lateinische Uebersetzung geliefert hat, und den von Borelli 1661 herausgegebenen Auszug eines andern arabischen Verfassers, welchen Abrahamus Ecchel-

Digitized by Google

tensis ins Lateinische, aber nicht recht gut, übergetragen hat. Die Hülfssätze des Pappus zu dem Werke des Apollonius, und der Commentar des Eutocius zu den vier ersten Büchern sind beygefügt. Die gelehrte Hypatia (um das J. 400.) hat auch einen Commentar darüber geschrieben, der nicht mehr vorhanden ist.

Die ältern Ausgaben des Werkes vom Apollonius sind unvollkommen. Doch mag folgende Ausgabe empfohlen werden: Apollonii conicorum Libri IV. methodo nova illustrata et succincte demonstrata per Isaacum Barrow. Londini 1675. 4., zugleich mit den Schriften des Archimedes und der Sphärik des Theodosius.

Unter den Neuern hat zuerst der Jesuit, Gregorius *a Sancto Vincentio*, die Lehre von den Kegelschnitten mit neuen Sätzen bereichert. Man findet sie in einem großen, ziemlich seltenen Werke desselben, das überhaupt viele neue Bemerkungen zur Geometrie enthält: Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Antverp. 1647. Fol. — Wallis gab 1655. heraus: Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis, der in dem ersten Bande seiner Werke befindlich ist. Es ist darin die Rechnung angewandt; in dem ersten Theile kommen Cubaturen von kegel- und pyramidenförmigen Körpern vor.

In Frankreich lieferte de la Hire ein ausführliches Werk: Sectiones conicae in novem libros distributae, Paris. 1685. 249 pag. Fol. nach geometrischer Methode.

Die analytische Rechnung gebrauchte der Marquis de l'Hopital in dem Traité analytique des sections coniques, à Paris 1707, zweyte unveränderte Ausgabe 1720. 459 pag. 4. Er zeigt zugleich, wie die Kegelschnitte zur Auflösung bestimmter und unbestimmter Aufgaben angewandt werden. Die practischen Anwendungen der Kegelschnitte mit der Theorie zugleich enthält der Traité des sections coniques et autres courbes anciennes par *de la Chapelle*, à Paris 1751. 8. Eine

Digitized by Google

Übersetzung davon hat Böckmann geliefert, 1771, wiederholt 1791. Eine Umarbeitung derselben ist von J. F. Wolf im J. 1801. unternommen. Eine kurze, wie es scheint, deutliche Abhandlung, worin nur die gemeine Buchstabenrechnung angewandt wird, ist die Introduction aux sections coniques par *Mauduit*, à Paris 1761. 8. — Ein durch die Methode vorzügliches Werk ist Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré par *Biot*, à Paris 1802. 320 pag. in 8. wovon bald eine neue Ausgabe erfolgt ist, mit dem Titel: Essai de Géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, 1805. 281 pag. in 8. Kleinerer Druck als in jener. Die Anzahl der Paragraphen ist beträchtlich größer.

In England hat man sich viel mit den Kegelschnitten nach der geometrischen Methode der Alten beschäftigt. Zuerst gab Jakob Milnes, ein Prediger, heraus: Sectionum conicarum elementa, Oxonii, 1702, 96 pag. 8. 19 Kupfert. die ein Auszug aus dem Werke des de la Hire sind. Diese sind wegen ihrer Ordnung und Deutlichkeit, zugleich als eine Übung in der feinern Geometrie, sehr zu empfehlen. Es sind noch zwey etwas vermehrte Ausgaben dieses Buches von den Jahren 1712 und 1722. Nach diesen Anfangsgründen sind mehrere gefolgt, als von Trevigar, 1731; John Müller, 1735; Richard Jack, 1742; Robert Simson, erste Ausg. 1735; zweyte vermehrte u. verbesserte, 1750; Campbell, 1755; Samuel Vince, 1781; Hutton, 1787; Abraham Robertson, 1792; Steel; Hamilton, und vermuthlich noch mehrere. Man setze dazu noch eine Abhandlung von Jones in den Philos. Transf. for 1773, worin die Eigenschaften der Kegelschnitte nach einer sehr kurzen Methode entwickelt werden. Die von Simson, einem der größten Kenner der alten Geometrie, verfaßten Anfangsgründe rühmt Büsch als sehr vollständig und deutlich (Encykl. der mathem. Wissensch. S. 87); Huttons Abhandlung nennt Montucla ein Muster von Präcision und Klarheit; die von Hamil-

Digitized by Google

ton zeichnet Hutton, in einer Anzeige von den Schriften dieser Gattung als eine elegante aus. — In Newtons Principien der Naturwissenschaft, dem ersten Buche, sind manche schöne Sätze über die Construction der Kegelschnitte, die durch gegebene Puncte gehen, oder gegebene gerade Linien berühren sollen.

In Deutschland ist wenig über die Kegelschnitte geschrieben worden, außer dem was in unsern Lehrbüchern vorkommt. Nur als Beweis der Aufmerksamkeit auf diese Lehre mag dienen, daß Bramers Apollonius Cattus oder Geometrischer Wegweiser, dessen erster Theil eine Abhandlung über die Kegelschnitte enthält, drey Auflagen gehabt hat, von den J. 1634, 1646, 1684. — Eine kurze, durch manches eigenthümliche in der Methode sich auszeichnende, ganz geometrische Abhandlung von Hausen, in seinen Elementis Matheseos, P. I. ist wegen ihrer Reichhaltigkeit und zur Übung in schwerern geometrischen Vergleichungen zu empfehlen. In den Actis Erud. Supplem. T. VIII. p. 435. wird angeführt, daß Hausen eine Schrift von Guido Grandi über die Kegelschnitte ins Lateinische übersetzt habe, um sie mit seinen lectionibus geometricis nächstens herauszugeben, doch mit einigen Abänderungen in der Bezeichnung, und Vertauschung der Methode des Untheilbaren gegen eine bessere. Hausen selbst erwähnt diesen Umstand nicht. — Nach der analytisch-trigonometrischen Methode sind die Kegelschnitte am ausführlichsten behandelt in Tempelhoffs Analysis des Unendlichen, S. 1—115. In der Folge kommen noch einzelne Anwendungen der Differentialrechnung vor. Ferner von Karsten in dem 7ten Theile seines Lehrbegriffs der Mathematik, bey der Lehre von den Projectionen, S. 502—640, wozu noch der V. Abschnitt in dem II. Theile 2ter Abtheil. zu nehmen ist. Zum Commentar über Kästners Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten ist bestimmt *Rüdigeri* specimen analyticum de lineis secundi ordinis, Lipsiae 1784. 4. — Nach einer gemischten geometrisch-algebraischen Methode zum ersten Unterrichte ist abgefaßt: De sectio-

Digitized by Google

nibus conicis tractatus analyticus, authore *Placido Heinrich*, Ingolstadii 1797. 343 pag. 8.

Die Methoden in der Lehre von den Kegelschnitten sind dreyerley. Die erste ist die reine geometrische der Alten, mit welcher man sich bekannt machen muß, sobald man die Anfangsgründe nach Euklides gefaßt hat. Die zweyte ist die geometrisch-algebraische, welche die Relationen der in den drey Curven gezogenen geraden Linien durch Gleichungen ausdruckt, und aus diesen durch Rechnung, mit Zuziehung geometrischer Constructionen, neue Sätze und die Auflösungen der Aufgaben herleitet. Die dritte ist die analytisch-trigonometrische, welche Euler überhaupt in die Geometrie mit so großem Vortheil eingeführt, und auch bey den Kegelschnitten auf eine sehr bequeme und abkürzende Art angewandt hat, in der Introd. in Anal. Infin. T. II. Cap. V. VI. Die trigonometrischen (oder goniometrischen) Formeln ersparen durch die Verhältnisse der Linien, welche sie in sich schließen, die geometrischen Constructionen, welche man sonst für jeden Fall suchen müßte. Die ganze Behandlung wird einförmiger, und gewährt dadurch eine faßlichere Übersicht. Euler fängt mit der allgemeinsten Gleichung für alle Kegelschnitte an, und leitet daraus sehr kurz ihre gemeinschaftlichen Eigenschaften her. Dann entwickelt er aus den besondern Formen jener Gleichung ihre besondern Eigenschaften. Von dieser Methode wird in dem Artikel, Krumme Linien der ersten Classe, ein Abriß gegeben werden. Man kann auch mit den einfachsten Gleichungen für jeden der drey Kegelschnitte anfangen, und von diesen zu den mehr zusammengesetzten gehen. In den Artikeln, Ellipse und Hyperbel, sind nur die einfachsten Gleichungen, in welchen die Abscissenlinie ein Durchmesser ist, betrachtet, woraus aber durch Hülfe der goniometrischen Formeln viele merkwürdige Eigenschaften entwickelt sind.

Keplers Aufgabe ist folgende: Die Fläche eines Halbkreises aus einem gegebenen Puncte des Durchmessers nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen. So trägt

Digitized by Google

er sie in den Commentariis de Stella Martis, p. 300 vor, und setzt hinzu, er glaube, sie könne a priori (das ist directe) nicht aufgelöset werden, wegen der Heterogeneität der Winkel und ihrer Sinus. Wer ihn eines andern belehren könnte, würde ihm magnus Apollonius seyn. Auch weiß er kein anderes Mittel, als daß man Tafeln für die mittlern Anomalien berechnen solle, um daraus wieder die wahren herzuleiten. Er ward auf diese Aufgabe durch seine Theorie von dem Laufe der Planeten geleitet. Die Flächenräume der elliptischen Bahnen um die Sonne in dem einen Brennpuncte sind den Zeiten proportional, in welchen die zugehörigen Bogen beschrieben, oder die Radien nach der Sonne darüber hingeführt werden. Soll nun aus der von dem Durchgange durch das Aphelium oder durch das Perihelium verflossenen Zeit der Ort des Planeten bestimmt werden, so muß die elliptische Fläche nach dem Verhältniß der gegebenen Zeit zu der Umlaufszeit eingetheilt werden. Kann man die Aufgabe für den Kreis auflösen, so ist sie auch für eine Ellipse auflösbar.

1. Es ist AMB (Fig. 8.) ein Halbkreis, dessen Durchmesser AB, Mittelpunct C ist. Ein gegebener Punct des Durchmessers ist D. Aus diesem soll die gerade DM an den Umfang M so gezogen werden, daß die Area ADM zu der Fläche des Halbkreises irgend ein gegebenes Verhältniß habe.

Man ziehe CM, und fälle von D auf die verlängerte MC die senkrechte DE, so ist der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{2}$ CM $\times$ DE, und des Sectors ACM $= \frac{1}{2}$ AC $\times$ AM, da die der halben Kreisfläche $= \frac{1}{2}$ AC $\times$ AMB ist. Das gegebene Verhältniß der letztern zu der Area ADM sey $=$ m : n, so ist

$$AC \times AM + CM \times DE : AC \times AMB = m : n,$$

das ist

$$AM + DE : AMB = m : n.$$

Man setze AC $= 1$; DC $= e$, W. ACM $= \psi$, so ist $\psi + e \sin \psi : \pi = m : n$. Da ψ jeden Werth haben

Digitized by Google

kann, so ist das Verhältniß m : n mit dem Winkel ψ veränderlich. Darum setze man statt jener Bezeichnung diese, $\omega : \pi$, so daß nun die Gleichung sey

$$\omega = \psi + e \sin \psi.$$

2. Ist hier ψ gegeben, so findet man ω sogleich, es sey in Theilen des Halbmessers als der Einheit, wenn nämlich ψ in solchen Theilen ausgedruckt ist, oder in Gradtheilen, wenn $e \sin \psi$ in solche verwandelt worden ist. Die Verwandlung lehrt der Artikel, Cyklometrie, Th. I. S. 643. Der Bogen, welcher dem Halbmesser gleich ist, hält 57°,2957795 ... oder 206264″,8 .. wovon der Logarithme ist 5,3144251.

3. Ist aber ω gegeben, so läßt sich ψ, wie Kepler ganz recht geschlossen hatte, nicht algebraisch finden, sondern nur durch eine ins Unendliche fortlaufende Reihe, oder durch fortgesetzte Verbesserung der beynahe richtigen Werthe, wie bey der Auflösung numerischer Gleichungen in dem Artikel, Gleichung, 234 ff. geschehen ist.

4. Diese letztere Art wollen wir zuerst vornehmen. Newton hat sie zur Auflösung unserer Gleichung gebraucht. Principia Philos. nat. L. I. Schol. Prop. 31. Man habe zuerst, wenn ω in Gradtheilen gegeben ist, diesen Winkel in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedruckt. Nun setze man $\psi = \omega - u$, so ist zufolge der Gleichung in (1)

$$\omega = \omega - u + e \sin (\omega - u),$$

das ist

$$u = e \sin \omega . \cos u - e \cos \omega . \sin u.$$

Da u als klein vorausgesetzt wird, so ist nahe $\cos u = 1$ und $\sin u = u$, so daß beynahe ist

$$u = \frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega}.$$

Man setze $\frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega} = \alpha$, und $\psi = \omega - \alpha + u'$, so ist

Digitized by Google

$\omega = \omega - \alpha + u' + e \sin(\omega - \alpha + u')$,
und auf gleiche Art wie vorher

$$u' = \frac{\alpha - e \sin(\omega - \alpha)}{1 + e \cos(\omega - \alpha)} \text{ beynahe.}$$

Weiter sey dieser genäherte Werth $= \beta$, und $\psi = \omega - \alpha + \beta + u''$, so ist

$\omega = \omega - \alpha + \beta + u'' + e \sin(\omega - \alpha + \beta + u'')$,
und daraus

$$u'' = \frac{\alpha - \beta - e \sin(\omega - \alpha + \beta)}{1 + e \cos(\omega - \alpha + \beta)} \text{ beynahe.}$$

Dieser genäherte Werth sey $= \gamma$, und $\psi = \omega - \alpha + \beta + \gamma + u'''$, so ist

$$u''' = \frac{\alpha - \beta - \gamma - e \sin(\omega - \alpha + \beta + \gamma)}{1 + e \cos(\omega - \alpha + \beta + \gamma)} \text{ beynahe.}$$

Solchergestalt läßt sich eine Ergänzung nach der andern finden, bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit.

5. Als Beyspiel eines schweren Falles diene die Bahn des Merkurs, deren große Axe der Durchmesser AB des Halbkreises AMB, und deren Excentricität CD ist. Die mittlere Anomalie sey $= 60°$ von dem Aphelium an gerechnet. Also muß die Area ADM sich zu der Area des Halbkreises verhalten wie 60 : 180. Es ist AC $= 38710$, und CD $= 7955$, wenn die halbe Axe der Erdbahn $= 100000$ ist. Daher ist $e = \frac{7955}{38710}$. Die Rechnung ist folgende, worin zur Abkürzung $\omega - \alpha = A$; $\omega - \alpha + \beta = B$; $\omega - \alpha + \beta + \gamma = C$ gesetzt ist.

Digitized by Google

l 7955 = 3,9006402	
l 38710 = 4,5878232	e = 0,205502
l e = 9,3128170	ω = 60°
l sin ω = 9,9375306	= 1,0471975
l cos ω = 9,6989700	
l e sin ω = 9,2503476	e cos ω = 0,1027512
l e cos ω = 9,0117870	1 + e cos ω = 1,1027512
l 1,102.. = 0,0424778	α = 0,1613875
l α = 9,2078698	α = 9° 14′ 48″
l sin A = 9,8889818	A = 50° 45′ 12″
l cos A = 9,8011705	e sin A = 0,1591473
l e sin A = 9,2017988	α — e sin A = 0,0022402
l e cos A = 9,1139875	e cos A = 0,1300132
l 0,002.. = 7,3502868	1 + e cos A = 1,1300132
l 1,13.. = 0,0530834	β = 0,0019824
l β = 7,2972034	β = 0° 6′ 49″
l sin B = 9,8896839	B = 50° 52′ 1″
l cos B = 9,8001143	α — β = 0,1594051
l e sin B = 9,2025009	e sin B = 0,1594046
l e cos B = 9,1129313	e cos B = 0,1296974
	α — β — e sin B
	= 0,0000005
	1 + e cos B = 1,1296974
	γ = 0,0000002

Die Ergänzung beträgt nur $\frac{1}{10}$ Secunde. Es genügt also selbst bey der so beträchtlichen Excentricität der Bahn des Merkurs, und bey einer großen mittlern Anomalie die zweyte Ergänzung.

6. Die Rechnung wird sehr erleichtert, wenn in den Nennern der Brüche der zweyte Theil weggelassen wird, da der größte Werth desselben nur der Excentricität

Digitized by Google

nimmt, doch wird man nun eine oder zwey Ergän-
mehr zu berechnen haben. Setzt man

$$e \sin \omega = \alpha,$$

$$\omega - e \sin(\omega - \alpha) = \beta,$$

$$\alpha - \beta - e \sin(\omega - \alpha + \beta) = \gamma,$$

$$\beta - \gamma - e \sin(\omega - \alpha + \beta + \gamma) = \delta,$$

, so sind die successiven sich annähernden Werthe
diese:

$$\omega - \alpha,$$

$$\omega - \alpha + \beta,$$

$$\omega - \alpha + \beta + \gamma,$$

$$\omega - \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

f.

7. Diese Auflösung der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$
t Euler vor in dem 12ten Bande der ältern Peters-
r Commentarien, S. 119. Fuß in Petersburg hat
r an sie erinnert in den Novis Actis Ac. Petrop.
I. p. 302. auch daselbst ein Beyspiel an der Bahn
lerkurs gegeben, wo $\omega = 86° 26' 11''$ ist. Es sind
emselben vier einzelne Rechnungen zu machen. Sie
nach der Reihe folgende Werthe für ψ.

$74° 26' 4''$. II. $74° 50' 26''$

$74° 49' 7''$. IV. $74° 49' 11''$.

letztere genügt genau der Gleichung $\psi = \omega - e \sin \psi$.
Excentricität ist dabey $= 0{,}20563$ gesetzt. Von den
ithmen sind nur 5 Ziffern in der Mantissa genom-
, eine Abkürzung, die man oft machen darf. Das
ahren ist in der That das abgekürzte Newtonische
ler giebt es nicht als neu an.

Die hier geführte Rechnung ist zugleich ein gutes
spiel einer Annäherungsmethode.

erwandlung des Unterschiedes $\omega - \psi$ in eine Reihe.

8. Es sey, wie vorher, $e \sin \psi = u$, so daß
$= \omega - u$. Also ist $\sin \psi = \sin(\omega - u) =$

$\sin\omega.\cos u - \cos\omega.\sin u$. Verwandelt man $\sin u$ und $\cos u$ in eine Reihe nach Cyklometrie, 5 u. 6, so ist

$$e\sin\psi = e\sin\omega\left(1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{720}u^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- e\cos\omega\left(u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 - \frac{1}{5040}u^7 + \text{etc.}\right)$$

Zur Abkürzung setze man $e\sin\omega = p$, und $e\cos\omega = q$, so ist, da $e\sin\psi = u$ ist, die nach den Potenzen von u geordnete Reihe (M):

$$0 = p - (1+q)u - \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{6}qu^3 + \frac{1}{24}pu^4$$
$$- \frac{1}{120}qu^5 - \frac{1}{720}pu^6 + \frac{1}{5040}qu^7 + \text{etc.}$$

9. Diese Gleichung ist eigentlich eine unbestimmte zwischen den veränderlichen u und den beiden von einander abhängigen p und q. Wollte man aus dieser u durch p oder q, mittelst einer nach ihren Potenzen geordneten Reihe, ausdrucken, nach dem in dem Artikel, Function, 41 ff. gelehrten Verfahren, so müßte die eine jener Größen durch die andere vorher entwickelt seyn. Man kann aber auch die Gleichung (M) als eine bestimmte betrachten, worin p und q gegebene Größen sind. Nun nehme man, nach dem in dem Artikel, combinatorische Analysis, 9, vorläufig angezeigten Verfahren, für u eine nach Potenzen von p geordnete Reihe, setze diese in der Reihe (M) für die Potenzen von u, und lasse die Coefficienten jeder Potenz von p Null seyn, so ergeben sich die Gleichungen für die Coefficienten in der für u angenommenen Reihe. Es zeigt sich gleich, daß die Reihe für u diese Gestalt haben müsse:

$$u = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \text{etc.}$$

Dieses rührt daher, daß in der Gleichung (M) ein Glied um das andere den Factor p enthält, so daß die Potenzen

Digitized by Google

reihen jede mit einer ungeraden Potenz von u anfangen. Die Rechnung ist zu lang, um hier eingerückt zu werden. Auch erfordert sie bloße mechanische Entwicklung und Zusammenstellung. Es ist, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird $1+q=n$,

$$A=\frac{1}{n};\quad B=-\frac{1}{2n^3}+\frac{q}{6n^4};$$

$$C=+\frac{13}{24n^5}-\frac{51q}{120n^6}+\frac{q^2}{12n^7}.$$

Die folgenden Coefficienten sind zu sehr zusammen gesetzt, als daß sie brauchbar wären. Da p^7 eine hohe Potenz von $e \sin \omega$ ist, so ist es sehr klein. Mit Weglassung der Theile, die q enthalten, ist $D=-\frac{19}{72n^7}$.

10. Keil lehrt dieses Verfahren, aber in einer ganz andern Form, in der Introductio ad veram Astronomiam, Lectio XXIV. Er wirft am Ende in dem Coefficienten C etwas weg, ohne daß man sieht, warum. Die Reversionsmethode, der er sich nach Newton bedient, mußte auch weiter verfolgt werden, um den Coefficienten so vollständig als er hier angegeben ist, zu finden. Diese Methode besteht darin, daß der Werth von u stückweise gefunden, und folgeweise für u in die Gleichung gesetzt wird.

11. Eine Formel für den Unterschied der mittlern Anomalie und der Anomalia excentri, die nach den Sinus der Vielfachen von ω geordnet ist, habe ich in dem astronomischen Jahrbuche für 1791, S. 191. mitgetheilt. Sie wird folgendergestalt gefunden.

I. In der vorher für $e \sin \psi$ oder u gefundenen Doppelreihe setze man

$$u=Ap-Bp^2+Cp^3-Dp^4+Ep^5+\text{etc.}$$

und lasse diejenigen Coefficienten, die in dieser Reihe, und ihrem durch die Substitution gefundenen Werthe zu einerley Potenz von e gehören, gleich-seyn, so erhält man fol-

Digitized by Google

gende Gleichungen für die unbekannten A, B, C,

$$A = \sin\omega.$$

$$B = A\cos\omega.$$

$$C = B\cos\omega - \frac{1}{2}A^2\sin\omega.$$

$$D = (C - \frac{1}{6}A^3)\cos\omega - AB\sin\omega.$$

$$E = (D - \frac{1}{2}A^2B)\cos\omega - (\frac{1}{2}B^2 + AC - \frac{1}{24}A^4)\sin\omega.$$

$$F = (E - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}A^2C + \frac{1}{120}A^5)\cos\omega - (AD + BC - \frac{1}{6}A^3B)\sin\omega.$$

u. s. f.

II. Man bemerkt hier leicht, daß die Summe der Stellenzahlen der Factoren in den Gliedern jedes Coefficienten der Stellenzahl desselben weniger Eins gleich ist; auch daß die Producte nach allen Zusammensetzungen der Factoren aus den Stellenzahlen gemacht sind. In dem ersten Theile mit dem Factor $\cos\omega$ ist die Anzahl der Factoren ungerade, in dem zweyten Theile mit dem Factor $\sin\omega$, gerade. Wo eine Potenz in einem Gliede vorkommt, wird das Product der Zahlen, 1, 2, 3, etc. bis zu dem Exponenten der Potenz als Divisor genommen. Wie die Vorzeichen wechseln, sieht man aus den hier angegebenen Coefficienten, allgemeiner aus dem entwickelten Werthe von u.

III. Nun drucke man die Coefficienten erstlich in den durch Potenzen von $\sin\omega$ aus, wozu in den Coefficienten der geraden Stellen noch $\cos\omega$ als Factor kommt. Die Potenzen von $\sin\omega$, die alle ungerade sind, verwandle man in Sinus der Vielfachen von ω, nach Genioms-

Digitized by Google

wie, 137; und die Producte aus dem Sinus eines Vielfachen in cos ω löse man nach 27. daſ. in zwey Sinus auf. So erhält man durch eine für die vom Anfang entfernten Coefficienten etwas lange Rechnung folgende Formeln:

$$A = \sin\omega.$$

$$B = \frac{1}{2}\sin 2\omega.$$

$$C = -\frac{3}{8}\sin 3\omega - \frac{1}{8}\sin\omega.$$

$$D = \frac{1}{3}\sin 4\omega - \frac{1}{6}\sin 2\omega.$$

$$E = \frac{125}{384}\sin 5\omega - \frac{27}{128}\sin 3\omega + \frac{1}{192}\sin\omega.$$

$$F = \frac{27}{80}\sin 6\omega - \frac{4}{15}\sin 4\omega + \frac{1}{48}\sin 2\omega.$$

u. s. f.

IV. Ordnet man nun die Reihe für u nach den Vielfachen des Winkels ω, so ist die Anomalie des excentrischen Kreises:

$$\psi = \omega - (e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5)\sin\omega$$
$$+ (\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6)\sin 2\omega$$
$$- (\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5)\sin 3\omega$$
$$+ (\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6)\sin 4\omega$$
$$- \frac{125}{384}e^5\sin 5\omega$$
$$+ \frac{27}{80}e^6\sin 6\omega - \text{etc.}$$

Digitized by Google

In dem astron. Jahrb. S. 193 ist durch einen Schreibfehler in dem letzten Gliede $\frac{27}{128}$ statt $\frac{27}{80}$ gesetzt.

12. Eben diese Formel für u oder $\omega - \psi$, aber nach den Potenzen von e geordnet, ist in dem Artikel, la Grange's Lehrsatz, 15, als Beyspiel, durch Hülfe dieses Lehrsatzes gefunden worden. (Es muß daselbst vor dem Gliede mit der Potenz e^4 statt + gesetzt werden —).

13. Die Formel ist wegen ihrer Leichtigkeit in der Anwendung brauchbar, da man nur ein für allemahl die Coefficienten von den Sinus der Vielfachen des Winkels w berechnet zu haben braucht. Für die Bahn des Merkurs ist vorher gefunden $\log e = 9{,}3128170$; daher ist

$e = 0{,}2055025$; $e^2 = 0{,}0422312$
$e^3 = 0{,}0086786$; $e^4 = 0{,}0017835$
$e^5 = 0{,}0003665$; $e^6 = 0{,}0000753$

und so ist, wenn die höhern Potenzen von e über die sechste hinaus weggelassen werden,

$$\begin{aligned}\psi = \omega &- 0{,}204420 \cdot \sin \omega \\ &+ 0{,}020820 \cdot \sin 2\omega \\ &- 0{,}003177 \cdot \sin 3\omega \\ &+ 0{,}000574 \cdot \sin 4\omega \\ &- 0{,}000119 \cdot \sin 5\omega \\ &+ 0{,}000025 \cdot \sin 6\omega \\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

Eine oder zwey Ziffern dieser Coefficienten, die letzten, könnten unrichtig seyn, da noch $e^7 = 0{,}0000155$ und $e^8 = 0{,}0000032$ ist, wobey es aber zugleich auf ihre Divisoren ankommt.

14. Wenn man, wie es in der rechnenden Astronomie nöthig ist, die Coefficienten durch Bogensecunden ausdrucken will, so müssen sie durch die Anzahl der Secunden in dem Bogen, der dem Halbmesser (= 1) gleich ist,

Digitized by Google

multiplicirt werden. Diese Zahl ist 206264,8 wovon der Logarithme ist 5,3144251 (Cyklometrie, Th. I. S. 643.).

Dadurch wird

$$\begin{aligned}\psi = \omega &- 42164'',6 \sin\omega\\ &+ 4294'',4 \sin 2\omega\\ &- 655'',3 \sin 3\omega\\ &+ 118'',5 \sin 4\omega\\ &- 24'',6 \sin 5\omega\\ &+ 5'',2 \sin 6\omega\\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

Man muß hiebey wohl bemerken, daß die Sinus der Winkel, welche die Form $(2n+1)\pi+\varphi$ haben, negativ sind. (Goniometrie, 16.).

Anzeige einiger andern Methoden, diese Aufgabe aufzulösen.

15. Wallis gebrauchte die gedehnte Cykloide (Th. I. S. 610.), um durch ihre Coordinaten den Punct des Kreises zu bestimmen, durch welchen die Theilungslinie geht. Dieser Kreis ist der erzeugende Kreis der Cykloide; die Basis derselben ist der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser die dritte Proportionale zu der Excentricität und dem Halbmesser jenes Kreises ist. Tractatus de Cycloide, Opp. T. I. p. 540. Hermann gebrauchte in den Commentt. Acad. Petrop. T. I. a. a. 1726. p. 144. auf gleiche Art die Quadratrix des Tschirnhausen eine Curve, die sich ziemlich leicht durch eine Anzahl einzelner Puncte zeichnen läßt. Allein dieses sind geometrische Künsteleyen, die der Astronom gar nicht gebrauchen kann. Die gedehnte Cykloide hat schon, wie Hermann anzeigt, Wren in England vor Wallis angewandt, welches dieser aber nicht bemerkt.

16. Hermann giebt a. a. O. noch ein Verfahren an, welches zur astronomischen Rechnung bequemer ist, als jenes. Es ist ANB (Fig. 9.) ein Halbkreis,

Digitized by Google

der von dem Puncte D des Durchmessers AB aus durch die gerade DM nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden soll. Man nehme den Bogen AN zu dem Halbkreise ANB in dem gegebenen Verhältnisse des Sectors ADM zur Fläche des Halbkreises, ziehe DN, und mit dieser parallel die CP aus dem Mittelpuncte C, dann noch CN und DP. Der Unterschied der beiden excentrischen Sectoren ADM, ADP ist das Kreissegment NMP, so daß man in vielen Fällen den Sector ADP statt des wahren ADM setzen kann. Denn es ist erstlich Sect. ACN = Sect. ADM, weil beide zu dem Halbkreise dasselbe Verhältniß haben. Ferner besteht der Sector ACN aus drey Theilen, dem Sector ACP, dem Dreyeck PCN und dem Kreisabschnitte NMP. Der excentrische Sector ADM besteht auch aus drey Theilen, dem Sector ACP, dem Dreyeck PCD, und dem excentrischen Sector PDM. Die Dreyecke PCN und PCD sind sich gleich, weil sie über derselben Grundlinie PC zwischen denselben Parallelen liegen; also ist der Abschnitt NMP dem Ausschnitt PDM gleich. Aus dieser Gleichheit muß der Winkel PDM hergeleitet werden, welches aber nur näherungsweise geschehen kann. Dazu ist es nöthig, den Winkel NCP und die gerade PD zu kennen.

In dem Dreyeck NCD werden durch die Seiten CN, CD nebst dem W. NCD, dem Nebenwinkel von dem gegebenen ACN (der mittlern Anomalie), die Winkel CDN und CND bekannt. Der W. CND ist gleich dem NCP. Der W. CDN ist gleich dem ACP. In dem Dreyeck PCD wird aus den Seiten CP, CD, und dem W. PCD, dem Nebenwinkel von ACP, die Seite PD nebst den beiden Winkeln CDP, CPD gefunden.

Der Kreisabschnitt NMP ist $= \frac{1}{2}$ CN² (Ang. NCP — sin NCP), wo Ang. NCP der zugehörige Bogen mit dem Halbmesser als Einheit beschrieben ist, und sin NCP der Sinus für eben diesen Halbmesser ist. So fern DP und DM wenig verschieden sind, ist nahe Sect. PDM $= \frac{1}{2}$ PD² × Ang PDM.

Digitized by Google

Folglich ist nahe

$$CN^3(\text{Ang. NCP} - \text{sin NCP}) = PD^3 \times \text{Ang PDM},$$

und daraus nahe

$$\text{Ang. PDM} = \frac{CN^3(\text{Ang. NCP} - \text{sin NCP})}{PD^3}.$$

Dieser Winkel zu dem vorher schon gefundenen ADP addirt giebt die verlangte Theilungslinie DM. Der W. PDM wird hier in Theilen des Halbmessers als Einheit gefunden. Wenn NCP unter 2° ist, so ist der W. PDM kleiner als 1,5 Secunde. Denn der Unterschied zwischen einem Bogen 2° und seinem Sinus beträgt 0,0000071 für den Halbmesser als Einheit, d. i. 1″.5.

17. Diese Methode, welche hier deutlicher und vollständiger als von Hermann vorgetragen ist, kommt fast mit der von Cassini in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1719., und in den Elémens d'Astronomie, p. 141 vorgetragenen überein. Nur wird nach der letztern der Quotient $\frac{CN}{PD}$ statt $\frac{CN^3}{PD^3}$ gesetzt. Die Cassinische Auflösung hat auch la Lande in seiner Astronomie §. 1247. aufgenommen.

18. David Gregory in seinen Elementis Astronomiae, pag. 316, sucht die Sagitta oder den Sinus versus des Bogens AM durch eine Reihe, die aber oft langsam oder gar nicht convergiren mag.

19. Thomas Simpson in seinen Essays on several subjects in Mathematicks, Lond. 1740. trägt eine Annäherungsmethode vor, die mit der Newtonischen übereinkommt, und hier durch eine geometrische Construction versinnlicht wird. Die Fehler der vorläufig angenommenen Anomalie, und ihres Sinus und Cosinus werden gezeichnet.

20. Jeaurat gebrauchte die cyklometrischen Formeln zur Auflösung der Gleichung, $\omega = \psi + e \sin \psi$, indem er die Winkel ω und ψ durch Potenzen ihrer Sinus ausdruckt, und daraus sowohl $\sin \psi$ als $\cos \psi$ durch eine Reihe nach Potenzen von $\sin \omega$ darstellt. Hieraus wer-

Digitized by Google

den die Coordinaten an der Ellipse hergeleitet, von welchen die auf der Axe zum Anfang den einen Brennpunct hat. Durch diese gelangt er zu einem Ausdruck für die Tangente der wahren Anomalie, und von diesem zu einer Reihe für die Anomalie selbst. Die Reihe erstreckt sich bis zu der sechsten Potenz von e. Auch findet er eine Reihe für den Abstand eines Punctes der Ellipse von dem gegebenen Brennpuncte durch Cosinus der Vielfachen von ω, welche bis zur siebenten Potenz von e geht. Doch ist dieses Verfahren mühsam. S. Mémoires présentés à l'Acad. des Sc. T. IV. 1763. p. 524 u. 661.

21. Früher hatte schon Clairaut in der Théorie de la Lune auch eine Formel für die wahre Anomalie durch die mittlere gegeben, ohne ihre Herleitung. Diese hat la Lande mitgetheilt in der ersten Ausgabe seiner Astronomie, §. 2686—2690. Sie ist rein analytisch, ohne Zuziehung eines excentrischen Kreises, indem die mittlere Anomalie durch die wahre mittelst der Integration gefunden wird, und daraus durch Umkehrung der Reihe die wahre Anomalie durch die mittlere. Da auch diese Methode zu mühsam ist, so hat la Lande in der dritten Ausgabe seiner Astronomie, §. 3483. statt derselben die von Cagnoli in seiner Trigonometrie angewandte aufgenommen.

22. Von la Grange ist eine sehr wichtige Abhandlung über die Keplerische Aufgabe in den Mém. de l'Acad. de Berl. a. 1769. Er gebraucht sie zum Beyspiele der Anwendung seiner wichtigen Verwandlungsformel.

23. Bossut hat in den Mém. de l'Acad. de Sc. a. 1777., und daraus in seinen Traités du calc. diff. et integral. T. I. §. 529 eine Methode angegeben, aus der Differentialformel für die mittlere Anomalie durch die wahre diese durch jene herzuleiten, wobey er sich einer Reihe mit unbestimmten Coefficienten bedient, und die ungeraden successiven Differentialquotienten anwendet.

24. In der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes, par de la *Place*,

Digitized by Google

rt. XI. ist noch eine feine Herleitung der wahren Anomalie aus der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$ anzutreffen.

25. Aus dieser Gleichung hat auch Du Séjour nach einem andern, aber nicht so bequemen Verfahren, eine Formel für die wahre Anomalie durch die mittlere hergeleitet, in dem Traité des mouvemens apparens des corps célestes, T. II. §. 431.

Eine neue Auflösung der Aufgabe über die Relation zwischen wahrer und mittlerer Anomalie, die zugleich bequem und sehr scharf ist, hat derselbe, in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1790. geliefert.

26. Wie aus der Theilung der Kreisfläche die Theilung einer Ellipse, deren große Axe dem Durchmesser des Kreises gleich ist, hergeleitet wird, welches die Veranlassung zu der Aufgabe von der Theilung jener war, das ist in dem Artikel, la Grange's Lehrsatz, 20—23, gezeigt. Eben daselbst, 19, ist eine Reihe für die wahre Anomalie in der Ellipse, oder den Winkel der Theilungslinie aus dem einen Brennpuncte mit der großen Axe von dem entferntesten Scheitelpuncte an, gefunden worden.

Kettenbruch, oder zusammenhängender, fortlaufender, continuirlicher Bruch (fractio continua), ist eine eigene Form eines Bruchs, worin der Nenner aus einer ganzen Zahl nebst einem Bruche besteht, der Nenner dieses Bruchs wiederum nebst der ganzen Zahl einen Bruch enthält, dessen Nenner wieder auf dieselbe Art zusammengesetzt ist, es mag nun diese Verkettung ohne Ende fortgehen, oder irgendwo abbrechen. Die Zähler dieser verketteten Brüche sind ganze Zahlen, häufig die Einheit, z. B.

$$\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7+\frac{8}{9+\text{etc.}}}}} \qquad \frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{7}}}}$$

Die Querstriche der Brüche pflegen auch über den nächsten Bruch mit gezogen zu werden. Um das Vorzeichen + vor den Querstrich, wie in andern Fällen, zu bringen, sind

Digitized by Google

hier die Querstriche nur über den ersten Theil der Nenner gezogen, wie es auch nicht ungewöhnlich ist.

Die Kettenbrüche dienen, theils numerische Brüche, rationale und irrationale, auf eine möglichst genaue Art abzukürzen, theils auch allgemeine analytische Ausdrücke zur genauern Berechnung geschickt zu machen. Bey der letztern Anwendung werden die Zähler und Nenner der partiellen Brüche oft selbst gebrochne Ausdrücke.

1. Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Kettenbruch verwandelt durch die Anwendung derselben Rechnung, wodurch der größte gemeinschaftliche Theiler zweyer Zahlen gefunden wird. Die Quotienten, welche zu diesem letztern Zwecke nicht gebraucht werden, sind hier die ganzen Theile des Nenners, und die Zähler sind durchgehends $= 1$. Es sey z. B. der Bruch $\frac{405}{889}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, so ist der Bruch $= \frac{1}{2 + \frac{79}{405}}$. Mit dem Bruche, $\frac{79}{405}$, verfährt man auf dieselbe Art; er ist $\frac{1}{5 + \frac{10}{79}}$. Der Bruch $\frac{10}{79}$ ist $\frac{1}{7 + \frac{9}{10}}$; der Bruch $\frac{9}{10}$ ist $= \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}$. Alle die Brüche an einander gehängt, geben den Kettenbruch

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9}.$$

2. Ein Kettenbruch oder ein Stück desselben bis zu einem der ergänzenden Brüche wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wenn man den letzten gemischten

Digitized by Google

Nenner auf die gemeine Bruchform bringt, darauf den neuen gemischten Nenner eben so behandelt, und so fortfährt bis zu dem ersten oder obersten partiellen Bruche. Aus dem vorher angegebenen Kettenbruche entstehen solchergestalt die Brüche,

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{36}{79}, \frac{41}{90}, \frac{405}{889},$$

von welchen der erste und dritte zu groß, der zweyte und vierte zu klein sind, der letzte den vollständigen Werth angiebt. Dieses gründet sich darauf, daß ein Bruch durch Vergrößerung des Nenners kleiner, und durch Verminderung desselben größer wird. Daher ist in dem Beyspiele, und so auch in jedem andern Falle der erste Werth des Kettenbruchs $\frac{1}{2}$ zu groß, weil der Nenner zu klein ist. Hingegen ist der zweyte Werth $\frac{5}{11}$, zu klein, weil $\frac{1}{5}$ und also auch $2\frac{1}{5}$ zu groß ist. Setzt man zu 5 noch den Bruch $\frac{1}{7}$ hinzu, so wird $5+\frac{1}{7}$ zu groß, der Bruch $\frac{1}{5+\frac{1}{7}}$ zu klein, und der Bruch $\frac{36}{79}$ zu groß. Jeder der folgenden Brüche kommt dem vollständigen Bruche näher als der vorhergehende.

3. Es sey für lauter ganze positive Zahlen,

$$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}; \quad \frac{b}{c} = n + \frac{d}{c};$$

$$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}; \quad \frac{d}{e} = q + \frac{f}{e};$$

$$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}; \quad \frac{f}{g} = s + \frac{h}{g};$$

etc. etc.

Digitized by Google

so entsteht hieraus der Werth von $\frac{b}{a}$ in der Form des Kettenbruchs,

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s+\text{etc.}}$$

Es sind hier m, n, p, q, r, s, etc. successiv die Quotienten der Dividenden a, b, c, d, e, f, etc. durch die Divisoren b, c, d, e, f, g. etc. und die zugehörigen Reste c, d, e, f, g, h, etc.

Der uneigentliche Bruch $\frac{a}{b}$ ist

$$m + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \text{etc.}$$

4. In dem Artikel, Aufheben der Brüche, (Th. I. S. 230.) ist durch eine leichte Rechnung gefunden:

I. $mb = a - c.$

II. $(mn+1)b = na + d.$

III. $(mnp+p+m)b = (np+1)a - e.$

IV. $(mnpq+pq+mq+mn+1)b =$
$= (npq+q+n)a + f.$

u. s. f.

wo das Gesetz der Formation der Factoren zu b und a sehr deutlich erhellt.

5. Man bezeichne jene durch A, B, C, etc. diese durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. so daß

I. $Ab = \mathfrak{A}a - c$; II. $Bb = \mathfrak{B}a + d$;

III. $Cb = \mathfrak{C}a - e$; IV. $Db = \mathfrak{D}a + f$;

V. $Eb = \mathfrak{E}a - g$; VI. $Fb = \mathfrak{F}a + h$;

etc.

Digitized by Google

Hier ist

$A = m.$	$\mathfrak{A} = 1.$
$B = nA + 1.$	$\mathfrak{B} = n\mathfrak{A}.$
$C = pB + A.$	$\mathfrak{C} = p\mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$
$D = qC + B.$	$\mathfrak{D} = q\mathfrak{C} + \mathfrak{B}.$
$E = rD + C.$	$\mathfrak{E} = r\mathfrak{D} + \mathfrak{C}.$
$F = sE + D.$	$\mathfrak{F} = s\mathfrak{E} + \mathfrak{D}.$
etc.	etc.

Für die vier ersten Coefficienten zeigt es die geführte Rechnung. Es ist also

$$Db = \mathfrak{D}a + f.$$

Nun ist $fr = e - g$, also ist $rDb = r\mathfrak{D}a + e - g$.

Da $Cb = \mathfrak{C}a - e$ ist, oder $e = \mathfrak{C}a - Cb$, so ist

$$rDb + Cb = r\mathfrak{D}a + \mathfrak{C}a - g.$$

Die Vergleichung mit der Formel, V. giebt

$$E = rD + C; \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = r\mathfrak{D} + \mathfrak{C}:$$

Dieselbe Form haben nun auch F und $\mathfrak{F}$, da $gs = f - h$ dieselbe Form wie fr hat. So nun ferner für alle folgende.

6. Der Unterschied je zweyer nächsten der genäherten Werthe von $\frac{b}{a}$ hat zum Zähler die Einheit, zum Nenner das Product der beiden Nenner dieser Werthe, nämlich $\frac{\mathfrak{A}}{A} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{1}{AB}$; $\frac{\mathfrak{B}}{B} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = -\frac{1}{BC}$; $\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = +\frac{1}{CD}$, und überhaupt $\frac{\mathfrak{M}}{M} - \frac{\mathfrak{N}}{N} = \pm\frac{1}{MN}$.

Denn die Unterschiede dieser Brüche haben nach ihrer Folge, wenn sie immer in derselben Ordnung von einander abgezogen werden, die Zähler, I. $\mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}$; II. $\mathfrak{B}C - B\mathfrak{C}$; III. $\mathfrak{C}D - C\mathfrak{D}$; IV. $\mathfrak{D}E - D\mathfrak{E}$, u. s. f. Der erste dieser Zähler ist $= +1$ (aus 5.).

Digitized by Google

Setzt man in II. für C und E ihre Werthe aus (5), so verwandelt sich II. in das Entgegengesetzte von I., ist also $= -1$. Setzt man in III. für D und D ihre Werthe, so entsteht das Entgegengesetzte von II. daher dieser Zähler $= +1$ ist. Auf gleiche Weise verwandelt sich durch die Substitution der Werthe von E und E, der Zähler IV. in das Entgegengesetzte von III. Da die folgenden Zähler und Nenner alle auf gleiche Art wie die erstern gebildet werden, so erhellt der merkwürdige, und für diese Reihe von Brüchen charakteristische Satz,

7. Die Abweichungen der genäherten Brüche von den vollständigen Werthen ergeben sich aus den Formeln in (5.). Es ist

$$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{A}}{A} = -\frac{c}{Aa} \qquad \frac{a}{b} - \frac{A}{\mathfrak{A}} = +\frac{c}{\mathfrak{A}b}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = +\frac{d}{Ba} \qquad \frac{a}{b} - \frac{B}{\mathfrak{B}} = -\frac{d}{\mathfrak{B}b}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = -\frac{e}{Ca} \qquad \frac{a}{b} - \frac{C}{\mathfrak{C}} = +\frac{e}{\mathfrak{C}b}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = +\frac{f}{Da} \qquad \frac{a}{b} - \frac{D}{\mathfrak{D}} = -\frac{f}{\mathfrak{D}b}$$

u. s. f. u. s. f.

8. Hieraus erhellt erstlich unmittelbar, daß die genäherten Brüche abwechselnd größer und kleiner sind, als der genaue, welches schon in (2.) bemerkt ist. Zweytens, daß die Unterschiede derselben von dem vollständigen $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ immer kleiner werden. Denn in der Reihe der Nenner A, B, C, D, etc. oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ist jeder kleiner als die vorhergehenden, so wie auch in der Reihe c, d, e, f, etc. das ist der Reste der Divisionen von a durch b, von b durch c, von c durch d, u. s. f. jedes Glied kleiner ist als die vorhergehenden.

Digitized by Google

9. Ein Bruch in ganzen Zahlen, der zwischen zwey nächste Brüche der Reihe, $\frac{A}{A}$, $\frac{B}{B}$, $\frac{C}{C}$, etc. fällt, hat einen größern Nenner als der nachfolgende unter diesen beiden. — Denn es seyn zwey solche Brüche, $\frac{\mathfrak{M}}{M}$, $\frac{\mathfrak{N}}{N}$, und der Bruch, der zwischen ihnen liegt, $\frac{\beta}{\alpha}$. Ist $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ der größere unter jenen beiden, so ist er größer als $\frac{\beta}{\alpha}$; und der Unterschied $\frac{\mathfrak{M}}{M} - \frac{\beta}{\alpha}$, oder $\frac{\mathfrak{M}\alpha - M\beta}{M\alpha}$ kleiner als der Unterschied jener beiden Brüche, das ist, als $\frac{1}{MN}$ (6.). Es sey $\mathfrak{M}\alpha - M\beta = n$, einer ganzen Zahl, so ist $\frac{n}{M\alpha} < \frac{1}{MN}$, also $\alpha > nN$, und noch vielmehr $\alpha > N$. Ist $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ der kleinere unter den beiden Brüchen, so ist ebenfalls $\alpha > N$, da nur die Vorzeichen vertauscht werden.

10. Ein Bruch in ganzen Zahlen, welcher dem Bruche $\frac{b}{a}$ näher kommt, als einer der Brüche in der Reihe $\frac{A}{A}$, $\frac{B}{B}$, $\frac{C}{C}$, etc. hat einen größern Nenner als dieser Bruch.

Denn es sey $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ ein Bruch in dieser Reihe, und $\frac{\beta}{\alpha}$ sey weniger von $\frac{b}{a}$ verschieden, als es $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ ist.

D

Digitized by Google

Da $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ mehr verschieden von $\frac{b}{a}$ ist, als es $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ ist, so fällt $\frac{\beta}{\alpha}$ zwischen die Brüche $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ und $\frac{\mathfrak{N}}{N}$, daher ist $\alpha > N$ aus (9.).

11. Zur Erläuterung dienen folgende Zeichnungen. Es seyn

A M POPN

die Längen AM, AN zwey genäherte Brüche an den gegebenen AO, so daß NO kleiner sey als MO. Die Länge AP stelle einen Bruch vor, der näher an den durch AO abgebildeten falle, als AN demselben liegt, so fällt P nothwendig zwischen M und N, auf welcher Seite von O es auch liege, oder AP zwischen AM und AN.

Nimmt man hingegen

A M POPNP

die Länge AP näher an AO als AM derselben ist, so kann der Punct P zwar zwischen M und N auf der einen oder der andern Seite von O fallen, allein es kann auch P jenseits N liegen, sofern nur daselbst OP kleiner als OM ist. In dem letztern Falle liegt AP nicht zwischen AM und AN.

Darum konnte in dem Beweise von (10.) der Bruch $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ nicht als ein vorangehender Bruch betrachtet werden, sondern mußte ein nachfolgender seyn.

12. Aus der Reihe der annähernden Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{A}, \frac{\mathfrak{B}}{B}, \frac{\mathfrak{C}}{C}, \frac{\mathfrak{D}}{D}, \frac{\mathfrak{E}}{E}$, etc. nehme man zwey um zwey Stellen von einander abstehende, wie

Digitized by Google

$\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, oder $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{D}}{D}$. Diese sind beide größer oder beide kleiner als der völlige Werth des Kettenbruchs, wenn nicht der letzte von ihnen selbst der vollständige ist. Man suche nun den Unterschied zweyer solchen Brüche, z. B. $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, wo der erstere der größere ist, weil die Brüche in den ungeraden Stellen größer als der Werth des Kettenbruchs sind, und zugleich sich demselben nähern.

Es ist $\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} - \left(\frac{\mathfrak{E}}{E} - \frac{\mathfrak{D}}{D}\right) =$

$\frac{1}{CD} - \frac{1}{ED} = \frac{E-C}{CDE} = \frac{rD}{CDE} = \frac{r}{CE}$,

zufolge (6. u. 5.).

Ist $r = 1$, so kann zwischen $\frac{\mathfrak{C}}{C}$ und $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ kein Bruch eingeschoben werden, dessen Nenner kleiner als E wäre, zufolge des in (9.) gebrauchten Beweises. Ist aber r größer als 1, so lassen sich $r-1$ Brüche einschalten, zwischen welchen und den beiden an die äußersten liegenden, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, kein Bruch mit einem kleinern Nenner, als der Nenner des nachfolgenden unter ihnen ist, Statt findet. Es sey z. B. $r = 4$, so erhält man folgende Reihe von Brüchen, die diese Beschaffenheit haben:

$$\frac{\mathfrak{C}}{C}; \frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{D+C}; \frac{2\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{2D+C}; \frac{3\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{3D+C}; \frac{4\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{4D+C},$$

wo der letzte $= \frac{\mathfrak{E}}{E}$ ist (5.). Die Zähler der Unterschiede je zweyer nächsten sind jeder $= 1$, weil $\mathfrak{C}D - C\mathfrak{D} = 1$ ist (6.). Zwischen zwey nächsten derselben findet also kein Bruch Statt, dessen Nenner kleiner als der Nenner des nachfolgenden unter ihnen beiden wäre. Jeder der Brüche nähert sich dem Werthe des Ket-

Digitized by Google

tenbruchs mehr als der vorhergehende. Denn sie mach eine abnehmende Reihe aus, in welcher das letzte Gl dem vollen Werthe des Kettenbruchs näher kommt als d erste, daher jeder der Brüche nach der Reihe dem letz Bruche, und dadurch dem Kettenbruche selbst näher komm Die Unterschiede werden fortweg kleiner.

Alles dieses läßt sich auch auf die Reihe der Brü che anwenden, die kleiner sind, als der Werth des Ke tenbruches.

Beyspiele der Anwendung.

13. Exempel. I. Der Durchmesser eines Kreises verhält sich zu dem Umfange wie 1 : 3,141592653... (Cyklometrie, Th. I. S. 642). Um eine Reihe succes siv annähernder Verhältnisse zu erhalten, verwandle man den Bruch $\frac{3141592653...}{1000000000...}$ nach (3.) in einen Ket tenbruch, dessen erstes Glied eine ganze Zahl 3 ist,

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Hieraus ergeben sich folgende rationale Brüche, die der Richtigkeit immer näher kommen.

$$\frac{3}{1};\ \frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ \frac{103993}{33102}.$$

Hier sind die Brüche in den ungeraden Stellen zu klein, die in den geraden zu groß. Der vierte Bruch enthält das von Metius gefundene Verhältniß. Man sieht hier, wie genau es ist. Der Unterschied des Bruchs $\frac{355}{113}$ von dem genauen Werthe ist kleiner als

Digitized by Google

$\frac{1}{113 \times 33102}$, welches der Unterschied des vierten und fünften Bruchs ist. — Die weiter fortgesetzte Reihe der Brüche findet man in dem dritten Theile von Eulers Algebra, welcher der französischen Ausgabe beygefügt ist, und in der deutschen Übersetzung desselben von Kaußler S. 48. 49.

14. Exempel. II. Die Basis der natürlichen Logarithmen ist $e = 2{,}718281828459\ldots$ Die Quotienten der successiven Divisionen sind

2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, etc.

also

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1 + \text{etc.}}$$

Es wechseln in den Quotienten je zwey Einer mit den geraden Zahlen nach der Reihe ab. *Euler* in Comm. Ac. Petrop. T. IX. p. 120. Diese Quotienten geben die genäherten Brüche:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39},$$

$$\frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}; \text{ etc.}$$

15. Exempel. III. Das tropische Jahr enthält 365 T. 5 St. 48′, 48″, es wird das Verhältniß eines Tages zu einem Jahre in den kleinsten Zahlen nahe gesucht. Die Länge des Jahres ist $365\frac{20928}{86400}$ Tage. Man braucht hier nur den Überschuß in einen leichtern Bruch zu verwandeln. Der Bruch ist durch 192

Digitized by Google

verkleinerlich und ist $= \frac{109}{450}$. Dieser Bruch giebt durch die fortgesetzte Division jedes Divisors durch den zugehörigen Rest die Quotienten,

4, 7, 1, 3, 1, 2.

Daher sind die annähernden Brüche mit dem Bruche selbst

$$\frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{31}{128}; \frac{39}{161}; \frac{109}{450}.$$

In dem Julianischen Kalender ist das Jahr auf $365\frac{1}{4}$ Tage gesetzt; in dem Gregorianischen auf $365\frac{97}{400}$ Tage, da in 400 Jahren 97 Tage eingeschaltet werden. Es ist $\frac{97}{400} = \frac{109\frac{1}{8}}{450}$.

16. Exempel. IV. Der synodische Monath ist 29 T. 12 St. 44′ 2″, 8283 = 29,530588 Tage. Das tropische Jahr hält 365,242222 Tage. Der Bruch $\frac{29530588}{365242222}$ giebt die successiven Quotienten,

12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, etc.

Daher sind die annähernden Brüche,

$$\frac{1}{12}; \frac{2}{25}; \frac{3}{37}; \frac{8}{99}; \frac{11}{136}; \frac{19}{235}; \frac{334}{4131}, \text{ etc.}$$

Der Bruch $\frac{19}{235}$ giebt den Mondscyklus in der Chronologie, in welchem 235 synodische Monathe 19 Jahren gleich gesetzt werden. Er ist etwas zu klein, daher 235 Monathe sich ein weniges später endgen als 19 tropische Jahre, nämlich um 2 St. 4′ 33″.

17. Wenn einer der Quotienten m, n, p, etc. in (3.) um 1 zu groß genommen wird, so wird der Rest negativ, und der ergänzende Bruch, der aus diesem Reste

Digitized by Google

ntſteht, bekommt das Vorzeichen —. Dieſes geht den ganzen ergänzenden Bruch in allen ſeinen Theilen an. Daher bekommen dieſe das Vorzeichen +, ſo lange kein Quotient zu groß genommen wird. Der ergänzende ſubtractive Bruch iſt eben ſo wie ein unabhängiger Bruch zu behandeln. Dieſe ſubtractiven Brüche dienen die annähernden Brüche ſchneller zu finden, und einen oder mehrere Schritte zu erſparen, wenn Reſte vorkommen, die gegen den Diviſor beträchtlich ſind. Ungleichnamige Dividendus und Diviſor geben einen negativen Quotienten.

18. Exempel. I. Der Bruch $\frac{29530588}{365242222}$

in (16.) giebt mit Zuziehung negativer Reſte die Quotienten:

$$+12;\quad +3;\quad -3;\quad -2;\quad +18.$$

Daraus entſtehen nach derſelben Formation jedes Bruchs aus den beiden nächſt vorhergehenden, wie bey lauter poſitiven Quotienten, die annähernden Werthe:

$$\frac{+1}{12};\ \frac{3}{37};\ \frac{0}{-99};\ \frac{19}{235};\ \frac{334}{4131}.$$

Hier ſind aus der Rechnung (16.) zwey Brüche erſpart. Der Kettenbruch iſt

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18+\text{etc.}}$$

Man verliert hier aber den Vortheil, der bey lauter poſitiven Quotienten iſt, daß der wahre Werth des vorgegebenen Bruchs zwiſchen zwey nächſten der Folge liegt.

19. Exempel. II. Bey der Verwandlung der Baſis der natürlichen Logarithmen, $e = 2,718281828459\ldots$ (14.) in einen Kettenbruch erhält man bey Anwendung negativer Reſte die Quotienten:

Digitized by Google

$+2; +1; +3, -2, -5, +2, +7,$
$-2, -9, +2, +11, -2, -13,$ etc.

Daraus entstehen die genäherten Brüche:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{-19}{-7}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1457}{536},$$

u. s. f. Hier sind gegen die Rechnung in (14.) drey Brüche erspart. Der Kettenbruch selbst ist

$$2+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-$$

20. Es sey ein Theil eines Kettenbruchs $=$

$$r+\frac{1}{1}+\frac{1}{u},$$

wo r eine ganze Zahl, und u der ganze ergänzende Nenner ist. Dieser Theil wird durch Anwendung einer subtractiven Ergänzung $= r+1-\frac{1}{1+u}$.

Auf diese Art wird

$$r+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{u} = r+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{u},$$

indem hier $1+\frac{1}{u}$ statt u in dem vorhergehenden Bruche kommt.

Ferner ist

Digitized by Google

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{u}}}} = 1+1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+u}},$$

so ebenfalls $1+\frac{1}{u}$ anstatt des u in dem nächst vorhergehenden Bruche kommt. Setzt man hier wiederum $1+\frac{1}{u}$ anstatt u, so sind vier Nenner nach der Reihe $= 1$, und der reducirte Bruch ist

$$1+1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{u}}}.$$

21. Es sey nun allgemein der Kettenbruch

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\cfrac{\zeta}{f+\text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man folgeweise zu a, b, c, etc. die Brüche $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, etc. und verwandelt die abgeschnittenen Stücke des Kettenbruchs in gemeine Brüche, so entsteht daraus die Folge der convergirenden Brüche:

I. $\frac{\alpha}{a}$.

II. $\frac{ab}{ab+\beta}$.

III. $\frac{abc+\alpha\gamma}{abc+\beta c+a\gamma}$.

Digitized by Google

Die Winkelhaken sondern hier die Werthe der Zähler und Nenner in den convergirenden Werthen des Kettenbruchs (21.) ab, zufolge des in (22.) bemerkten Gesetzes. Jeder Zähler und Nenner stellt zugleich die Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche dar. Die zur Einsicht in die Formation der Kettenbrüche sehr dienliche Schematisirung nennt Hindenburg eine Involution, dergleichen in dem Artikel, Combination, 38. 39. vorgekommen ist. Das Schema läßt sich leicht fortsetzen. Der nächste integrirende Bruch sey $\frac{\zeta}{f}$, so setzt man einen neuen Winkelhaken 6 — 6 an, in welchem man erstlich zu den Gliedern des Winkelhakens 5 — 5 den Factor f fügt, und zweytens den Winkelhaken 4 — 4 mit dem angehängten Factor ζ darunter setzt.

25. Man bemerke, daß alle Glieder des Zählers sich mit α, dem Zähler des ersten Bruchs in dem Kettenbruche, anfangen. Vertauscht man α mit a, dem Nenner dieses Bruchs, und in den Gliedern, welche sich mit αb anfangen, αb mit β, so erhält man alle Glieder des Nenners. Da der Zähler und Nenner des nächsten sechsten Werthes aus den Zählern und Nennern der zwey nächst vorhergehenden Werthe zusammen gesetzt wird, durch Hinzufügung eines der Factoren, f, ζ, die hier rechter Hand angehängt werden, so ist die hier gemachte Bemerkung allgemein gültig.

26. Die Glieder eines ergänzenden Bruchs, wie $\frac{\gamma}{c}$, darf man durch Division mit derselben Zahl nicht ändern, weil diese Glieder nicht in allen Theilen des Zählers und Nenners des verwandelten Kettenbruchs vorkommen. Aber der Zähler und Nenner eines der ergänzenden Brüche, nebst dem Zähler des darauf folgenden Bruchs, wie γ, c, δ, dürfen mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Denn in jedem Theile des Zählers und Nenners des reducirten Kettenbruchs kommt ein einzelnes

Digitized by Google

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Anwendung auf die Algebra.

28. Die Kettenbrüche leisten gute Dienste zur Ausziehung der Quadratwurzeln, und zur Auflösung quadratischer Gleichungen. Wenn nämlich die Nenner der Elementarbrüche, wie man sie nennen mag, periodisch wiederkehren, so ist der Werth des Kettenbruchs die Wurzel einer quadratischen Gleichung. Es sey erstlich

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \text{etc.}}}}}$$

Aus dieser ins Unendliche fortgehenden Zusammensetzung derselben Brüche folgt

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + x}}.$$

Daraus ferner durch die Reduction des unreinen Bruchs,

$$xx + ax = 1,$$

und hieraus

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 1)}.$$

Die Quadratwurzeln der Zahlen von der Form, $\frac{1}{4}aa + 1$, lassen sich also durch periodische Kettenbrüche mit einem und demselben wiederkehrenden Nenner ausdrucken.

29. Es sey zweytens

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

so ist

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + x}},$$

und daraus

$$axx + abx = b.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung giebt

$$x + \tfrac{1}{2}b = V(\tfrac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}).$$

30. Eine gegebene Zahl N lasse sich in zwey Theile, $m^2 + n$, zerlegen, so daß $\frac{2m}{n} = a$ eine ganze Zahl ist, wobey der Theil n auch eine gebrochne Zahl seyn mag.

Man nehme $b = 2m$, so läßt sich $V(m^2 + n)$ durch einen Kettenbruch ausdrucken, in welchem die wiederkehrenden Nenner a und b sind. Z. B. für die Zahl 12 ist $a = 2$; $b = 6$.

31. Hat die Zahl N diese Beschaffenheit nicht, so setze man $aabb + 4ab = Nc^2$. Daraus ist $aabb + 4ab + 4 = Nc^2 + 4$, und $ab + 2 = V(Nc^2 + 4)$. Da

$x + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2a} V(aabb + 4ab)$ ist, so ist

$x + \frac{1}{2}b = \frac{c}{2a} V N$. Es muß also eine Zahl c gesucht werden, wodurch die Formel, $Nc^2 + 4$, das Quadrat einer ganzen Zahl wird. Von dieser Zahl, das ist, von $ab + 2$, ziehe man 2 ab, und zerlege den Rest in zwey ganze Factoren, a, b. Diese sind die wiederkehrenden Nenner in dem Kettenbruche, wodurch $\frac{c}{2a} V N + \frac{1}{2}b$ ausgedruckt wird, woraus sich dann $V N$ selbst auch in dieser Form ergiebt. Z. B. wenn $V 7$ gesucht wird, setze man $c = 6$, so ist $ab + 2 = 16$; $ab = 14$. Setzt man $a = 7$, $b = 2$, so ist $x + 1 = \frac{3}{7} V 7$.

31.* Dieses Verfahren kann man auch bey Zahlen von der in (30.) angegebenen Form anwenden, z. B. bey der Zahl 12. Es ist $12 \cdot 16 + 4 = 196 = 14 \cdot 14$, und $ab + 2 = 14$; $ab = 12$. Nimmt man $a = 3$, so ist $b = 4$, und $x + 2 = \frac{3}{2} V 12$.

Digitized by Google

32. Exempel.

$$\sqrt{2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+} \text{ etc.}$$

$$\sqrt{3-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2+} \text{ etc.}$$

$$\sqrt{12-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6+} \text{ etc.}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{8-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4+} \text{ etc.}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{12-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4+} \text{ etc.}$$

Die Annäherung geschieht schneller, wenn die Nenner größer sind. Aus $\sqrt{8}$ erhält man die $\sqrt{2}$, da $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. So ist auch $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

33. Aus diesen Kettenbrüchen werden folgende genäherte Werthe erhalten:

für $\sqrt{2-1}$;

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}, \text{ etc.}$$

für $\sqrt{3-1}$;

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \frac{30}{41}, \frac{41}{56}, \frac{112}{153}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

für $\frac{1}{4}\sqrt{8-2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2-2}$,

$$-, \frac{4}{33}, \frac{33}{272}, \frac{136}{1121}, \frac{1121}{9240}, \frac{4620}{38081}, \text{ etc.}$$

Daher für $\sqrt{2-1}$,

$$\frac{}{2}, \frac{41}{99}, \frac{169}{408}, \frac{1393}{3363}, \frac{5741}{13860}, \text{ etc.}$$

Für $\frac{1}{3}\sqrt{12-2}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{3-2}$,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{13}, \frac{13}{42}, \frac{56}{181}, \frac{181}{585}, \frac{780}{2521}, \text{ etc.}$$

Daher für $\sqrt{3-1}$,

$$\frac{3}{4}, \frac{19}{26}, \frac{41}{56}, \frac{265}{362}, \frac{571}{780}, \frac{3691}{5042}, \text{ etc.}$$

In den beiden letzten Reihen sind gegen die zuerst ndenen je drey Brüche ausgefallen, für welche ein an- r Bruch gekommen ist, dessen Zähler und Nenner den Zählern und Nennern jener Brüche auf eine ge- e Weise zusammen gesetzt sind.

34. Jeder periodische Kettenbruch führt auf eine ratische Gleichung. Z. B. Es sey der periodische enbruch

$$= \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}}$$

eser ist

$$x = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+x}}} = \frac{1}{a+\frac{c+x}{bx+bc+1}}$$

$$= \frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c}; \text{ woraus}$$

Digitized by Google

erhalten wird

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1.$$

35. Umgekehrt wird die Wurzel jeder quadratischen Gleichung immer durch einen periodischen Kettenbruch ausgedruckt. Den Beweis dieses umgekehrten Satzes hat la Grange in der Abhandlung: sur la résolution des équations numériques, Mém. de l'Acad. de Berlin 1768. p. 135. gegeben.

36. Es sey die Gleichung,

$$(I.)\quad Az^m+Bz^{m-1}+Cz^{m-2}+Dz^{m-3}\ldots+K=0,$$

aufzulösen, so läßt sich eine ihrer Wurzeln, deren Grenzen in ganzen Zahlen nach Gleichung (231.) gefunden sind, durch einen Kettenbruch darstellen. Die nächst kleinere Zahl sey $=p$, so daß $z=y+\frac{1}{q}$. Diesen Werth von z setze man in (I.), und multiplicire die ganze Gleichung mit y^m, so wird eine erste transformirte Gleichung erhalten,

$$(II.)\quad A'y^m+B'y^{m-1}+C'y^{m-2}+D'y^{m-3}\ldots+K'=0.$$

Wenn in (I.) zwischen p und $p+1$ nur eine Wurzel liegt, so hat y nur einen Werth, der größer als 1 ist, von welchem man die Gränzen findet, wenn für y alle ganze positive Zahlen gesetzt werden, wobey man sich die Rechnung abkürzen wird, wenn man den Werth von $\frac{1}{y}$ vorher geschätzt hat. Nun sey $y=q+\frac{1}{x}$, und es werde durch dasselbe Verfahren, wie vorher, die zweyte transformirte Gleichung,

$$(III.)\quad A''x^m+B''x^{m-1}+C''x^{m-2}+D''x^{m-3}\ldots+K''=0,$$

Digitized by Google

den. In dieser setze man $x = r + \frac{1}{v}$, und leite
s eine dritte transformirte Gleichung für v her. In
setze man $v = s + \frac{1}{u}$, so kann auf ähnliche Art
gedruckt werden, und so immer weiter. Demnach
die Wurzel der vorgegebenen Gleichung die Form,

$$= p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s + \text{etc.}}$$

mmt also darauf an, die Gränzen p, q, r, s, etc.
den. La Grange hat diese Form für die Wurzel
Gleichung angegeben in der vorher angeführten Ab-
ung über die Auflösung numerischer Gleichungen.
t aber doch zu beschwerlich, diese Gränzen zu suchen.

37. Exempel. Aus der Gleichung,

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

t man für p, q, r, s, etc. folgende Werthe:
, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc.
ß die Wurzel derselben ist

$$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \text{etc.}}$$

38. Es ist vortheilhaft, wenn man immer die
ste Gränze für die Wurzel jeder der Gleichungen
mt, so daß, wenn diese größer als die Wurzel ist, die
änzung subtractiv werde. Dadurch werden die Nen-
der ergänzenden Brüche möglichst groß, und die Aus-
rung geschieht schneller. Man sehe die Zusätze zu
angeführten Abhandlung in dem besondern Werke:
la résolution des équations numériques, p. 88.
dieser Abhandlung wird auch gezeigt, wie man außer
rsten transformirten Gleichung der übrigen entbehren

Digitized by Google

$+2; +1; +3, -2, -5, +2, +7,$
$-2, -9, +2, +11, -2, -13,$ etc.

Daraus entstehen die genäherten Brüche:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{-19}{-7}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1457}{536},$$

u. s. f. Hier sind gegen die Rechnung in (14.) drey Brüche erspart. Der Kettenbruch selbst ist

$$2+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

20. Es sey ein Theil eines Kettenbruchs $=$

$$r+\frac{1}{1}+\frac{1}{u},$$

wo r eine ganze Zahl, und u der ganze ergänzende Nenner ist. Dieser Theil wird durch Anwendung einer subtractiven Ergänzung $= r+1-\frac{1}{1+u}$.

Auf diese Art wird

$$r+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{u} = r+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{u},$$

indem hier $1+\frac{1}{u}$ statt u in dem vorhergehenden Bruche kommt.

Ferner ist

Digitized by Google

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{u}=1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{1+u},$$

wo ebenfalls $1+\frac{1}{u}$ anstatt des u in dem nächst vorhergehenden Bruche kommt. Setzt man hier wiederum $1+\frac{1}{u}$ anstatt u, so sind vier Nenner nach der Reihe $=1$, und der reducirte Bruch ist

$$1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{u}.$$

21. Es sey nun allgemein der Kettenbruch

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}+\frac{\varepsilon}{e}+\frac{\zeta}{f+}\text{ etc.}$$

Setzt man folgeweise zu a, b, c, etc. die Brüche $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, etc. und verwandelt die abgeschnittenen Stücke des Kettenbruchs in gemeine Brüche, so entstehe daraus die Folge der convergirenden Brüche:

I. $\frac{\alpha}{a}$.

II. $\frac{ab}{ab+\beta}$.

III. $\frac{abc+a\gamma}{abc+\beta c+a\gamma}$.

Digitized by Google

IV. $\frac{\alpha bcd + \alpha\gamma d + \alpha b\delta}{abcd + \beta cd + a\gamma d + ab\delta + \beta\delta}$.

V. $\frac{\alpha bcde + \alpha\gamma de + \alpha b\delta e + abc\varepsilon + \alpha\gamma\varepsilon}{abcde + \beta cde + a\gamma de + ab\delta e + \beta\delta e + abc\varepsilon + \beta c\varepsilon + a\gamma\varepsilon}$.

22. Man bezeichne, wie oben, diese Brüche durch $\frac{\mathfrak{A}}{A}, \frac{\mathfrak{B}}{B}, \frac{\mathfrak{C}}{C}, \frac{\mathfrak{D}}{D}, \frac{\mathfrak{E}}{E}$, etc. so ist

$A = a$.	$\mathfrak{A} = \alpha$.
$B = Ab + \beta$.	$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}b$.
$C = Bc + A\gamma$.	$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}c + \mathfrak{A}\gamma$.
$D = Cd + B\delta$.	$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}d + \mathfrak{B}\delta$.
$E = De + C\varepsilon$.	$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}e + \mathfrak{C}\varepsilon$.
u. s. f.	u. s. f.

Für diese Brüche erhellt das Gesetz aus ihnen selbst. In dem Bruche $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ hat man statt d zu setzen $d + \frac{\varepsilon}{e}$, um den Bruch $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ zu erhalten. Dadurch ist

$$\frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{C}(d + \varepsilon : e) + \mathfrak{B}\delta}{C(d + \varepsilon : e) + B\delta} = \frac{(\mathfrak{C}d + \mathfrak{B}\delta)e + \mathfrak{C}\varepsilon}{(Cd + B\delta)e + C\varepsilon} = \frac{\mathfrak{D}e + \mathfrak{C}\varepsilon}{De + C\varepsilon}.$$

Folglich entsteht der Bruch $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ auf eine ähnliche Art aus den beiden nächst vorhergehenden, wie der nächste $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ aus den beiden vor ihm vorhergehenden entsteht. Dasselbe erhellt für den folgenden Bruch $\frac{\mathfrak{F}}{F}$ durch ein ähnliches Verfahren, indem nur die Buchstaben mit den nächst folgenden vertauscht werden, und so für alle folgende.

Digitized by Google

23. Es ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{A} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = + \frac{\alpha\beta}{AB},$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = - \frac{\alpha\beta\gamma}{BC},$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = + \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{CD},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} - \frac{\mathfrak{E}}{E} = - \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{DE},$$

u. s. f.

Der Beweis wird wie in (6.) geführt, wo α, β, γ, δ, ε, etc. jede $= 1$ sind.

24. Um jeden der convergirenden Brüche auch ohne die vorhergehenden zu finden, dient folgende Darstellung des Zählers und Nenners, die Hindenburg in dem Archiv der Mathematik, 1. 2. 3ten Heft gewiesen hat.

Zähler.

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2		α	γ	d	e
3		α	b	δ	e
4			a	b	c	ε
5				α	γ	ε

Nenner.

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2		β	c	d	e
3		a	γ	d	e
4		a	b	δ	e
5			β	δ	ε
		a	b	c	ε
			β	c	ε
			a	γ	ε

Digitized by Google

Die Winkelhaken sondern hier die Werthe der Zähler und Nenner in den convergirenden Werthen des Kettenbruchs (21.) ab, zufolge des in (22.) bemerkten Gesetzes. Jeder Zähler und Nenner stellt zugleich die Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche dar. Diese zur Einsicht in die Formation der Kettenbrüche sehr dienliche Schematisirung nennt Hindenburg eine Involution, dergleichen in dem Artikel, Combination, 38, 39 vorgekommen ist. Das Schema läßt sich leicht fortsetzen. Der nächste integrirende Bruch sey $\frac{\zeta}{f}$, so setzt man einen neuen Winkelhaken 6 — 6 an, in welchem man erstlich zu den Gliedern des Winkelhakens 5 — 5 den Factor f fügt, und zweytens den Winkelhaken 4 — 4 mit dem angehängten Factor ζ darunter setzt.

25. Man bemerke, daß alle Glieder des Zählers sich mit α, dem Zähler des ersten Bruchs in dem Kettenbruche, anfangen. Vertauscht man α mit a, dem Nenner dieses Bruchs, und in den Gliedern, welche sich mit αb anfangen, αb mit β, so erhält man alle Glieder des Nenners. Da der Zähler und Nenner des nächsten sechsten Werthes aus den Zählern und Nennern der zwey nächst vorhergehenden Werthe zusammen gesetzt wird, durch Hinzufügung eines der Factoren, f, ζ, die hier rechter Hand angehängt werden, so ist die hier gemachte Bemerkung allgemein gültig.

26. Die Glieder eines ergänzenden Bruchs, wie $\frac{\gamma}{c}$, darf man durch Division mit derselben Zahl nicht ändern, weil diese Glieder nicht in allen Theilen des Zählers und Nenners des verwandelten Kettenbruchs vorkommen. Aber der Zähler und Nenner eines der ergänzenden Brüche, nebst dem Zähler des darauf folgenden Bruchs, wie γ, c, δ, dürfen mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Denn in jedem Theile des Zählers und Nenners des reducirten Kettenbruchs kommt ein einzelnes

Digitized by Google

dieser Glieder vor. Dieses rührt daher, daß irgend ein Stück des Kettenbruchs, wie $\frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d + \text{etc.}}$, unverändert bleibt, wenn der Zähler und der gemischte Nenner mit derselben Zahl m multiplicirt oder dividirt werden. Dieses geschieht durch die Multiplication oder Division von γ, c und δ.

27. Auch darf man die angenäherten Werthe des Kettenbruches nicht aufheben, wenn gleich Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Factor haben sollten, wofern man sich derselben noch zur Erfindung folgender Werthe bedienen will. Denn es seyn zwey auf einander folgende Werthe, $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{Q}$, woraus der folgende nach dem Gesetze (22.) dieser sey, $\frac{Mm + Nn}{Pm + Qn}$, so erhellt, daß man in diesem keine gleichnamige Theile oder Vielfache von M und P, oder von N und Q setzen dürfe, es müßte denn in beiden Paaren auf gleiche Art geschehen können.

Der Fall, daß ein angenäherter Werth verkleinerlich seyn sollte, tritt nie ein, wenn die Zähler der einfachen Brüche die Einheit sind, wie in (3.). Denn man nehme z. B. den genäherten Werth aus IV. in (4), nämlich $\frac{mnpq + pq + mq + mn + 1}{npq + q + n}$, so muß, wenn hier Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor enthalten, dasselbe auch für den Bruch $\frac{pq + 1}{npq + q + n}$ Statt haben, daher auch für $\frac{pq + 1}{q}$, daraus für $\frac{1}{q}$, welches nicht möglich ist, da die Einheit als gemeinschaftlicher Theiler nicht betrachtet wird.

Digitized by Google

Anwendung auf die Algebra.

28. Die Kettenbrüche leisten gute Dienste zur Ausziehung der Quadratwurzeln, und zur Auflösung quadratischer Gleichungen. Wenn nämlich die Nenner der Elementarbrüche, wie man sie nennen mag, periodisch wiederkehren, so ist der Werth des Kettenbruchs die Wurzel einer quadratischen Gleichung. Es sey erstlich

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a + \text{etc.}}$$

Aus dieser ins Unendliche fortgehenden Zusammensetzung derselben Brüche folgt

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{a + x},$$

Daraus ferner durch die Reduction des unreinen Bruchs,

$$xx + ax = 1,$$

und hieraus

$$x + \tfrac{1}{2}a = V(\tfrac{1}{4}aa + 1).$$

Die Quadratwurzeln der Zahlen von der Form, $\frac{1}{4}aa + 1$, lassen sich also durch periodische Kettenbrüche mit einem und demselben wiederkehrenden Nenner ausdrücken.

29. Es sey zweytens

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a + \text{etc.}}$$

so ist

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b + x},$$

und daraus

$$axx + abx = b.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung giebt

$$x + \tfrac{1}{2}b = V(\tfrac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}).$$

30. Eine gegebene Zahl N lasse sich in zwey Theile, $m^2 + n$, zerlegen, so daß $\frac{2m}{n} = a$ eine ganze Zahl ist, wobey der Theil n auch eine gebrochne Zahl seyn mag.

Man nehme $b = 2m$, so läßt sich $V(m^2 + n)$ durch einen Kettenbruch ausdrucken, in welchem die wiederkehrenden Nenner a und b sind. Z. B. für die Zahl 12 ist $a = 2$; $b = 6$.

31. Hat die Zahl N diese Beschaffenheit nicht, so setze man $aabb + 4ab = Nc^2$. Daraus ist $aabb + 4ab + 4 = Nc^2 + 4$, und $ab + 2 = V(Nc^2 + 4)$. Da $x + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2a} V(aabb + 4ab)$ ist, so ist $x + \frac{1}{2}b = \frac{c}{2a} V N$. Es muß also eine Zahl c gesucht werden, wodurch die Formel, $Nc^2 + 4$, das Quadrat einer ganzen Zahl wird. Von dieser Zahl, das ist, von $ab + 2$, ziehe man 2 ab, und zerlege den Rest in zwey ganze Factoren, a, b. Diese sind die wiederkehrenden Nenner in dem Kettenbruche, wodurch $\frac{c}{2a} V N + \frac{1}{2}b$ ausgedruckt wird, woraus sich dann $V N$ selbst auch in dieser Form ergiebt. Z. B. wenn $V 7$ gesucht wird, setze man $c = 6$, so ist $ab + 2 = 16$; $ab = 14$. Setzt man $a = 7$, $b = 2$, so ist $x + 1 = \frac{3}{7} V 7$.

31.* Dieses Verfahren kann man auch bey Zahlen von der in (30.) angegebenen Form anwenden, z. B. bey der Zahl 12. Es ist $12 \cdot 16 + 4 = 196 = 14 \cdot 14$, und $ab + 2 = 14$; $ab = 12$. Nimmt man $a = 3$, so ist $b = 4$, und $x + 2 = \frac{3}{2} V 12$.

Digitized by Google

32. Exempel.

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2+}\text{ etc.}$$

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2+}\text{ etc.}$$

$$\sqrt{12}-3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6+}\text{ etc.}$$

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{8}-2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4+}\text{ etc.}$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{12}-2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4+}\text{ etc.}$$

Die Annäherung geschieht schneller, wenn die Nenner größer sind. Aus $\sqrt{8}$ erhält man die $\sqrt{2}$, da $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. So ist auch $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

33. Aus diesen Kettenbrüchen werden folgende genäherte Werthe erhalten:

für $\sqrt{2}-1$;

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \frac{70}{169},\ \frac{169}{408},\ \text{etc.}$$

für $\sqrt{3}-1$;

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{8}{11},\ \frac{11}{15},\ \frac{30}{41},\ \frac{41}{56},\ \frac{112}{153},\ \text{etc.}$$

Digitized by Google

für $\frac{1}{4}\sqrt{8-2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2-2}$,

$$\frac{1}{0}, \frac{4}{33}, \frac{33}{272}, \frac{136}{1121}, \frac{1121}{9240}, \frac{4620}{38081}, \text{ etc.}$$

Daher für $\sqrt{2-1}$,

$$\frac{5}{12}, \frac{41}{99}, \frac{169}{408}, \frac{1393}{3363}, \frac{5741}{13860}, \text{ etc.}$$

Für $\frac{1}{3}\sqrt{12-2}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{3-2}$,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{13}, \frac{13}{42}, \frac{56}{181}, \frac{181}{585}, \frac{780}{2521}, \text{ etc.}$$

Daher für $\sqrt{3-1}$,

$$\frac{3}{4}, \frac{19}{26}, \frac{41}{56}, \frac{265}{362}, \frac{571}{780}, \frac{3691}{5042}, \text{ etc.}$$

In den beiden letzten Reihen sind gegen die zuerst gefundenen je drey Brüche ausgefallen, für welche ein anderer Bruch gekommen ist, dessen Zähler und Nenner aus den Zählern und Nennern jener Brüche auf eine gewisse Weise zusammen gesetzt sind.

34. Jeder periodische Kettenbruch führt auf eine quadratische Gleichung. Z. B. Es sey der periodische Kettenbruch

$$x = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}}$$

Dieser ist

$$x = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+x}}} = \frac{1}{a}+\frac{c+x}{bx+bc+1}$$

$$= \frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c}; \text{ woraus}$$

Digitized by Google

erhalten wird

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1.$$

35. Umgekehrt wird die Wurzel jeder quadratischen Gleichung immer durch einen periodischen Kettenbruch ausgedruckt. Den Beweis dieses umgekehrten Satzes hat la Grange in der Abhandlung: sur la résolution des équations numériques, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1768. p. 135. gegeben.

36. Es sey die Gleichung,

$$(I.)\quad Az^m+Bz^{m-1}+Cz^{m-2}+Dz^{m-3}\ldots+K=0,$$

aufzulösen, so läßt sich eine ihrer Wurzeln, deren Grenzen in ganzen Zahlen nach Gleichung (231.) gefunden sind, durch einen Kettenbruch darstellen. Die nächst kleinere Zahl sey $=p$, so daß $z=y+\frac{1}{q}$. Diesen Werth von z setze man in (I.), und multiplicire die ganze Gleichung mit y^m, so wird eine erste transformirte Gleichung erhalten,

$$(II.)\quad A'y^m+B'y^{m-1}+C'y^{m-2}+D'y^{m-3}\ldots+K'=0.$$

Wenn in (I.) zwischen p und $p+1$ nur eine Wurzel liegt, so hat y nur einen Werth, der größer als 1 ist, von welchem man die Grenzen findet, wenn für y alle ganze positive Zahlen gesetzt werden, wobey man sich die Rechnung abkürzen wird, wenn man den Werth von $\frac{1}{y}$ vorher geschätzt hat. Nun sey $y=q+\frac{1}{x}$, und x werde durch dasselbe Verfahren, wie vorher, die zweyte transformirte Gleichung,

$$(III.)\quad A''x^m+B''x^{m-1}+C''x^{m-2}+D''x^{m-3}\ldots+K''=0,$$

Digitized by Google

gefunden. In dieser setze man $x = r + \frac{1}{v}$, und leite daraus eine dritte transformirte Gleichung für v her. In dieser setze man $v = s + \frac{1}{u}$, so kann auf ähnliche Art u ausgedruckt werden, und so immer weiter. Demnach erhält die Wurzel der vorgegebenen Gleichung die Form,

$$z = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

Es kommt also darauf an, die Gränzen p, q, r, s, etc. zu finden. La Grange hat diese Form für die Wurzel einer Gleichung angegeben in der vorher angeführten Abhandlung über die Auflösung numerischer Gleichungen. Es ist aber doch zu beschwerlich, diese Gränzen zu suchen.

37. Exempel. Aus der Gleichung,

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

erhält man für p, q, r, s, etc. folgende Werthe:

2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc.

so daß die Wurzel derselben ist

$$z = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

38. Es ist vortheilhaft, wenn man immer die nächste Gränze für die Wurzel jeder der Gleichungen nimmt, so daß, wenn diese größer als die Wurzel ist, die Ergänzung subtractiv werde. Dadurch werden die Nenner der ergänzenden Brüche möglichst groß, und die Annäherung geschieht schneller. Man sehe die Zusätze zu der angeführten Abhandlung in dem besondern Werke: sur la résolution des équations numériques, p. 88. In dieser Abhandlung wird auch gezeigt, wie man außer der ersten transformirten Gleichung der übrigen entbehren

Digitized by Google

könne, so daß bloß in der ursprünglichen Gleichung die Substitutionen gemacht werden.

Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche.

39. Aus den Formeln (23.) für die genäherten Werthe des Kettenbruchs,

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c + \text{etc.}}$$

erhält man durch die Addition folgende Ausdrücke für dieselben, worin für A dessen Werth α gesetzt ist.

$$\frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB},$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB} + \frac{\alpha\beta\gamma}{BC},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB} + \frac{\alpha\beta\gamma}{BC} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{CD},$$

u. s. f.

Folglich ist der Werth eines Kettenbruchs, dessen partielle Brüche alle gleichnamig sind, eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen, welche abbricht, wenn der Bruch aus einer endlichen Anzahl partieller Brüche zusammen gesetzt ist, sonst aber ohne Ende fortgeht.

40. Umgekehrt kann daher eine Reihe

$$s = P - Q + R - S + T - \text{etc.}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden, weil die Zähler und Nenner der partiellen Brüche aus den Gliedern der Reihe sich bestimmen lassen, wie nun gezeigt werden wird.

41. Die Vergleichung der Glieder P, Q, R, S, etc. mit den Gliedern der Reihe, worin der Kettenbruch nach (39.) aufgelöset wird, und die Formeln in (22.) für A, B, C, etc. geben folgende Gleichungen:

Digitized by Google

$$\alpha = \Delta P. \qquad a = A.$$

$$\beta = \frac{BQ}{P}. \quad b = \frac{B-\beta}{A},$$

$$\gamma = \frac{CR}{AQ}. \quad c = \frac{C-A\gamma}{B},$$

$$\delta = \frac{DS}{BR}. \quad d = \frac{D-B\delta}{C},$$

$$\varepsilon = \frac{ET}{CS}. \quad e = \frac{E-C\varepsilon}{D},$$

u. s. f. u. s. f.

In den Werthen von β, γ, δ, ε, sind die jedem vorhergehenden Werthe gebraucht, um sie unabhängig von einander auszudrucken.

42. Es ist hieraus

I. $\frac{\alpha}{a} = P$,

II. $B-\beta = \frac{B(P-Q)}{P}$, also

$$b = \frac{B}{A}.\frac{P-Q}{P}, \text{ und}$$

$$\frac{\beta}{b} = A.\frac{Q}{P-Q} = \frac{Qa}{P-Q}.$$

III. $C-A\gamma = \frac{C(Q-R)}{Q}$,

$$c = \frac{C}{B}.\frac{Q-R}{Q};$$

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{B}{A}.\frac{R}{Q-R} = \frac{PRb}{(P-Q)(Q-R)}.$$

Digitized by Google

IV. $D - A\delta = \frac{D(R-S)}{R}$;

$$d = \frac{D}{C} \cdot \frac{R-S}{R};$$

$$\frac{\delta}{d} = \frac{C}{B} \cdot \frac{S}{R-S} = \frac{QSc}{(Q-R)R-S}$$

Die gleichförmige Bildung aller dieser Brüche erhellt aus der gleichförmigen Beschaffenheit der Formeln in (41.).

43. Es ist also

$$\alpha = Pa; \qquad \beta = \frac{Qab}{P-Q};$$

$$\gamma = \frac{PRbc}{(P-Q)(Q-R)}; \quad \delta = \frac{QScd}{(Q-R)(R-S)};$$

$$\varepsilon = \frac{RTde}{(R-S)(S-T)}; \text{ u. s. f.}$$

44. Nun ist der Kettenbruch, in welchen die Reihe,

$$s = P - Q + R - S + T - \text{etc.}$$

verwandelt wird, folgender, worin zur Abkürzung für $P-Q$; $Q-R$; $R-S$; etc. gesetzt sind p, q, r, etc.

$$\frac{Pa}{a + \frac{Qab:p}{b + \frac{PRbc:pq}{c + \frac{QScd:qr}{d + \text{etc.}}}}}$$

Es ist nach (26.) erlaubt, die Zähler eines der partiellen Brüche mit einer Größe zu multipliciren oder zu dividiren, wenn der Nenner desselben, das ist, hier der einfache Theil wie a, b, c, d, etc. und der Zähler des Ergänzungsbruchs mit derselben Größe multiplicirt oder dividirt wird. Dadurch erhält der Kettenbruch, wenn die Werthe von p, q, r, s, etc. wieder hergestellt werden, die Gestalt,

Digitized by Google

$$\frac{P}{1}+\frac{Q}{P-Q}+\frac{PR}{Q-R}+\frac{QS}{R-S}+\frac{RT}{S-T}+\text{etc.}$$

45. Euler hat in der Introd. in Anal. infin. T. I. §. 368. diese Formel auf ganze Werthe der Reihenglieder, P, Q, R, S, etc. eingeschränkt. Er sieht die Nenner der partiellen Brüche als willkührlich an, und bestimmt sie so, daß sie, so wie die Nenner, ganze Zahlen werden, weswegen die Glieder der Reihe auch ganze Zahlen seyn sollen. Er hat nicht bemerkt, daß jene Nenner durch die Division aus dem Kettenbruche herausgehen, und in so fern willkührlich sind. Die Glieder, P, Q, R, S, etc. dürfen jeden Werth erhalten, nur daß sie positiv seyn, damit alle partiellen Brüche gleichnamig bleiben.

Die Herleitung der einfachen Brüche ist hier auf eine andere Art bewerkstelligt, als in dem gedachten Eulerschen Werke.

46. Die Reihe,

$$s=\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}-\frac{1}{S}+\frac{1}{T}-\text{etc.}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, setze man in (44.) statt P, Q, R, S, etc. die umgekehrten Größen, $\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{R}, \frac{1}{S}$ etc. und verwandle darauf die unreinen Brüche in dem Kettenbruche auf gehörige Art in reine Brüche, so wird

$$s=\frac{1}{P}+\frac{PP}{Q-P}+\frac{QQ}{R-Q}+\frac{RR}{S-R}+\frac{SS}{T-S}+\text{etc.}$$

47. Euler hat zur Verwandlung einer solchen Reihe in einen Kettenbruch ein sehr einfaches Verfahren angegeben, in den Opuscul. analyticis, T. II. p. 148.

Digitized by Google

Es sey die ganze Reihe

$$s = \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} - \frac{1}{S} + \frac{1}{T} - \text{etc.}$$ Der Theil nach dem ersten Gliede entgegengesetzt genommen, sey

$$t = \frac{1}{Q} - \frac{1}{R} + \frac{1}{S} - \frac{1}{T} + \text{etc.}$$

Auf gleiche Art sey

$$u = \frac{1}{R} - \frac{1}{S} + \frac{1}{T} - \frac{1}{V} + \text{etc.}$$

$$v = \frac{1}{S} - \frac{1}{T} + \frac{1}{V} - \text{etc.}$$

und so werde von jedem Theile der Reihe das Anfangsglied abgesondert. Es ist nun

$$s = \frac{1}{P} - t = \frac{1 - Pt}{P}, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{P}{1 - Pt} = P + \frac{P^2 t}{1 - Pt} =$$

$$P + \frac{P^2}{-P + \frac{1}{t}}. \text{ Auf gleiche Art ist}$$

$$\frac{1}{t} = Q + \frac{Q^2}{-Q + \frac{1}{u}}; \quad \frac{1}{u} = R + \frac{R^2}{-Q + \frac{1}{v}};$$

u. s. f. Diese Werthe in den von $\frac{1}{S}$ gesetzt, wird

$$\frac{1}{s} = P + \frac{PP}{Q - P} + \frac{QQ}{R - Q} + \frac{RR}{S - R + \text{etc.}}$$

Durch Umkehrung dieses Bruchs wird der Bruch in (46.) erhalten. Euler leitet a. a. O. §. 28. daraus den Kettenbruch für eine Reihe her, deren Glieder Brüche sind.

Digitized by Google

48. Exempel. I. Es sey der Halbmesser eines Kreises $= 1$, der halbe Umfang $= \pi$, so ist der Bogen

$$= \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$ (Cyklometrie, 10. 11.)

Hier sind P, Q, R, etc. die ungeraden Zahlen, also ist

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Der umgekehrte Bruch druckt das Quadrat des Durchmessers durch die Kreisfläche, als Einheit, aus. Lord Brounker, der erste Präsident der englischen Societät, hat diese Form durch eine ihm eigene, nicht bekannte, Methode gefunden. (Cyklotechnie, Th. I. S. 655.)

49. Exempel. II. Es sey $s = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1 + x^n}$, so ist, wenn die Differentialformel in eine Reihe entwikkelt, und das Integral genommen wird, dieses für $x = 1$, folgende Reihe,

$$s = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \text{etc.}$$

und der daraus entstehende Kettenbruch,

$$s = \frac{1}{m + \frac{mm}{n + \frac{(m+n)^2}{n + \frac{(m+2n)^2}{n + \text{etc.}}}}}$$

50. Die Reihe für s habe die Gestalt,

$$s = \frac{1}{P} - \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} - \frac{1}{PQRS} + \text{etc.}$$

Digitized by Google

An dem vorher gefundenen Kettenbruche setze man PQ, PQR, PQRS, etc. statt P, Q, R, etc. so ergiebt sich durch gehöriges Aufheben der partiellen Brüche für s der Kettenbruch.

$$s = \frac{1}{P} + \frac{P}{Q-1} + \frac{Q}{R-1} + \frac{R}{S-1} + \frac{S}{T-1+\text{etc.}}$$

51. Exempel. Die Basis des natürlichen Systems der Logarithmen sey $= e$, so ist, wie in dem Artikel, Logarithme, gezeigt wird,

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Folglich ist

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5+\text{etc.}}$$

und durch Umkehrung,

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5+\text{etc.}}$$

52. Hieraus folgt

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5+\text{etc.}}$$

Denn es ist $e - 1 = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3+\text{etc.}}$,

Digitized by Google

ho u die Ergänzung bedeutet. Hieraus ergiebt sich $\frac{z}{e-z} = z + \frac{z}{3+u}$. Nun dividire man die partiellen Brüche nach ihrer Folge im Zähler und Nenner durch 2, durch 3, durch 4, u. s. f. mit Beobachtung der Vorschrift (26.) so erhält man die hier angegebene Form.

53. Es sey die mte Wurzel aus $(1+z)$ oder $(1+z)^{\frac{1}{m}}$ durch einen Kettenbruch darzustellen. Nach dem binomischen Lehrsatze ist,

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} = 1 + Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - \text{etc.}$$

und hier $A = \frac{1}{m}$; $B = \frac{1.m-1.}{m.2m}$;

$$C = \frac{1.m-1.2m-1.}{m.2m.3m};$$

$$D = \frac{1.m-1.2m-1.3m-1.}{m.2m.3m.4m};$$

u. s. f. Da hier

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1 = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}$$

ist, so hat man in dem Kettenbruche (44.) für P, Q, R, etc. zu setzen Az; Bz^2; Cz^3; etc. Dieses giebt nach gehöriger Division der Elementarbrüche durch die Potenzen von z,

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1 =$$

$$\frac{Az}{1} + \frac{Bz}{A - Bz + \frac{ACz}{B - Cz + \frac{BDz}{C - Dz + \frac{CEz}{D - Ez + u.}}}}$$

54. Exempel. Die Quadratwurzel aus $1+z$ durch einen Kettenbruch anzugeben.

Digitized by Google

Es ist $(1+z)^{\frac{1}{2}}-1=$

$$\frac{\frac{1}{2}z}{2}+\frac{1.2z}{4-z}+\frac{3.4z}{6-3z}+\frac{5.6z}{8-5z}+\frac{7.8z}{10-7z}+\text{etc.}$$

Das hier angedeutete Gesetz der Formation der Elementarbrüche zeigt sich auch bey den beiden folgenden Elementarbrüchen. Sie sind $\frac{9.10.z}{12-9z}$ und $\frac{11.12.z}{14-11z}$.

Die unreinen Elementarbrüche sind durch Multiplication und Division in dem Zähler und Nenner eines jeden, und in dem Zähler des folgenden reducirt worden.

55. Auf gleiche Art ist $(1+z)^{\frac{1}{3}}-1=$

$$\frac{\frac{1}{3}z}{3}+\frac{2.3z}{6-2z}+\frac{5.6z}{9-5z}+\frac{8.9z}{12-8z}+\frac{11.12z}{15-11z}+\text{etc.}$$

56. Um das Gesetz der Formation allgemein einzusehen, drücke man jeden Coefficienten durch den vorhergehenden aus, wie folget:

$mA=1$; $2mB=(m-1)A$;
$3mC=(2m-1)B$; $4mD=(3m-1)C$;
$5mE=(4m-1)D$; etc.

Dadurch wird erhalten

$$\frac{Az}{1}=\frac{z}{m}.$$

$$\frac{Bz}{A-Bz}=\frac{(m-1)z}{2m-(m-1)z}.$$

$$\frac{ACz}{B-Cz}=\frac{(2m-1)Az}{3m-(2m-1)z}.$$

Digitized by Google

$$\frac{Dz}{C-Dz} = \frac{(3m-1)Bz}{4m-(3m-1)z},$$

$$\frac{CEz}{D-Ez} = \frac{(4m-1)Cz}{5m-(4m-1)z}$$

etc.

In der Verkettung muß jeder Zähler mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt werden, mit welcher der Nenner des vorhergehenden multiplicirt und dividirt ist. Dadurch werden die Elementarbrüche:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{z}{m}; \qquad \frac{\beta}{b} = \frac{m.m-1.z}{2m-(m-1)z};$$

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{2m.2m-1.z}{3m-(2m-1)z}; \quad \frac{\delta}{d} = \frac{3m.3m-1.z}{4m-(3m-1)z};$$

$$\frac{\varepsilon}{e} = \frac{4m.4m-1.z}{5m-(4m-1)z}; \qquad \text{etc.}$$

47. Damit die Reihe für die Wurzel, und dadurch auch der Kettenbruch convergirend sey, muß z ein eigentlicher Bruch seyn. Ist die gegebene Zahl größer als 2, so nehme man die nächst kleinere Zahl, welche eine Potenz von dem Grade der Wurzel ist, und dividire dadurch die gegebene Zahl, multiplicire aber die aus dem Quotienten gefundene Wurzel durch die Wurzel aus jener Zahl. Es sey die gegebene Zahl $N = r^m + u$, so ist

$$N^{\frac{1}{m}} = (r^m + u)^{\frac{1}{m}} = r\left(1 + \frac{u}{r^m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Ist z. B. die $\sqrt{12}$ zu finden, so ist $r^2 = 9$;

$$z = \frac{u}{r^2} = \frac{1}{3}, \text{ und}$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{6}{11} + \frac{36}{17} + \frac{90}{19 + \text{etc.}}$$

Digitized by Google

Die drey ersten Elementarbrüche geben nach den Formeln (5.) den Bruch $\frac{223}{1440}$. Daher ist ziemlich nahe

$$\sqrt{12} = 3(1 + \frac{223}{1440}) = \frac{1663}{480} = 3,4645\ldots$$

Sie ist genauer 3,4641 ... Es ist aber ein beträchtlicher Elementarbruch $\frac{90}{19}$ weggelassen worden, welcher inzwischen durch den nächstfolgenden $\frac{168}{21}$ oder $\frac{8}{1}$ noch verkleinert wird. Nimmt man 20 statt 17, so ist $\sqrt{12} = 3,46377\ldots$ Für Quadratwurzeln ist das in (28. bis 34.) gebrauchte Verfahren bequemer.

58. Die Cubikwurzel aus 2 ist =

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{3.2}{2 + \frac{6.5}{4 + \frac{9.8}{4 + \frac{12.11}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

Die fünf ersten Werthe sind

$$\frac{4}{3}, \frac{22}{18}, \frac{208}{162}, \frac{2416}{1944}, \frac{37120}{29160};$$

die beiden letztern, nämlich 1,24279... und 1,27297... sind noch beträchtlich von dem genauern 1,25992... (bis nom. Lehrs. 16.) entfernt. Freylich kann auch die Reihe sich nur langsam nähern, da die Progressionalgrösse $z = 1$ ist. Doch ist es hier mehr um die Form als um die Annäherung zu thun.

59. La Grange hat in einer Abhandlung über die Anwendung der continuirlichen Brüche in der Integralrechnung, in den neuen Memoiren der Akad. zu Berlin für 1776. eine andere Formel für die Darstellung der Potenz $(1 + x)^m$ gegeben. Zuerst löset er die Differentialgleichung, $my + (1 + x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, auf, so

Digitized by Google

daß y die Form eines Kettenbruchs erhält, auf eine ähnliche Art, wie oben bey der Auflösung einer algebraischen Gleichung. Es ist aber auch durch gewöhnliche Integration, $(1+x)^m = \frac{a}{y}$, da $\frac{m\partial x}{1+x} + \frac{\partial y}{y} = 0$ ist.

Dadurch wird

$$(1+x)^m =$$

$$1 + \cfrac{mx}{1-(m-1)x:2 \atop 1+(m+1)x:3.2 \atop 1-(m-2)x:3.2 \atop 1+(m+2)x:5.2 \atop 1-(m-3)x:5.2 \atop 1+(m+3)x:7.2 \atop 1+\text{etc.}}$$

Der Bruch endigt sich, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl ist.

Der Verfasser leitet hieraus Kettenbrüche für $\log(1+x)$ und für e^x her, giebt auch noch einige Verwandlungen dieser Brüche an, wobey er auf eine für tang x kommt. Es ist noch verschiedenes merkwürdige in dieser Abhandlung enthalten.

60. Eine Reihe,

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - \text{etc.}$$

läßt sich auf dieselbe Art, wie ein numerischer Bruch in einen Kettenbruch verwandeln.

I. Man betrachte nämlich die Reihe als den Zähler eines Bruchs, dessen Nenner die Einheit ist. Diesen Nenner dividire man durch die Reihe, nehme den Rest, der nach Abziehung des Products aus dem ersten Theile des Quotienten in den Divisor von dem Dividendus 1 bleibt, zum Divisor, und die Reihe, die Divisor war, zum Dividendus, auf welche Art immer fortgefahren werde.

Digitized by Google

Die Form der Rechnung ist folgende:

I. $\frac{x}{1} = x.$

II. $\frac{1}{x} = \frac{a}{\alpha} + \frac{p}{x}.$

III. $\frac{x}{p} = \frac{b}{\beta} + \frac{q}{p}.$

IV. $\frac{p}{q} = \frac{c}{\gamma} + \frac{r}{q}.$

V. $\frac{q}{r} = \frac{d}{\delta} + \frac{s}{r}.$

u. s. f.

Hier sind $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, etc. die Quotienten, und p, q, r, s, etc. die Reste.

II. Um die Rechnung zu erleichtern, setze man $x = A - Mz$, und bediene sich folgender abgekürzten Ausdrücke:

$M = B - Nz$; $N = C - Pz$;
$P = D - Qz$; $Q = E - Rz$; etc.

so ist

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{A}.$$

$$p = \frac{Bz}{A} - \frac{Nz^2}{A}.$$

$$\frac{b}{\beta} = \frac{AA}{Bz}.$$

$$q = \frac{(AC - BB)z}{B} - \frac{(AP - BN)z^2}{B}.$$

Digitized by Google

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{BB}{A(AC-BB)}.$$

$$f = \frac{(BD-CC)z^2}{AC-BB} - \frac{(BQ-CP)z^3}{AC-BB}$$

$$\frac{d}{\delta} = \frac{(AC-BB)^2}{B(BD-CC)z}.$$

$$= [(AC-BB)Q-(AD-BC)P + (BD-CC)N]z^2 : (BD-CC).$$

$$= \frac{(BD-CC)^2}{(AC-BB)[(AC-BB)E-(AD-BC)D+(BD-CC)}$$

III. Nun ist

$$x = \frac{1}{(a:\alpha)} + \frac{1}{(b:\beta)} + \frac{1}{(c:\gamma)} + \frac{1}{(d:\delta)} + \text{etc.}$$

s hindert hier nichts, die Zähler a, b, c, d, etc. jeden =1 zu setzen, wodurch nur statt der Bezeichnungen $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, etc. die Bezeichnungen $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, etc. mmen, welche eben die Brüche wie jene bedeuten. Jene orm ward nur gewählt, um die Quotienten der successi- en Divisionen dadurch desto deutlicher anzuzeigen, und die equemste Bestimmung des Zählers und Nenners frey zu ssen. Werden nun die partiellen Brüche gehörig redu- irt, so ist

$$x = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha\beta}{1} + \frac{\beta\gamma}{1} + \frac{\gamma\delta}{1} + \frac{\delta\varepsilon}{1 + \text{etc}}$$

IV. Diese reducirten partiellen Brüche sind:

F

Digitized by Google

Die Form der Rechnung ist folgende:

$$\text{I.}\quad \frac{x}{1} = x.$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{x} = \frac{a}{\alpha} + \frac{p}{x}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{x}{p} = \frac{b}{\beta} + \frac{q}{p}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{p}{q} = \frac{c}{\gamma} + \frac{r}{q}.$$

$$\text{V.}\quad \frac{q}{r} = \frac{d}{\delta} + \frac{s}{r}.$$

u. s. f.

Hier sind $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, etc. die Quotienten, und p, q, r, s, etc. die Reste.

II. Um die Rechnung zu erleichtern, setze man $x = A - Mz$, und bediene sich folgender abgekürzten Ausdrücke:

$$M = B - Nz; \quad N = C - Pz;$$
$$P = D - Qz; \quad Q = E - Rz; \text{ etc.}$$

so ist

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{A}.$$

$$p = \frac{Bz}{A} - \frac{Nz^2}{A}.$$

$$\frac{b}{\beta} = \frac{AA}{Bz}.$$

$$q = \frac{(AC - BB)z}{B} - \frac{(AP - BN)z^2}{B}.$$

Digitized by Google

$$= \frac{BB}{A(AC-BB)}.$$

$$= \frac{(BD-CC)z^2}{AC-BB} - \frac{(BQ-CP)z^2}{AC-BB}$$

$$= \frac{(AC-BB)^2}{B(BD-CC)z}.$$

$$= [(AC-BB)Q-(AD-BC)P + (BD-CC)N]z^2 : (BD-CC).$$

$$= \frac{(BD-CC)^2}{(AC-BB)[(AC-BB)E-(AD-BC)D+(BD-CC)(}$$

III. Nun ist

$$x = \frac{1}{(a:\alpha)} + \frac{1}{(b:\beta)} + \frac{1}{(c:\gamma)} + \frac{1}{(d:\delta)+\text{etc.}}$$

s hindert hier nichts, die Zähler a, b, c, d, etc. jeden = 1 zu setzen, wodurch nur statt der Bezeichnungen $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, etc. die Bezeichnungen $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, etc. kommen, welche eben die Brüche wie jene bedeuten. Jene Form ward nur gewählt, um die Quotienten der successiven Divisionen dadurch desto deutlicher anzuzeigen, und die bequemste Bestimmung des Zählers und Nenners frey zu lassen. Werden nun die partiellen Brüche gehörig reducirt, so ist

$$x = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha\beta}{1} + \frac{\beta\gamma}{1} + \frac{\gamma\delta}{1} + \frac{\delta\varepsilon}{1+\text{etc}}$$

IV. Diese reducirten partiellen Brüche sind:

Digitized by Google

$$\frac{\alpha}{1} = A,$$

$$\frac{\alpha\beta}{1} = \frac{Bz}{A},$$

$$\frac{\beta\gamma}{1} = \frac{(AC-BB)z}{AB},$$

$$\frac{\gamma\delta}{1} = \frac{A(BD-CC)z}{B(AC-BB)},$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{1} = \frac{B[(AC-BB)E-(AD-BC)D+(BD-CC)C]z}{(AC-BB)(BD-CC)},$$

Die folgenden Werthe der Brüche werden noch zusammengesetzter.

61. Hieraus folgen nach den Formeln in (22.) die ersten vier genäherten Brüche:

I. $\frac{A}{1}$,

II. $\frac{AA}{A+Bz}$,

III. $\frac{AB+(AC-BB)z}{B+Cz}$,

IV. $\frac{A(AC-BB)+(A(AD-BC)-B(AC-BB))z}{AC-BB+(AD-BC)z+(BD-CC)z^2}$

Zur Probe der Rechnung dient die Entwicklung dieser Brüche durch die wirkliche Division.

62. Es sey $\overset{m}{\surd}(+z)$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1 = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc}$$

Digitized by Google

so daß

$$A = \frac{1}{m}; \quad B = \frac{1.m-1.}{m.2m}; \quad C = \frac{1.m-1.2m-1.}{m.2m.3m}; D = \frac{1.m-1.2m-1.3m-1.}{m.2m.3m.4m};$$

u. s. f.

In den Formeln für die partiellen Brüche und die genäherten Brüche hat man nun zu jeder der Größen A, B, C, etc. den Factor z zu setzen. Es ist also

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{z}{m}; \quad \frac{\alpha\beta}{1} = \frac{(m-1)z}{2.1m};$$

$$\frac{\beta\gamma}{1} = \frac{(m+1)z}{2.3m}; \quad \frac{\gamma\delta}{1} = \frac{(2m-1)z}{2.3m};$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{1} = \frac{(2m+1)z}{2.5m}; \quad \text{etc.}$$

Man entdeckt hier schon ein Gesetz der Fortschreitung; allein es noch weiter zu verfolgen, ist wegen der zu weitläufigen Rechnung zu beschwerlich, da schon der letzte Bruch eine ziemlich lange Rechnung erfordert. Die Differential- und Integralrechnung sind hier behülflich, so fern man sich ihrer in einer Frage aus der Analysis des Endlichen bedienen will. Denn der Kettenbruch, welchen wir hier gefunden haben, ist derselbe mit dem, welcher nach la Grange oben (59.) angeführt ist. Man hat in unsern partiellen Brüchen nur zu setzen m statt $\frac{1}{m}$, um jene zu erhalten.

63. Die genäherten Brüche sind nach den Formeln in (60. V.), für $(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1$ folgende:

Digitized by Google

I. $\frac{z}{m}$.

II. $\frac{2z}{2m+(m-1)z}$.

III. $\frac{6mz+(m+1)z^2}{6m^2+2m(2m-1)z}$.

IV. $\frac{12mz+6mz^2}{12m^3+6m(2m-1)z+(m-1)(2m-1)z^2}$.

Lambert hat in seinen Beyträgen zur Mathematik, Th. II. Abth. 3. §. 30. eine Formel für $\sqrt[m]{(a^m+b)}$ angegeben, die nicht so nett ist, als die hier gefundene.

64. Exempel. Es sey aus der Zahl 128 die Cubikwurzel zu ziehen. Diese ist $=125+3=5^3+3=5^3(1+\frac{3}{125})$. Hier ist $m=3; z=\frac{3}{125}$. Der Werth des Bruches II. ist $=\frac{1}{126}=0,0079365..$ Also $(1+\frac{3}{125})^{\frac{1}{3}}=1,0079365..$ und $\sqrt[3]{128}=5,0396825..$ welcher Werth von dem in Th. I. S. 336 gefundenen in der sechsten Decimalstelle abzuweichen anfängt. Die Formel III. ist $=0,007936842..$ Daher $\sqrt[3]{128}=5,03968421..$ bis in die achte Decimalstelle mit dem angeführten übereinstimmend.

65. Exempel. Es sey die Cubikwurzel aus 2 zu finden, und man setze wie in (58.) auch hier $z=1$, so ist der Werth von II. $=\frac{1}{4}$, und von III. $=\frac{11}{42}$. Also fällt diese Wurzel zwischen 1,25 und 1,2619.. Der zweyte und dritte genäherte Werth kommen hier der Wurzel, 1,259921 04989.. viel näher als in (58.) der vierte und fünfte. Der Formel IV. giebt den Werth $\frac{27}{104}$, also nach dieser $\sqrt[3]{2}=\frac{131}{104}=1,25961...$

Digitized by Google

66. Den ersten Gebrauch der Kettenbrüche hat, wie schon erwähnt ist, der Lord Brouncker gemacht. gemacht. Der Beweis, den Wallis von desselben Ausdrucke zu geben versucht hat, ist nach Eulers Urtheile (Comm. Petrop. vet. T. IX. p. 101) unbefriedigend, und scheint von der Methode des Erfinders ganz verschieden zu seyn.

Huyghens zeigte, wie die Kettenbrüche dienen, das Verhältniß zweyer großen Zahlen durch kleinere beynahe auszudrucken, so daß keine kleinere es genauer angeben, in der Abhandlung: de automato planetario, in den Opp. reliquis, Vol. II. Zu der Berechnung des Räderwerks in dem Planetarium war dieses nöthig.

Man ließ es aber bey einigen einzelnen solchen Reihenbrüchen bewenden, bis daß Euler es unternahm, eine Theorie derselben zu errichten, auch selbst transscendente Formeln durch sie darzustellen. Dieses geschah zuerst in den Comment. Acad. Petrop. T. IX. a. a. 1737. wo vermuthlich die Benennung, fractio continua, zuerst vorkommt. Diese Untersuchung setzte er fort, und theilte sie in einer ausführlichen Abhandlung mit, eb. das. T. XI. Hier wird die Lehre von den Kettenbrüchen ganz analytisch und sehr tiefsinnig behandelt. Zuerst von der Verwandlung dieser Brüche in Reihen und umgekehrt dieser in jene. Dann von dem Zusammenhange derselben mit Brüchen, deren Zähler und Nenner Producte der Glieder einer arithmetischen Reihe sind, oder den numerischen Facultäten nach Kramp, auch von der Verwandlung der Kettenbrüche in Integralformeln, oder dieser in jene. In den Comment. novis Petrop. T. XI. a. a. 1765. zeigte Euler eine besondere Methode an, Quadratwurzeln in Kettenbrüche zu entwickeln, in der Abhandlung, worin ein neuer Algorithmus zur Auflösung der Pellschen Aufgabe angewandt wird. In denselben T XVIII a. a. 1773. in der Abhandlung, de resolutione irrationalium per fractiones continuas, werden die Kettenbrüche als Hülfsmittel bey einer analytischen Aufgabe gebraucht, wo ein Kleinstes gesucht wird. In den Actis Petrop. T. III.

Digitized by Google

P. I. a. a. 1779. p. 3 - 29. wird der Ursprung der Kettenbrüche höchst allgemein angegeben, und mehrere analytische Formeln werden durch sie entwickelt. Eben das. T. VI. P. II. a. a. 1782. kommen bey Gelegenheit einer Integralformel viele Entwickelungen analytischer Formeln durch Kettenbrüche vor. Noch ist in den Opusculis analyticis, T. II. eine Abhandlung: de transformatione serierum in fractiones continuas, worin eine ganz neue Methode gelehrt wird, irgend welche unendliche Reihe in continuirliche Brüche zu verwandeln. Diese Abhandlung ist wegen der netten Darstellung der Grundeigenschaften dieser Brüche besonders zu empfehlen. Das letzte Capitel in der Introductione in Anal. Infin. enthält einen faßlichen Unterricht über die Kettenbrüche.

Von Dan. Bernoulli ist in den Comm. novis Ac. Petr. T. XX. eine hieher gehörige Abhandlung enthalten, die nichts auszeichnendes hat.

La Grange hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie, XXIII. u. XXIV. Bande, über die numerische Auflösung der Gleichungen die Kettenbrüche zur Darstellung der Wurzeln angewandt. Diese sind im J. der Rep. VI. mit vielen Zusätzen neu herausgekommen. Unter den Zusätzen, die von diesem Analysten der französischen Ausgabe von Eulers Algebra beygefügt sind, befindet sich ein Aufsatz über die continuirlichen Brüche, der elementarisch ist, und sich auf die numerische Anwendung bezieht. Dieser Aufsatz ist, mit einigen geringen Abänderungen, der neuen Ausgabe von Clairauts Algebra vom Jahre V oder 1797 beygefügt. Noch eine Abhandlung von jenem großen Analysten über die Kettenbrüche ist in (59.) angeführt.

Lambert von der Verwandlung der Brüche in den Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, Th. II. 1. Abschn.

Hindenburg über die continuirlichen Brüche in dem Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathematik Jahrgang von 1781 und 1782. Von demselben ist in

Digitized by Google

rn Archiv der Mathematik, 1. u. 2. Heft ein combina-
risches Verfahren angewiesen, die Werthe dieser Brüche
und außer der Ordnung zu bestimmen.

Burckhardti methodus combinatorio-ana-
tica evolvendis fractionum continuarum valori-
as maxime idonea, Lipsiae, 1794.

Die Lehre von den continuirlichen Brüchen, nebst
ren vorzüglichsten Anwendungen, von C. J. Kausler.
tuttgard, 1803. 168 S. 8.

Kettenlinie ist diejenige, nach welcher sich eine
eichförmig schwere, vollkommen biegsame, nicht dehn-
re, mathematische Linie, die an zwey Puncten aufgehängt
, krümmt. Die Gleichung für diese Linie muß aus der
Mechanik hergeleitet werden, welches in der zweyten Ab-
eilung dieses Werks geschehen wird. Hier soll die Linie
m Beyspiel dienen, wie aus einer gegebenen Eigenschaft
ner Curve die Gleichung für dieselbe gefunden wird.

1. Es werde nun die Curve gesucht, an welcher
r Bogen von einem gegebenen Puncte an der Tangente
s Winkels der berührenden mit der Ordinate proportio-
l ist.

Die Curve (Fig. 10) sey ADB, die Abscissenlinie
C, eine darauf senkrechte Ordinate MP, die berührende in
sey EMm, welche mit der Ordinate MP den Winkel
MP = ω mache. Der Bogen DM, auf der einen
er andern Seite von DC sey der Tangente von EMP
oportional, so ist DC die Axe der krummen Linie ADB.
er Bogen DM sey = s, so ist s = a tang ω, wo a
ne gegebene oder angenommene Linie ist. Dadurch ist
imlich der Bogen s der tang ω proportional.

2. Es sey DP = x; PM = y. Nun ist (be-
hrende Linie, 13.) $\frac{PE}{PM} = \frac{\partial x}{\partial y}$, das ist,

$\text{tang}\,\omega = \frac{\partial x}{\partial y}$, und $\cot\omega = \frac{\partial y}{\partial x}$. Ferner ist

$= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, s. Rectification; also

Digitized by Google

$\frac{\partial s}{\partial x} = V(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}) = V(1 + \cot\omega^2) = \frac{1}{\sin\omega}$

(Goniometrie, 14.). Auch ist $\frac{\partial s}{\partial y} = V(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})$

$= V(1 + \text{tang}\,\omega^2) = \frac{1}{\cos\omega}$. Oder es ist $\partial x =$ $\partial s . \sin\omega$, und $\partial y = \partial s . \cos\omega$.

3. Die gegebene Gleichung, $s = a\,\text{tang}\,\omega$, werde differentiirt, so ist $\partial s = a\,\partial\,\text{tang}\,\omega = \frac{a\,\partial\omega}{\cos\omega^2}$ (Differentialformeln, 38. I. Th. S. 873). Dieser Werth von ∂s in (2.) gesetzt, giebt

$$\partial x = \frac{a \sin\omega . \partial\omega}{\cos\omega^2} \; ; \; \partial y = \frac{a\,\partial\omega}{\cos\omega} .$$

Da $\partial\omega = -\frac{\partial\cos\omega}{\sin\omega}$, und auch $\partial\omega = \frac{\partial\sin\omega}{\cos\omega}$ (a. a. O.), so ist

$$\partial x = -\frac{a\,\partial\cos\omega}{\cos\omega^2} \; ; \; \partial y = \frac{a\,\partial\sin\omega}{1 - \sin\omega^2} .$$

Die Integration giebt (Integralformel, 1. u. 12.)

$$x = \frac{a}{\cos\omega} + \text{Const.} = \frac{a}{\cos\omega} - a.$$

$$y = \tfrac{1}{2} a \log. \text{nat.} \frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega}$$

$$= a \log \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega),$$

(Goniometrie, 40.). Beide, x und y, sind Null für $s = o$, und $\omega = o$.

4. Diese Formeln geben jede der beiden Coordinaten durch eine vermittelnde Größe, den Winkel ω. Um y durch x auszudrücken, muß in dem Werthe von y der $\cos\omega$ eingeführt werden, wodurch darauf derselbe eine Function von x wird. Zuerst ist

Digitized by Google

$$\frac{-\sin\omega}{-\sin\omega} = \frac{(1+\sin\omega)^2}{\cos\omega^2}, \quad \text{daher}$$

$$a\log\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega}. \quad \text{Ferner ist } \sin\omega^2 = 1-\cos\omega^2$$

$$-\frac{a^2}{(x+a)^2} = \frac{xx+2ax}{(x+a)^2}. \quad \text{Daraus wird nun}$$

$$y = a\log.\frac{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}}{a},$$

5. Es sey e die Basis der natürlichen Logarith-
, so ist

$$e^{y:a} = \frac{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}}{a},$$

$$e^{-y:a} = \frac{a}{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}},$$

$$= \frac{a+x-\sqrt{(xx+2ax)}}{a},$$

aus ist

$$e^{y:a}+e^{-y:a} = \frac{2(a+x)}{a},$$

$$x = \tfrac{1}{2}a(e^{y:a}+e^{-y:a}-2).$$

6. Aus der Gleichung (4.) folgt die Differen-
leichung zwischen ∂y und ∂x, nämlich

$$\partial y = \frac{a\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}},$$

) der Formel für das Differential eines Logarithmen
fferentialformeln, 14 I.). Das Integral dieser For-
ist in dem Artikel, Integralformel, 56. angegeben.

7. Unmittelbar kommt man auf diese Differential-
hung folgendergestalt. Da $s = a\,\text{tang}\,\omega$, so ist
$= \frac{a\partial x}{\partial y}$. Man differentiire diese Gleichung so,

Digitized by Google

daß ∂y constant sey, und es ist $\partial s = \frac{a\partial^2 x}{\partial y}$, oder $\partial y = \frac{a\partial^2 x}{V(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Die Integration dieser Formel ist in Integralgleichung, 79. gewiesen.

8. Es sey $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, so ist der Halbmesser der Krümmung $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$, s. Krümmungskreis. An der Kettenlinie ist $p = \frac{a}{V(xx+2ax)}$, oder $p = a(xx+2ax)^{-\frac{1}{2}}$, also $\partial p = -a(xx+2ax)^{-\frac{3}{2}}(x+a)\partial x$. Ferner $1+pp = \frac{(x+a)^2}{xx+2ax}$; und $(1+pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{(x+a)^3}{(xx+2ax)^{\frac{3}{2}}}$. Dadurch ist nun $r = \frac{(x+a)^3}{a}$.

9. An dem Scheitel ist der Halbmesser der Krümmung $= a$.

10. Es werde $x = a$ genommen, so ist $y = a \log. nat. (2+V3) = a \log. nat. (3,73205\ldots) = 1,316957\,a$. Ein Kreis mit dem Halbmesser a durch den Scheitel der Kettenlinie, aus einem Mittelpuncte auf der Axe, beschrieben, fällt innerhalb jener Curve. Der Unterschied der beiderseitigen Ordinaten, für dieselbe Abscisse $= a$, ist $0,316957\,a$.

11. Für $x = a$ ist $\frac{1}{\cos\omega} - 1 = 1$, also $\cos\omega = \frac{1}{2}$, und $\omega = 60°$.

Digitized by Google

12. Wenn $x = y$ seyn soll, so ist $\frac{1}{\cos \omega} - 1$

g. nat. tang. $(45° + \frac{1}{2}\omega)$. Hieraus läßt sich ω urch Versuche finden. Die Neperischen oder Ursi- n Tafeln leisten nebst einer Tafel der Secanten hier ste. Wenn in den letztern die Sinus so wie ihre Lo- men durch 100 Mill dividirt werden, und der Quo- für die Sinus $= z$ heißt, so ist log. Nep. $z =$ log. $\frac{1}{z}$. Nun ist log. nat. tang $(45° + \frac{1}{2}\omega) =$ nat. $\frac{1}{\text{tang}(45° - \frac{1}{2}\omega)}$, folglich ist log. Nep. $(45° - \frac{1}{2}\omega) = \text{sec.}\,\omega - 1$. Nach einigen Ver- findet man $\omega = 67° 32'$ nahe. Es ist nämlich

sec $67° 32' - 1$	$= 1{,}61680$
g. Brigg. tang. $78° 46'$	$= 0{,}70209$
g. nat. tang. $78° 46'$	$= 1{,}61641$.

Der Werth von x oder y ist, wenn beide gleich groß $= 1{,}6168\,a$ beynahe.

13. Wenn man mit einem Halbmesser $= 1{,}6168\,a$ Halbkreis beschreibt, so schließt dieser die Kettenli- deren Grundlinie oder Doppelordinate mit dem Durch- r des Halbkreises übereinkommt, in sich ein bey einem einschaftlichen Scheitel. Die Krümmung an der Ket- nie an dem Scheitel ist größer als die am Kreise in dem hältniße 16168 : 10000.

Die Bemerkungen (10—13.) sind für die Bau- in der Lehre von den Gewölben nützlich.

Kettenregel ist in der Arithmetik die Vorschrift, die Vergleichung zweyer Größen von verschiedener Ein- durch Mittelgrößen angestellt wird, es mögen diese jene gleichartig seyn, oder ungleichartig, in welchem le sie als gleichgeltende oder gleichgültige (wie Waare Geld) mit einander vertauscht werden.

Kettensatz ist die Zusammenstellung der verbunde- Größen nach dieser Regel.

Digitized by Google

Die Benennung rührt von der Art her, wie die Größen zusammen gestellt werden. Man vertauscht nach derselben eine Gattung von Größen folgeweise gegen eine andere, bis man auf diejenige kommt, nach welcher gefragt wird. Man nennt sie auch die Regel Multiplex oder Conjointe. Sie wird im gemeinen Leben viel gebraucht, bey der Vergleichung von Maaßen, Gewichten, Geldsorten, bey der Vertauschung von Waaren und Geld, wohin auch Gold und Silber als Waaren gehören. Die kaufmännischen Rechnungen werden nach dieser Regel geführt, die durch die Ansetzung der Größen viele Leichtigkeit in der Ausführung gewährt.

Ein paar Beyspiele werden das Verfahren gleich zeigen, und den allgemeinen Ausdruck der Regel begreiflich machen.

I. Wie viel rheinländische Fuß sind 100 englische Fuß, wenn 81 englische Fuß gleich sind 76 Pariser, und 29 Pariser gleich 30 rheinländischen?

x rheinl. F. = 100 engl. F.
81 engl. F. = 76 P. F.
29 P. F. = 30. rh. F.

Man dividire das Product der Zahlen rechter Hand durch das Product der Zahlen linker Hand: der Quotient ist die gesuchte Zahl. Es werden nämlich zuerst die 100 englische Fuß nach dem Verhältnisse 81 : 76 in Pariser Fuß verwandelt, und diese nach dem Verhältnisse 29 : 30 in rheinländische. Diese beiden Operationen werden durch das angegebene Verfahren zusammengezogen. Wenn die beiden Zahlencolumnen gemeinschaftliche Factoren enthalten, so werden diese durch die Division gegen einander aufgehoben. Das Facit ist $97\frac{40}{83}$ rheinl. Fuß.

II. Eine englische Krone hält 573 As fein in Troysgewicht; 4864 As Troys machen eine cölnische Mark; eine Mark fein Silber ist werth 20 Gulden Conventionsgeld, ein Gulden hält 16 ggr.; wie viel beträgt eine Krone in Groschen Conventionsgeld?

Digitized by Google

x ggr. = 1 engl. Krone
1 engl. Krone = 573 As fein Troys
4864 As (fein) = 1 Mark cöln. (fein)
1 Mark cöln. f. = 20 Gulden C. G.
1 Gulden = 16 ggr.

ch demselben Verfahren wie vorher ist eine Krone gleich
× 1 × 20 × 16 dividirt durch 4864 × 1 × 1, das
$\frac{2865}{76}$ ggr. oder 37 ggr. 8 ₰.

Es seyn A, B, C, D, E, etc. Einheiten von
chiedener Größe und Beschaffenheit, als Maaßen, Räu-
Gewichte, Geldsorten, Waaren, u. dgl. Ferner
er Größe oder dem Werthe nach

a. A = b. B
c. B = d. C
e. C = f. D
g. D = h. E,

t aceg. A = bdfh. E.

Denn es wird hier nach der Reihe B mit C, C mit
D mit E vertauscht. Erstlich ist $B = \frac{d}{c} C$, also
$A = \frac{bd}{c} C$, und ac. A = bd. C. Zweytens ist
$= \frac{f}{e} D$, also $ac. A = \frac{bdf}{e} D$, und ace. A
bdf. D. Auf gleiche Art ist aceg. A = bdfh. E,
so ferner, so viele Mittelgrößen zwischen der ersten und
ten auch seyn mögen.

Nun sey eine Anzahl von der Gattung A, nämlich
A, in eine gleichgeltende Anzahl von der Gattung E zu
wandeln, so ist $m. A = \frac{bdfh}{aceg} . m. E.$

Digitized by Google

Man setze die gesuchte Anzahl der Einheiten E = x, so ist

x. E = m. A
a. A = b. B
c. B = d. C
e. C = f. D
g. D = h. E,

und x ist gleich dem Quotienten von dem Producte der Zahlen m, b, d, f, h dividirt durch das Product der Zahlen a, c, e, g.

Man fängt also an mit dem Fragesatze, wie viele Einheiten E betragen die gegebenen m Einheiten A? und setzt alsdann die Vergleichungssätze für die Einheiten A und B, B und C, u. s. f. hin, bis man an die Gattung von Einheiten kommt, deren Anzahl gesucht wird. — Auf diese Art verfährt man bey irgend einer Anzahl von Vergleichungssätzen.

Oft wird nur eine Vergleichung zwischen zweyerley Einheiten gesucht. Alsdann fällt der Fragesatz weg. Man fängt mit dem Vergleichungssatze für die eine Gattung von Einheiten an, und fügt die Vergleichungssätze nach der Reihe hinzu, bis zu demjenigen für die andere Gattung, die mit jener erstern verglichen werden soll. Z. B.

1 Mark Silber fein	=	21 Gulden Preuß.
3 Gulden	=	2 Thlr.
5½ Rthlr.	=	1 Fr. d'or.
35 Fr. d'or	=	1 Mark Gold zu 21⅔ Kar.
24 M. G. (21⅔ K.)	=	21⅔ M. S. (24 K.)
198 Mark Silber fein	=	13 Mark Gold fein.

nachdem in den Producten auf beiden Seiten die gemeinschaftlichen Factoren weggelassen sind. Oder es sind 100 Mark Gold fein = 1523 Mark Silber fein, und der Werth des Goldes zum Silber $15\frac{3}{23} : 1$.

Digitized by Google

Zur Übung noch ein paar Beyspiele.

erde das Gewicht von 1 Pariser Duod. Cubikzoll
r in Pariser Gewicht aus dem Gewichte eines rheins
chen Decimalcubikzolles nach cölnischem Gewichte
t.

Grains Pariſ. Gew.	=	1 Pariſ. Duod. Cub. zoll Waſſer
³ Par. Cubz.	=	30³ Rheinl. Cubz. Duod.
Rh. Duod. Cubz.	=	1000 Rh. Dec. Cubz.
Rh. Dec. Cubz. Waſſer	=	502,7 Gran Cöln.
Gr. Cöln.	=	1 Unze Cöln.
Unzen Cöln.	=	19 Unzen Troys
Unze Troys	=	640 As Troys
As Troys	=	1 Unze Pariſ. Gew.
Unze P. G.	=	576 Grains.
x	=	369 Grains.

ſind die Logarithmen bequem zu gebrauchen.

Wollte man unmittelbar das Gewicht eines ehemah-
Pariſer Cubikfußes Waſſer in Pfunden wiſſen, ſo
r Anſatz folgender:

Pf. Par. Gew.	=	1 Cubf. Waſſer Par.
Cubf.	=	1000 Dec. Cubz.
Cubz. Par.	=	30³ Cubz. Rheinl.
Dec. Cubz. Rh.	=	502,7 Gr. Cöln.
Gr. Cöln.	=	1 Unze Cöln.
Unz. Cöln.	=	19 Unz. Troys
Unz. Troys	=	640 Unz. Par.
Unzen	=	1 Pf. Par.
x	=	69,1642 Pfund.

Beſtimmung des Gewichts eines rheinländiſchen De-
cubikzolles iſt aus Karſtens Anleitung zur Kennt-
er Natur, S. 47. genommen. Das Waſſer deſtil-

Digitized by Google

lirtes, die Temperatur zwischen 60] und 70 Gr. Fahrenheit.

Ein Beyspiel aus der spanischen Münzrechnung mag noch Platz finden.

32 Reales de Vellon	=	17 Reales de Plata
1 Real d. Pl.	=	34 Maravedi d. Pl.
375 Mar. d. Pl.	=	1 Ducado de Cambio
1 Duc. d. C.	=	98 Grotvläm. Banco in Amsterdam.
12 Grvl.	=	1 ßl. vl..
1 ßlvl.	=	6 Stüver Banco
100 Stvr. Bco	=	104 Stvr. Cour.
37 Stvr. Cour.	=	24 ggl. Sächs.
115625 Reales de Vellon	=	184093 ggl. Sächs.

Um das Verhältniß in kleinern Zahlen mit der geringsten Abweichung auszudrucken, verwandle man den Bruch $\frac{184093}{115625}$ in einen Kettenbruch, welcher ist

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \text{etc.}}$$

Dadurch wird der genäherte Werth $= \frac{121}{76}$, so daß 76 Realen gleich sind 121 Groschen Sächsisch oder 5 Rthlr. 1 ggl.

Die Angaben sind aus Reimers Rechenkunst (Hamburg, 1776.) S. 270, 234. genommen.

Man kann die Kettenregel auch als eine Zusammensetzung von Verhältnissen ansehen. Nur muß man, da die Einheiten, A, B, C, D, etc. ungleichartige Größen

Digitized by Google

nnen, bloß auf den Zahlenwerth sehen, den sie bey rtauschung haben. Es sey

A : B = b : a
B : C = d : c
C : D = f : e
D : E = h : g,

so ist A : E = b d f h : a c e g,

mit dem oben gefundenen Vergleichungssatze, a c e g. A = b d f h. E, übereinstimmt.

Kästner trägt die Kettenregel nach dieser Methode den Anfangsgründen der Arithmetik § 56, und Fortsetzung der Rechenkunst S. 27. ff. Der Coansatz mit Gleichheitssätzen ist viel bequemer.

Es giebt aber andere Aufgaben, wo der Kettensatz bequem ist, als die Zusammenstellung von Proen, nämlich wenn die Größen A, B, C, D, etc. alle rtig sind, z. B. wenn man die Interessen verschieCapitalien bey verschiedenen Zeiten, Procenten und orten vergleichen wollte, oder die Zeiten, worin dene Arbeiter gewisse Arbeiten von verschiedener ffenheit zu Stande bringen, als Gräben von unterer Länge, Breite und Tiefe. Die Kettenrent eigentlich da, wo die Einheiten der Größe verändert werden.

Die Kettenregel finde ich schon in Simon Jacob Coburgk Rechenbuch, Frankf. a. M. 1557. Er S. 66. ein Beyspiel, um zu zeigen, wie man viele und Satzungen der de Tri in eine einige Satzung geringer Mühe bringen und reduciren könne. Die eichungssätze setzt er zuerst hin, neben ihnen rechter die Größe, von welcher etwas gefragt wird, in dem iele 128 Pfund, wovon der Preis gesucht wird. Er es könne das Verfahren gründlich durch composim proportionum erwiesen werden, welches er aber

Digitized by Google

der Kürze wegen unterlasse. Die Benennung Kettenregel gebraucht dieser Rechenmeister nicht.

Noch früher kommt in Peter Apianus Unterweysung aller Kaufmanns-Rechnung, zweyte Aufl. 1543. bey einer Wechselrechnung der Kettensatz vor, in der Form, wie er oben angegeben ist, nur daß der hier erste Vergleichungssatz bey Apianus der letzte ist. Die gesuchte Größe, welche er durch den Buchstab o bezeichnet, macht unten rechter Hand den Beschluß.

Kästner sagt a. a. O. S. 30. er habe nicht so genau untersucht, wer den Kaufleuten ein Verfahren bekannt gemacht habe, das die Mathematiker vorlängst brauchten. Wenn er sich recht erinnere, werde in dieser Bedeutung Graumann für den Erfinder der Kettenregel angegeben. Was dieser in der Vorrede zu seinem Europäischen Arbitrage-Tractat von seiner Erfindung oder von seinen Verdiensten um die Anwendung der Kettenrechnung sagt, möchte auf Unkunde älterer Methoden beruhen.

Kleinstes, s. Größtes und Kleinstes.

Knoten einer Curve ist ein Punct, worin sich zwey zusammenhängende Zweige derselben schneiden, so daß dadurch eine blattähnliche Figur, oder Ovale entsteht. Es begegnen sich hier zwey Reihen von Ordinaten, die durch eine dritte Reihe verbunden sind, in einer gemeinschaftlichen. Dergleichen Punct ist an der Curve, Tab. I. I. Fig. 37. Tab. V. Fig. 81. Fig. 79. In diesen Punct kann zugleich ein Biegungspunct (Inflexionspunct) fallen, aber erst bey Linien vom vierten Grade, auch ein Schlangenpunct, oder auf dem einen Zweige ein Biegungspunct, auf dem andern ein Schlangenpunct. Cramer Analyse des lignes courbes. Ch. XIII.

Konoid, kegelartiger Körper (Conoides) ist ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Linie um eine Axe entsteht, wenn die Linie diese Axe schneidet, und ihre auf die Axe senkrechten Ordinaten fortweg zunehmen. Diese Bestimmungen sind nöthig, um die Ähnlichkeit

Digitized by Google

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Körpers mit einem geradseitigen Kegel zu erhalten. nn die krumme Linie die Axe der Drehung nirgends eidet, ihre Ordinaten aber beständig entweder zuneh- oder abnehmen, so entsteht ein cylinder- oder wal- förmiger Körper, (Cylindroides), z. B. wenn Hyperbel sich um die conjugirte Axe dreht. Ist die e in sich selbst zurücklaufend, wie eine Ellipse, so ent- t ein kugelartiger Körper (Sphaeroides). Diese Formen von Körpern heißen: durch Umdrehung andene runde Körper, (Solides de revolution). Schnitte, senkrecht auf die Axe der Umdrehung, sind alle ise. Wenn die Schnitte durch die Axe eine andere de, in sich zurücklaufende Figur haben, so sind es e Körper überhaupt.

1. Die Konoiden, welche am meisten verdienen be- kt zu werden, sind das paraboliſche und das hy- bolifche, deren jenes durch eine Parabel, dieses h eine Hyperbel bey der Umdrehung um die Axe dieser en beschrieben wird. Das hyperboliſche besteht aus y verbundenen kegelartigen Körpern, wie die Hyperbel zwey entgegengesetzten gleichen Theilen. Die Axe der erbel ist hier die ganze unbestimmte gerade durch den telpunct und die beiden Scheitel.

2. Archimedes hat von den Konoiden (1.) und häroiden ein Buch geschrieben, worin er mit großem arfsinn die Figuren ihrer verschiedenen Schnitte und Inhalt der körperlichen Abschnitte bestimmt, der nitt mag senkrecht oder schief gegen die Axe der Kör- gelegt seyn.

3. Aufg. Es sey B A B (Fig. 11.) eine Para- die durch die Drehung um ihre Axe ein paraboliſches oid beschreibt. Dieses werde durch eine Ebene ge- itten, die nicht durch Axe geht, auch nicht senkrecht uf ist: es soll die Gestalt des Durchschnittes der ne mit der Oberfläche des Konoids bestimmt werden.

Man setze durch die Axe der Parabel eine Ebene echt auf die schneidende Ebene. Der Durchschnitt

Digitized by Google

jener Ebene mit der Oberfläche des Konoids ist die angenommene beschreibende Parabel, und werde durch die Parabel BAB der Zeichnung dargestellt. Der Durchschnitt beider Ebenen ist die gerade DE. Die Figur DMENDstelle den Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der konoidalischen Oberfläche perspectivisch dar. Man ziehe durch irgend einen Punct P der Linie DE die senkrechte QR auf die Axe, welche die Parabel in Q und R, und die Axe in S treffe. Durch diese QR setze man eine Ebene senkrecht auf die Axe. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der konoidalischen Oberfläche ist ein Kreis, da bey der Umdrehung der Parabel um AC die Ordinate QS oder RS in dieser Ebene einen Kreis beschreibt. Die Durchschnittslinie MPN beider schneidenden Ebenen ist senkrecht auf die Ebene BAB (Ebene, 22.), also ist MPN senkrecht auf QR, und es ist, zufolge der Eigenschaft des Kreises, $MP^2 = MS^2 - PS^2 = QS^2 - PS^2$. Hier ist QS durch AS, und PS durch DP gegeben. Man hat also beide durch DP und die gegebenen Größen auszudrucken, um den Werth von PM^2 in Beziehung auf DP zu erhalten. Man ziehe DG senkrecht auf AC, so sind außer dem Parameter der Parabel die Linien AG und DG gegeben, nebst dem Winkel DFA, welchen die Axe AC mit der schneidenden Ebene DMEND macht. Es sey der Parameter der Parabel $= a$, $AG = c$; $DG = d$; der W. $DFA = \varphi$; $DP = x$; $PM = y$, wo PM als Ordinate des Schnittes DMEND zu der Abscisse DP betrachtet wird. Es ist GS gleich der senkrechten PT von P auf DG in der Ebene der Parabel, also $GS = DP \times \sin PDG = x \cos \varphi$, und $AS = c + x \cos \varphi$. Dadurch ist $QS^2 = ac + ax \cos \varphi$, weil QS eine Ordinate an der Parabel ist. Ferner ist $PS = GT = DT - DG = x \sin \varphi - d$. Durch diese Werthe von QS und PS erhalten wir die Gleichung,

$$y^2 = ac + ax \cos \varphi - (x \sin \varphi - d)^2.$$

Da DG eine Ordinate an der Parabel ist, so ist $d^2 = ac$, und daher

Digitized by Google

$y^2 = (a\cos\varphi + 2d\sin\varphi)x - \sin\varphi^2 x^2$.

ses ist überhaupt eine Gleichung für eine Ellipse, in her die Abscissen auf einem Durchmesser von dem ei- Scheitel an genommen werden, und die Ordinaten dem rn Durchmesser parallel sind. (Ellipse, 16). Da die rdinaten senkrecht auf einander sind, so ist der Durch- er für die Abscissen eine der beiden Axen der Ellipsen, zwar die größere, wegen des Coefficienten von x^2, kleiner als die Einheit ist.

4. Es sey die halbe große Axe $= f$, die halbe e $= g$, so ist (Ellipse, 7.)

$$y^2 = \frac{2gg}{f}x - \frac{gg}{ff}x^2,$$

Vergleichung der Coefficienten giebt

I. $a\cos\varphi + 2d\sin\varphi = \frac{2gg}{f}$,

II. $\sin\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$, oder $g = f\sin\varphi$,

her wird die erstere Gleichung

$$a\cos\varphi + 2d\sin\varphi = 2g\sin\varphi,$$

aus $2g = a\cot\varphi + 2d$, also

$$= \frac{a\cot\varphi + 2d}{\sin\varphi} = \frac{a\cos\varphi + 2d\sin\varphi}{\sin\varphi^2}.$$

5. Man ziehe EH senkrecht auf AC, so ist DG EH $=$ DE $\times \sin\varphi = 2f\sin\varphi$, also DG $+$ H $= 2g$, der kleinen Axe der Ellipse.

6. In dieser Auflösung ist die Durchschnittslinie aus der Gleichung für den elliptischen Schnitt her- itet. Sie kann aber auch unmittelbar aus den gege- en AF, AG und der dadurch in der Parabel bestimm- DF hergeleitet werden. Es ist nämlich, wenn DG, als Ordinaten an der geraden DFE betrachtet wer-

$$DG : EH = GF : FH.$$

Digitized by Google

Eben diese, als Ordinaten an der Parabel, geben die Proportion,

$$DG^2 : EH^2 = AG : AH.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$AG : AH = GF^2 : FH^2.$$

Hieraus ist

$$AG : GH = GF^2 : FH^2 - GF^2$$
$$= GF^2 : (FH + GF)(FH - GF).$$

Folglich ist $AG(FH - GF) = GF^2$,
und daraus $AG \times GH = GF^2 + 2AG \times GF = (AF + AG)GF$. Da $GH : GF = DE : DF$ ist, so ist

$$AG \times DE = (AF + AG)DF,$$

$$\text{und } DE = \frac{AF + AG}{AG} \times DF.$$

Die Linie AF bleibt nicht willkührlich, wenn DF und AG angenommen sind, so wie auch AG aus AF und DF bestimmt wird.

Aus diesem Werthe von DE wird durch die Einführung des Winkels $AFD = \varphi$ der vorher gefundene Ausdruck erhalten. Es ist $AF = c + d \cot \varphi$ und

$$DF = \frac{d}{\sin \varphi}.$$

7. Um DE durch Grössen auszudrucken, die von einander unabhängig sind, verfahre man folgendergestalt. Es werden der Parameter a, der Punct F in dem Abstande vom Scheitel, $AF = h$, und der Winkel $AFD = \varphi$ gegeben. Nun ist

$$AF = AG + GF = \frac{DG^2}{a} + DF.\cos\varphi$$

$$= \frac{DF^2.\sin\varphi^2}{a} + DF.\cos\varphi.$$

Digitized by Google

ist eine quadratische Gleichung für DF, wodurch der Werth von FE gegeben wird. Es ist

$$DF^2 + \frac{a\cos\varphi}{\sin\varphi^2} DF = \frac{ah}{\sin\varphi^2}.$$

tive Wurzel dieser Gleichung ist

$$= V\left(\frac{a^2\cos\varphi^2}{4\sin\varphi^4} + \frac{ah}{\sin\varphi^2}\right) - \frac{a\cos\varphi}{2\sin\varphi^2}.$$

ative Wurzel entgegengesetzt genommen ist

$$= V\left(\frac{a^2\cos\varphi^2}{4\sin\varphi^4} + \frac{ah}{\sin\varphi^2}\right) + \frac{a\cos\varphi}{2\sin\varphi^2}.$$

$$= \frac{V(a^2\cos\varphi^2 + 4ah\sin\varphi^2)}{\sin\varphi^2}.$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich in den zuerst gefun- wenn man für h seinen Werth setzt, nämlich c +. Es ist $ah = ac + ad\cot\varphi = dd +$ $\varphi. = dd + \frac{ad\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Dadurch wird die unter dem Wurzelzeichen $= a^2\cos\varphi^2 +$ $\varphi^2 + 4ad\sin\varphi.\ \cos\varphi = (a\cos\varphi +$ $\varphi)^2$, und daher $DE = \frac{a\cos\varphi + 2d\sin\varphi}{\sin\varphi^2}$.

. Aufg. Das Konoid sey ein hyperbolisches, die Gestalt des Durchschnittes einer schneidenden estimmt werden, die nicht durch die Axe geht, auch trecht auf dieselbe ist.

Es mag um eine weitschichtige Figur zu ersparen, ume Linie in Fig. 11. eine Hyperbel vorstellen, um re AC sie ein Konoid beschreibt. Der Durch- er schneidenden Ebene mit der Oberfläche des hy- hen Konoids sey die Figur DMEND. Auch

Digitized by Google

sey QMRNQ der Durchschnitt einer auf die Axe s
rechten Ebene. Eben so wie bey dem paraboliſchen
noid iſt $MP^2 = QS^2 - PS^2$, und, mit Beybehalt
der vorher gebrauchten Benennungen, $AS = c$
$x \cos\varphi$; $PS = x \sin\varphi - d$. Die halbe Haup
der Hyperbel ſey $= a$, die halbe zugeordnete $= b$,
Abſciſſe auf der Axe vom Scheitel an genommen, ſey =
die normale Ordinate $= u$, ſo iſt

$$u^2 = \frac{2bb}{a} t + \frac{bb}{aa} t^2 \text{ (Hyperbel, 3.). Daher}$$

erſtlich für den Punct D,

$$d^2 = \frac{2bb}{a} c + \frac{bb}{aa} c^2;$$

zweytens für den Punct Q,

$$QS^2 = \frac{2bb}{a} AS + \frac{bb}{aa} AS^2.$$

Daher iſt MP^2 oder

$$y^2 = \frac{2bb}{a}(c + x\cos\varphi) + \frac{bb}{aa}(c + x\cos\varphi$$
$$- (x\sin\varphi - d)^2,$$

das iſt,

$$y^2 = \left(\frac{2bb}{a}\cos\varphi + \frac{2bb}{aa} c\cos\varphi + 2d\sin\varphi\right)$$
$$+ \left(\frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2\right) x^2.$$

Dieſes iſt eine Gleichung für einen der drey Keg
ſchnitte.

9. Iſt $\sin\varphi^2$ größer als $\frac{bb}{aa}\cos\varphi^2$, das

$\text{tang}\varphi$ größer als $\frac{b}{a}$, ſo iſt der Schnitt eine Ellip

Digitized by Google

beide einander gleich, oder ist tang $\varphi = \frac{b}{a}$, so ist

Schnitt eine Parabel; ist tang φ kleiner als $\frac{b}{a}$, so

Schnitt eine Hyperbel, deren entgegengesetzter Theil
zugeordneten Konoid liegt.

10. Er ist $\frac{b}{a}$ die Tangente des Winkels, wel-
die Asymptoten mit der Axe machen. (Hyperbel, 6.).
n die schneidende Ebene parallel mit einer der Asymp-
der Hyperbel BAB, oder, wenn der Winkel AFD
Winkel derselben mit der Axe gleich ist, so kann
hneidende Ebene den zugehörigen Schenkel AB nicht
en, daher sich die Ellipse, welche der Schnitt für ei-
größern Winkel der Ebene mit AC ist, in eine Para-
erwandelt. Wird der Winkel AFD kleiner genom-
als Ang. tang $\frac{b}{a}$, so trifft DE einen Schenkel
ntgegengesetzten Hyperbel.

11. Der Schnitt sey eine Ellipse, für den Fall, da
g $\varphi > \frac{b}{a}$ ist; die beiden halben Axen seyn wie vor-
f und g, so ist

$$y^2 = \frac{2gg}{f} x - \frac{gg}{ff} x^2.$$

Also ist $\sin\varphi^2 - \frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$, und

$$\frac{b}{}\cos\varphi + \frac{2bb}{aa} c.\cos\varphi + 2d\sin\varphi = \frac{2gg}{f}.$$

raus ist

$$= \frac{bb(a+c)\cos\varphi + aad\sin\varphi}{aa\sin\varphi^2 - bb\cos\varphi^2}$$

Digitized by Google

Es sey $\frac{b}{a} = \text{tang } \alpha$, so ist

$$f = \frac{(a + c) \text{ tang } \alpha^2 + d \text{ tang } \varphi}{(\text{tang } \varphi^2 - \text{tang } \alpha^2) \cos \varphi};$$

$$g = f \cos \varphi \sqrt{(\text{tang } \varphi^2 - \text{tang } \alpha^2)}.$$

Auf gleiche Art findet man die beiden Axen des hyperbolischen Schnittes.

Archimedes betrachtet bloß den Schnitt, wenn die schneidende Ebene die Asymptoten (omnia latera coni, comprehendentis conoidem) trifft. A. a. O. Satz. 14.

Von der Messung des körperlichen Inhalts eines konoidalischen Abschnittes in dem Artikel, Cubirung; von der Messung der Oberfläche in dem Artikel, Complanation.

Von den Schnitten der Sphäroiden in dem Artikel, der von ihnen handelt.

Körper, geometrischer, ist das begränzte körperlich Ausgedehnte, das ist, was nach drey auf einander senkrechten Richtungen ausgedehnt ist, oder Theile neben Theilen stetig liegen hat. Euklides sagt, Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat. Das Wort, welches er gebraucht, ist το στερεον, das Dichte, solidum.

Die Art der Begränzung, oder die Form eines Körpers, macht denselben zu einem Gegenstande der Geometrie.

Ein Körper kann von ebenen Flächen allein, von ebenen und krummen zugleich, oder von krummen allein begränzt werden.

Unter denen, die von ebenen Flächen allein begränzt werden, sind die merkwürdigsten: die Prismen, die Pyramiden, die vollkommen regulären, und die bedingt regulären Körper, oder die nach einem gewissen Gesetz irregulären.

Digitized by Google

Zu den Körpern, die von einer krummen Fläche al-
ngeschlossen sind, gehören die Kugel, die elliptischen
roiden, die runden Körper, die durch Umdrehung
eschloßnen krummlinichten Figur um eine Axe ent-
und diejenigen, die durch die sich parallel bleibende
gung einer nach einem Gesetze veränderlichen geschloß-
igur beschrieben werden, wenn diese an den entge-
etzten Endpuncten der Axe oder Richtungslinie ver-
den.

Körper, die von ebenen und krummen Flächen be-
werden, sind Cylinder und Kegel, Cylindroiden
Conoiden, und diejenigen, welche durch die sich paral-
ibende Bewegung einer, nach einem gewissen Gesetze
erlichen, geschloßnen Figur beschrieben werden, wenn
n dem einen Ende der Richtungslinie nicht verschwin-
uch die Abschnitte der Körper der zweyten Gattung,
rch schneidende Ebenen gemacht werden.

Der geometrische Körper ist wegen der Stetigkeit
Theile ins Unendliche theilbar. Weil er bloß eine
ete Form des physischen Körpers ist, so kann man ei-
örper sich in dem andern vorstellen, ohne daß er
als Theil desselben betrachtet wird.

Körperberechnung ist die arithmetische Ver-
ung eines Körpers mit einem andern, der als Einheit
tet wird. Diese Einheit ist häufig ein Würfel,
Seite die Einheit für die Linien ist. Man kann
uch mit Vortheil einen Körper, der mit dem vorge-
n von einer Art ist, zur Einheit nehmen, z. B. ei-
ylinder bey der Berechnung eines Cylinders, wie der-
n bey der Ausmessung der Fässer geschieht, mit
icht auf die Ausbauchung.

In der Geometrie nach der Methode der Alten
t keine Berechnung der Körper vor, so wie eine geo-
che Berechnung überhaupt darin nicht gebraucht
(Geometrie in Th. II. S. 312.) Jede Vergleis
geschieht durch zusammengesetzte Verhältnisse, oder

Digitized by Google

durch bestimmte Zahlen. Z. B. Prismen, oder Cy
der, stehen in dem zusammengesetzten Verhältniss
Grundflächen und Höhen. Eine Kugel und ein Cyl
dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der K
gleich sind, verhalten sich wie 2 : 3. Ein parabol
Konoid verhält sich zu einem geradlinichten Kegel von
cher Grundfläche und Höhe wie 3 : 2.

Jeder Körper wird durch das Produkt dreyer
nien, als a b c, ausgedruckt. Dieses ist eigentlich
Ausdruck für ein Parallelepipedon mit rechten Winkeln,
fen Seiten a, b, c sind. Vergleicht man dieses mit
nem Würfel, dessen Seite d ist, so verhält sich der W
fel zu jenem Körper zusammengesetzt, wie die Grund
chen und die Höhen. Das Verhältniß der Grundflächen,
die Rechtecke sind, ist das zusammengesetzte der Seit
linien. Also wird das Verhältniß der beiden Körper
sammengesetzt aus den Verhältnissen, d : a; d : b, d : c.
Betrachten wir nun die Linien a, b, c, d, als Zahl
für eine gewisse Einheit, sie mögen dabey rationale
irrationale seyn, so ist das zusammengesetzte Verhält
des Würfels C und das Prisma P = d^3 : a b c. Nim
man für d die Einheit, und C als Einheit der körperlich
Räume, so ist das Prisma P = a b c. Jeder Körp
kann entweder durch eine geometrische Construction in
senkrechtes Prisma, wie P ist, verwandelt werden, od
es läßt sich durch Rechnung ein Prisma angeben, das v
demselben weniger verschieden ist, als irgend eine ang
bare Größe beträgt, und daher ist die Gränze, welcher
Rechnung sich ohne Ende nähert, ebenfalls einem Pris
gleich.

Ist der Körper irgend ein Prisma, so läßt sich
Grundfläche in ein Rechteck verwandeln, welches dur
a b ausgedrückt werde. Die Seitenlinie sey c, und unt
dem Winkel α gegen die Grundfläche geneigt, so ist die Hö
des Prisma = c sin α, und der Inhalt = a b c sin α
wo sin α eine bloße Zahl für den Sinustotus als E
heit ist.

Digitized by Google

in Cylinder habe den Halbmesser a, Seitenlinie
e b, und der Neigungswinkel der Axe sey α, so ist
alt $= \pi a a b \sin \alpha$. Es bedeutet π die Irrati-
für den halben Kreisumfang in Beziehung auf
bmesser als Einheit.

ie Grundfläche einer Pyramide werde in ein
verwandelt, dessen Seiten a, b sind. Eine der
nien sey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, so ist
alt $= \frac{1}{3} a b c . \sin \alpha$.

ie Grundfläche eines Kegels habe den Halbmes-
ie Axe sey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, so ist
els Inhalt $= \frac{1}{3} \pi a a c . \sin \alpha$.

as Differential eines körperlichen Abschnittes hat
en die Form wie der Ausdruck für einen endlichen
s. Cubirung.

usdrücke wie $\frac{abcd}{e}$, $\frac{abcde}{fg}$, $\frac{abcdef}{ghk}$,
ebenfalls körperliche Räume. Es ist, wenn abc
sma P, und R eine dieser Größen bedeutet, e:d
; fg: de = P:R; ghk:def = P:R.

örper, reguläre, s. vieleckige reguläre Kör-

reis ist eine ebene Figur, von einer stetigen Li-
geschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu
, aus einem innerhalb der Figur befindlichen
gezogen werden, alle einander gleich sind. Die-
ct heißt der Mittelpunct. Die begränzende
ißt die Kreislinie (Peripherie, Umfang des
), und die begränzte Figur die Kreisfläche,
an die Umfangslinie von dem eingeschlossenen Flä-
n unterscheiden will.

. Jede gerade Linie von dem Mittelpuncte, an
fang gezogen, heißt ein Halbmesser (radius)
ses. Zwey Halbmesser, die in entgegengesetzter

Digitized by Google

durch bestimmte Zahlen. Z. B. Prismen, oder Cy
der, stehen in dem zusammengesetzten Verhältniß
Grundflächen und Höhen. Eine Kugel und ein Cyl
dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der K
gleich sind, verhalten sich wie 2 : 3. Ein parabol
Konoid verhält sich zu einem geradlinichten Kegel von
cher Grundfläche und Höhe wie 3 : 2.

Jeder Körper wird durch das Produkt dreyer
nien, als a b c, ausgedruckt. Dieses ist eigentlich
Ausdruck für ein Parallelepipedon mit rechten Winkeln,
sen Seiten a, b, c sind. Vergleicht man dieses mit
nem Würfel, dessen Seite d ist, so verhält sich der W
fel zu jenem Körper zusammengesetzt, wie die Grun
chen und die Höhen. Das Verhältniß der Grundflä
die Rechtecke sind, ist das zusammengesetzte der Sei
linien. Also wird das Verhältniß der beiden Körper
sammengesetzt aus den Verhältnissen, d : a; d : b, d
Betrachten wir nun die Linien a, b, c, d, als Zah
für eine gewisse Einheit, sie mögen dabey rationale o
irrationale seyn, so ist das zusammengesetzte Verhä
des Würfels C und das Prisma P = d^3 : a b c. Nu
man für d die Einheit, und C als Einheit der körperli
Räume, so ist das Prisma P = a b c. Jeder Kör
kann entweder durch eine geometrische Construction in
senkrechtes Prisma, wie P ist, verwandelt werden, o
es läßt sich durch Rechnung ein Prisma angeben, das v
demselben weniger verschieden ist, als irgend eine ang
bare Größe beträgt, und daher ist die Gränze, welcher
Rechnung sich ohne Ende nähert, ebenfalls einem Pris
gleich.

Ist der Körper irgend ein Prisma, so läßt sich
Grundfläche in ein Rechteck verwandeln, welches dur
a b ausgedrückt werde. Die Seitenlinie sey c, und un
dem Winkel α gegen die Grundfläche geneigt, so ist die Hö
des Prisma = c sin α, und der Inhalt = a b c sin
wo sin α eine bloße Zahl für den Sinustotus als E
heit ist.

Digitized by Google

n Cylinder habe den Halbmesser a, Seitenlinie
b, und der Neigungswinkel der Axe sey α, so ist
$t = \pi a a b \sin \alpha$. Es bedeutet π die Irrati-
für den halben Kreisumfang in Beziehung auf
nesser als Einheit.

e Grundfläche einer Pyramide werde in ein
erwandelt, dessen Seiten a, b sind. Eine der
ien sey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, so ist
lt $= \frac{1}{3} a b c . \sin \alpha$.

e Grundfläche eines Kegels habe den Halbmes-
Axe sey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, so ist
s Inhalt $= \frac{1}{3} \pi a a c . \sin \alpha$.

es Differential eines körperlichen Abschnittes hat
n die Form wie der Ausdruck für einen endlichen
. Cubirung.

sdrücke wie $\frac{abcd}{e}$, $\frac{abcde}{fg}$, $\frac{abcdef}{ghk}$,
ebenfalls körperliche Räume. Es ist, wenn abc
ma P, und R eine dieser Größen bedeutet, e:d
fg: de = P:R; ghk: def = P:R.

örper, reguläre, s. vieleckige reguläre Kör-

reis ist eine ebene Figur, von einer stetigen Li-
geschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu
aus einem innerhalb der Figur befindlichen
gezogen werden, alle einander gleich sind. Die-
heißt der Mittelpunct. Die begränzende
ist die Kreislinie (Peripherie, Umfang des
, und die begränzte Figur die Kreisfläche,
n die Umfangslinie von dem eingeschlossenen Flä-
unterscheiden will.

Jede gerade Linie von dem Mittelpuncte, an
fang gezogen, heißt ein Halbmesser (radius)
es. Zwey Halbmesser, die in entgegengesetzter

Digitized by Google

Richtung gezogen sind, zusammengenommen, sind d
Durchmesser, (diameter.)

2. Eine gerade Linie zwischen zwey Puncten d
Kreisumfanges heißt eine Chorde oder Sehne. D
Durchmesser ist eine Chorde, die durch den Mittelpu
gezogen ist.

3. Das Stück der Kreisfläche zwischen ei
Chorde und dem zugehörigen Bogen, auf der einen u
auf der andern Seite der Chorde heißt ein Kreis
abschnitt oder Segment. Das Stück zwischen zw
Halbmessern und dem zugehörigen Bogen, dem einen od
dem andern Theile des ganzen Umfanges, heißt ei
Kreisausschnitt oder Sector. — Bogen, Sect
ren und Segmente, die in verschiedenen Kreisen gleich
Winkeln am Mittelpuncte zugehören, sind einander ähn
lich.

4. Euklides zeigt nicht, wie die Kreislinie be
schrieben oder im Verstande gezeichnet wird. Er stel
gleich den Forderungssatz auf, daß aus jedem Puncte mit
jedem Abstande ein Kreis beschrieben werden möge. In
der That liegt in dem Begriffe eines Kreises auch die
Möglichkeit desselben.

5. Das Postulat möchte folgendergestalt ausge
druckt werden können: Einen Kreis beschreiben, heißt,
eine stetige Folge von gleichen geraden Linien um einen fe
sten Punct sich gedenken.

6. Hierauf gründet sich die technische Zeichnung
eines Kreises, der das sinnliche Bild des intellectuellen ist.
Man führt mit dem bekannten Instrumente, dem Zirkel,
eine Linie zwischen den Spitzen desselben um die eine fest
gestellte Spitze herum. Wenn man den abstracten Be
griff von Bewegung gleich Anfangs in die Geometrie
aufnimmt, so kann man eine, wie die Logiker sie nennen,
genetische Erklärung des Kreises geben, daß er diejenige
Figur ist, die entsteht, wenn eine bestimmte gerade Linie
um ihren einen, unverrückt bleibenden, Endpunct herum
geführt wird, bis sie wiederum in ihre erste Lage kommt.

Digitized by Google

7. Der Kreis hat sehr viele merkwürdige Eigen-
ten, wodurch er theils zur Auflösung mancher geome-
en Aufgaben dient, theils ohne diese Rücksicht dem
tande eine angenehme Beschäftigung gewährt. Die
onometrie beruht auf dem Kreise. In dem Artikel,
ometrie, sind die ersten Formeln, welche den übrigen
Grundlage dienen, aus einer Eigenschaft des Kreises
leitet. Auch die daraus dort durch Rechnung entwi-
en Formeln lassen sich größtentheils durch geometrische
tructionen im Kreise erfinden. Unsere trigonometri-
Tafeln enthalten coordinirte Linien und Winkel am
se. Die geometrische Berechnung derselben gründet
auf die Lehre von den regulären in einem Kreise be-
benen Vielecken. Die analytische ist ein besonderer
einer allgemeinen Methode für Rectificationen krum-
Linien. In der höhern Geometrie werden viele Auf-
gen auf Rectification der Kreisbogen oder Quadratur
Kreisausschnitten und Kreisabschnitten gebracht.
Kreis dient die Krümmung an krummen Linien zu
n.

8. Ich werde die vornehmsten Eigenschaften des
es, wovon in unsern Lehrbüchern gar zu wenig vor-
nt, hier anführen, und erweisen. Um den Raum
zu beengen, werde ich die leichten Sätze ohne Be-
nur anzeigen. In Krafft's Institutionibus Geo-
iae sublimioris, Tubingae 1753 sind viele Lehr-
und Aufgaben über den Kreis gesammelt. Dazu
e man noch eine Sammlung geometrischer Aufgaben,
der geometrischen analytischen Methode aufgelöset,
e Schwab seiner Uebersetzung von Euklids Datis
fügt hat, und einen Abschnitt in Newtoni Arith-
ica universali, worin manche Aufgaben über den Kreis
raisch aufgelöset sind. In dem Opere geometrico
gorii a Sto. Vincentio, pag. 167—218,
e Sammlung von Sätzen den Kreis betreffend ent-
n, woraus Krafft, wie er es selbst anzeigt, vieles ge-
nen hat. In den Werken des Viera kommt man-

Digitized by Google

ches über den Kreis, besonders über die Berührungen vor. — Das dritte Buch des Euklides dient für diesen Artikel zur Grundlage. Was die Hülfe höherer Rechnungen erfordert, kommt in den Artikeln Cyklometrie, und Cyklotechnie vor.

9. Gleichen Winkeln am Mittelpuncte gehören in demselben Kreise gleiche Ausschnitte und Bogen zu, und umgekehrt.

10. Winkel am Mittelpuncte verhalten sich wie die zugehörigen Sectoren und Bogen.

Denn es seyn (Fig 12.) ADB, ADC zwey Winkel an dem Mittelpuncte des Kreises AEA. Man füge von A durch E nach M mehrere, dem ADB gleiche, Winkel an einander, welche den Winkel ADM bilden; eben so mehrere, dem ADC gleiche Winkel, welche den Winkel ADN bilden, so ist der Bogen AEM dasselbe Vielfache von AB als ADM von ADB ist, und der Bogen AEN dasselbe Vielfache von AC als es der Winkel ADN von ADC ist. Ist der W. ADM größer oder kleiner oder so groß als der W. ADN, so ist auch der Bogen AEM größer oder kleiner oder so groß als der Bogen AEN, die Vielfachen der Winkel und Bogen mögen seyn, welche man will, wobey die Winkel unbestimmt größer als vier Rechte, und die Bogen eben so größer als der Kreisumfang seyn können. Daraus folgt, (s. Proportion), daß die Winkel ADB, ADC sich wie die Bogen AB, AC verhalten. — Eben so wird der Satz für die Sectoren erwiesen.

11. Die Kreislinie hat mit der geraden Linie dieses gemeinschaftlich, daß die gleichen an einander liegenden Theile einerley Lage neben einander haben. Allein auf der geraden Linie haben zugleich die von einander entfernten Theile einerley Lage gegen einander, sofern man dabey auf ihren Abstand nicht sieht.

12. Der Mittelpunct eines Kreises liegt auf der geraden Linie, die durch die Mitte einer Chorde senkrecht darauf gezogen ist.

Digitized by Google

13. Das Perpendikel von dem Mittelpuncte auf
horde halbirt diese, und die gerade, welche von dem
lpuncte durch die Mitte einer Chorde gezogen ist,
uf diese senkrecht.

14. Eine gerade Linie schneidet einen Kreis nur
y Puncten, oder berührt ihn in einem einzigen, oder
anz außerhalb desselben.

15. I. Die auf einen Durchmesser in dem End-
senkrechte berührt den Kreis. II. Die berührende
uf den Durchmesser durch den Berührungspunct
ht. III. Die auf eine berührende in dem Berüh-
puncte senkrechte geht durch den Mittelpunct.

16. I. Zwey Kreise schneiden sich, wenn
stand ihrer Mittelpuncte kleiner ist, als die Summe
Halbmesser, oder größer als der Unterschied derse-
und zwar nur in zwey Puncten. II. Sie berüh-
ch in einem einzigen Puncte, wenn der Abstand der
lpuncte gleich ist der Summe oder dem Unterschiede
albmesser, und haben eine gemeinschaftliche berüh-
, die senkrechte auf die gerade durch die beiden Mit-
rte in dem gemeinschaftlichen Endpuncte der Halb-
. In dem erstern Falle liegen die beiden Kreise auf
engesetzten Seiten der berührenden, in dem andern
uf derselben Seite, und der kleinere Kreis ist ganz
em größern eingeschlossen. III. Sie liegen ganz
halb einander, wenn der Abstand der Mittelpuncte
ist als die Summe der Halbmesser; ist jener Ab-
kleiner als der Unterschied der Halbmesser, so liegt
einere Kreis ganz innerhalb des größern und abge-
t.

Die Beweise dieser Sätze gründen sich darauf, erst
daß in einem geradlinichten Dreyeck jede Seite klei-
r als die Summe der beiden andern Seiten, und
r als ihr Unterschied; zweytens, daß mit drey Sei-
r ein und dasselbe Dreyeck möglich ist, in zweyerley
an einer der Seitenlinien, in einer gegebenen Ebene.

Digitized by Google

17. Drey Puncte bestimmen daher einen Krei
Der Mittelpunct desselben ist der Durchschnitt der beid
senkrechten durch die Mitte zweyer geraden zwischen d
drey gegebenen Puncten.

18. Der Kreis ist diejenige krumme Linie, welc
durch die kleinste Anzahl von Puncten bestimmt wird. D
Parabel und die gleichseitige Hyperbel werden durch dr
Puncte völlig bestimmt, eine Ellipse und ungleichseiti
Hyperbel durch fünf Puncte.

19. In einem Kreise sind alle Winkel in eine
und demselben Abschnitte sich gleich; oder, die Winkel
der Peripherie, welche auf demselben Bogen stehen, si
sich gleich. Nämlich in Fig. 13. sind die Winkel AC
ADB gleich groß, so wie die Winkel AEB und AF
auch gleich groß sind.

Jeder ist halb so groß als der Winkel
Mittelpuncte, der mit ihm auf demselben Bogen ste
Der Winkel ACB oder ADB ist die Hälfte von d
Winkel AGB am Mittelpuncte G; und AEB oder AF
ist die Hälfte von dem Winkel AgB auf derjenig
Seite beider Schenkel, welche mit der Öffnung die
Winkel nach derselben Seite hin liegt.

Dieses ist eine Haupteigenschaft des Kreises, w
aus die meisten übrigen abgeleitet werden.

20. Ein Winkel in dem größern Abschnitte
spitz, in dem kleinern stumpf, in dem Halbkreise, ein re
ter.

21. Wenn in der vierseitigen Figur ACDB (F
13.) die Winkel ACB, ADB gleich groß sind, so la
sich um dieselbe ein Kreis beschreiben. — Denn wenn
Kreis, der durch drey Eckpuncte der Figur, als A, C,
beschrieben ist, nicht durch D gienge, sondern durch ein
andern Punct d der geraden BD, so wäre der W
AdB = ACB, und ADB größer oder kleiner
AdB, also nicht gleich ACB.

Digitized by Google

22. Die beiden Winkel in den beiden Abschnitten
mmen sind zwey rechten gleich. Oder in einem Vier-
das in einen Kreis eingeschrieben ist, machen die sich
n über liegenden Winkel zwey rechte aus, wie C und E
m Vierecke ACBE; oder D und F in dem Vierecke
BF.

23. Um ein Viereck ADBE (Fig. 13.), worin
nander gegen über stehenden Winkel zwey rechte aus-
en, kann ein Kreis beschrieben werden. — Denn
durch drey Winkelpuncte, als A, D, B, ein Kreis
rieben wird, und dieser nicht durch E gienge, so
te der W. AEB mit ADB nicht zwey rechte aus-
en.

24. Es sey AB (Fig. 14.) der Durchmesser ei-
Kreises, so ist der Umfang desselben der geometrische
für alle rechtwincklige Dreyecke, die wie ADB über
AB als Hypotenuse gezeichnet werden können. An
Puncte des Umfanges D ist der W. ADB ein
r. Ist also von einem rechtwinkligen Dreyeck aus-
r Hypotenuse AB eine der Katheten AD gegeben:
gt man diese von A an den Kreis, zieht DB, und
ADB das verlangte Dreyeck.

25. Um ein rechtwinkliges Dreyeck ADB (Fig. 14)
AB als Hypotenuse zu zeichnen, so daß die Spitze des
n Winkels D in eine gegebene, auf AB senkrechte,
falle, beschreibe man über AB als Durchmesser ei-
Kreis, und ziehe an den Punct D, wo diese durch
krechte den Kreisumfang trifft, die geraden AD,
so ist das verlangte geschehen.

26. Oder wenn die Höhe DC eines rechtwinkli-
Dreyecks über der Hypotenuse AB gegeben ist, ziehe
in dem Abstande CD die parallele FG mit AB,
e den Kreis in D und E schneide, so geben diese
te jeder das verlangte Dreyeck.

27. Ist ADB ein bey D rechtwinkliges Drey-
geht der über der Hypotenuse beschriebene Kreis
die Spitze des rechten Winkels D.

Digitized by Google

28. In dem Halbkreise ADB (Fig. 14.) von einem Puncte des Umfanges die senkrechte DC AB gelassen, so ist AC : CD = CD : CB (Drey 11.), und daher $CD^2 = AC \times CB$. — Dieses die einfachste Gleichung für den Kreis, woraus alle genschaften und Verbindungen mit andern Linien, gera oder krummen, sich algebraisch herleiten lassen.

29. Vermittelst des Kreises wird eine mittl Proportionale zwischen zwey gegebenen Linien geometri gefunden. Diese beiden seyn AC, CB. Man setze in eine gerade AB zusammen, beschreibe über AB ei Halbkreis ADB, ziehe an denselben die auf AB in senkrechte CD, so ist diese die gesuchte.

Oder man trage auf die grössere der gegebenen, A die kleinere AC, beschreibe über AB einen Halbkr ziehe in demselben durch C die senkrechte CD, und v binde AD, so ist solche die mittlere Proportionale z schen AB und AC. (Dreyeck, 11.).

30. In dem Kreise ABD (Fig. 15.), des Mittelpunct C, sey eine Chorde AB gezogen, und du den Endpunct A eine berührende EF, nämlich die AC senkrechte (15.). Der spitze Winkel FAB die berührenden mit der Chorde AB ist so groß als der W kel in dem größern Abschnitte ADB, und der stum EAB so groß als der Winkel in dem kleinern Abschn AdB. — Umgekehrt, wenn der Winkel FAB gle ist dem Winkel in dem Abschnitte AGB, so ist F eine berührende.

Denn man ziehe an den Endpunct G des Dur messers ACG die gerade BG, so ist der W. ABG rechter. Daher ist BAG + AGB = R. Nun s auch BAG + FAE = R, also ist FAB = AG Dieses ist ein Winkel in dem Abschnitte ADB. Winkel in dem andern Abschnitte AdB ist die Ergänzu von AGB zu zwey rechten, eben so wie der Nebenw kel EAB es zu dem W. FAB ist. Also ist EA dem Winkel in dem Abschnitte AdB gleich.

Digitized by Google

31. Wenn die Spitze des Winkels in dem Abtte A D B auf dem Umfange B D A herumgeführt , so bleibt der Winkel am Umfange immer derselbe, nahe auch die Spitze an A falle. Fällt die Spitze selbst, so verwandelt sich die schneidende Linie, von der der eine Schenkel des Winkels in dem Kreise ein ist, in die berührende, und der andere Schenkel in AB. Daraus folgt auch, daß der Winkel der hrenden mit der Chorde AB dem Winkel in dem entgesetzten Abschnitte gleich ist.

32. Über einer gegebenen Chorde AB (Fig. 15.) Segment eines Kreises zu zeichnen, welches einen genen Winkel faßt, zeichne man an der entgegengesetzSeite von AB den Winkel FAB gleich dem gegebeziehe auf AF in A die senkrechte AG, und in B auf die senkrechte BG, welche die AG in G schneide, re AG in C, beschreibe aus C mit dem Halbmesser oder AG einen Kreis, so ist das Segment ADGB verlangte, da W. AGB = FAB ist. — Der BoADGB ist der geometrische Ort für alle Dreyecke der Grundlinie AB, worin der Winkel, der AB über steht, dem gegebenen FAB gleich ist.

33. Zwischen parallelen Chorden sind gleiche Bonthalten. — Denn die geraden zwischen entgegen liegen Endpuncten der Chorden machen mit denselben große Winkel am Umfange; daher sind die Bogen, auf diese gleichen Winkel stehen, einander gleich. Sie ren zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte.

Umgekehrt, die Chorden durch die gegen über liegen Endpuncte gleicher Bogen sind sich parallel, wegen gleichen Winkel, welche sie mit den geraden durch entn liegende Endpuncte machen.

34. Zwey Chorden AB, CD (Fig. 16.) schneisich innerhalb des Kreises in E, es ist

EA : EC = ED : EB, oder
EA × EB = EC × ED.

Digitized by Google

Denn man ziehe die geraden BC, AD, so sind
Winkel A, D, AED, den Winkeln C, B, BE
nach der Ordnung gleich, also sind die Dreyecke AE
CEB sich ähnlich. Daher folgt die angegebene Prop
tion (Dreyeck, 6.).

35. Zwey Chorden, AB, CD (Fig. 17.) schn
den sich verlängert außerhalb des Kreises in E, es
EA: EC = ED: EB, oder EA × EB
EC × ED.

Denn man ziehe die geraden BC, AD, so s
die Winkel E, D, BAD den Winkeln E, B, BC
nach der Ordnung gleich. Da W. BAD = BC
so ist auch W. EAD = ECB, und die Drey
EDA, EBC sind sich ähnlich.

36. Wenn die geraden AB, CD (Fig. 16. 1
zwischen vier gegebenen Puncten, A, B, C, D, sich
E schneiden, und EA: EC = ED: EB ist, so g
derselbe Kreis durch alle vier Puncte.

Denn man beschreibe durch drey derselben,
A, C, D einen Kreis, und ziehe in demselben durch d
Punct A des Umfanges und den Punct E auf AB e
gerade, welche den Kreis zum zweytenmahl in ein
Puncte P auf der AB schneide, so ist EA: EC = E
EP. Da nun auch ist EA: EC = ED: EB, so
EP = EB, und der Kreis zugleich geht durch den vi
ten Punct B.

37. Es sey ED (Fig. 18.) eine den Kreis
C berührende gerade. Durch einen Punct E derselb
ziehe man an den Kreis eine gerade, welche denselben
A und B schneide: es ist EA: EC = EC: EB, o
EA × EB = EC².

Denn man ziehe AC und BC, so ist
ECA = EBC (30.) und W. DCB = BA
Daher sind die Dreyecke ECA, EBC ähnlich, und
ist EA: EC = EC: EB.

Digitized by Google

38. Wenn AB in F (Fig. 18.) halbirt wird, so ist
$= EA^2 + AF^2 + 2\,EA \times AF = EA \times EB$
F^2, also $EF^2 = EC^2 + AF^2$, und $EC^2 =$
$- AF^2$.

39. Wenn von einem Puncte E außerhalb eines
s (Fig. 18.) an denselben zwey gerade gezogen sind,
eine denselben in A und B schneidet, die andere ED
C trifft, und es ist $EA : EC = EC : EB$, so
eine den Kreis in C berührende.

Denn wenn AC, BC an den Punct C gezogen
, so sind wegen der Proportionalität der Seiten
EC; EC, EB, und des gemeinschaftlichen Win-
die Dreyecke ECA, EBC sich ähnlich, und es ist
CA = EBC, so wie W. ECB = EAC, oder
CB = CAB, daher ist aus (31.) die gerade
eine in C berührende.

40. Um von einem gegebenen Puncte E (Fig.
an einen gegebenen Kreis ACB eine berührende
zu ziehen, ziehe man irgend eine gerade EAB an
reis, welcher von derselben in A, B geschnitten
, und finde nach (29) die mittlere Proportionale
en EA und EB, beschreibe mit derselben als Halb-
aus E einen Kreis, so sind die beiden Durch-
spuncte desselben mit dem Kreise ACB diejenigen,
chen die von E daran gezogenen geraden den Kreis
berühren.

Am einfachsten ist die Construction, wenn über der
n durch E und den Mittelpunct des Kreises G als
messer ein Kreis beschrieben wird. Dieser schnei-
n Kreis ACB in den beiden gesuchten Berührungs-
en. — Es ist nämlich der W. ECG ein rechter.

Oder man ziehe, wie vorher, eine willkürliche
B an den Kreis, halbire AB in F, beschreibe über
inen Halbkreis, trage in denselben von F aus eine
e so groß als AF, ziehe an den andern Endpunct
den von E aus eine gerade, so ist diese nach (38.)
rührenden EC gleich.

Digitized by Google

41. Der Berührungspunct C auf der berüh
den ED ist unter allen Puncten dieser Linie derjenige,
welchem der Winkel der nach den Puncten A, B, geh
nen geraden am größten ist.

42. Wenn in Fig. 16. die Segmente EC, E
der Chorde CD einander gleich sind, so liegt der Mit
punct des Kreises in dem Durchschnitte der beiden P
pendikel durch die Mitte der Chorden AB, CD,
CE, oder DE ist die mittlere Proportionale zwischen A
EB. — Hieraus erhellt, wie zwischen zwey gegebe
geraden Linien eine mittlere Proportionale in einer ge
benen Lage gefunden werden kann.

43. Euklides hat die beiden Sätze (34. 3
durch eine geometrische Rechnung erwiesen, weil er
Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke noch nicht vorget
gen hatte. Es ist aber nöthig einzusehen, wie d
Sätze von der charakteristischen Eigenschaft des Kre
abhangen. Den Satz (39.) hat Euklides auf e
andere Art erwiesen. Den Satz (35.) hat er nicht
aufgeführt.

44. In einem Kreise (Fig. 19.) ist ein Vier
ABCD beschrieben, worin die Diagonalen AC, B
gezogen werden: es ist $AB \times CD + AD \times B = AC \times BD$.

Man ziehe AE unter dem W. $BAE = CA$
Da auch W. ABE oder $ABD = ACD$ ist, so ist
Winkel $AEB = ADC$, und die Dreyecke, AB
ACD sind sich ähnlich. Ferner ist W. $BAC = BA + EAC = DAC + EAC = DAE$, und der
$BCA = BDA$ oder EDA. Daher ist W. AB
$= AED$, und die Dreyecke ABC, AED sind
ähnlich. Daher ist

$$AB : BE = AC : CD$$
$$AD : ED = AC : BC,$$

oder

$$AB \times CD = BE \times AC$$
$$AD \times BC = ED \times AC.$$

Digitized by Google

us folgt durch Addition

$AB \times CD + AD \times BC = BD \times AC.$

45. Dieser Satz ist in dem Artikel, Goniome- angewandt, um die ganze Lehre von der Zusammen- der Winkel mittelst der zugehörigen goniometrischen rigonometrischen) Linien darauf zu gründen. Man den Satz] den Ptolemäischen Lehrsatz, weil emäus ihn in seinem astronomischen System agest), 1. B. 9. Cap. auch zum Grunde der Be- ng der Chorden gelegt hat.

46. Daß der W. $AEB = ADC$ ist, läßt sich unmittelbar so erweisen. Es ist W. $AEB = B + EAD$, und $EAD = EAC + CAD$ $AC + BAE = BAC = BDC$, also W. $= ADB + BDC = ADC$.

Oder W. $AED = ABD + BAE$, und W. $= CAD = CBD$, also W. $AED = ABD$ $BD = ABC$ Daraus ist ferner W. AEB dem W. ADC, der dem ABC gegen über liegt, (22).

47. In dem Viereck $ABCD$ (Fig. 19.) ist AC: $=$ sin ABC : sin BAD. — Denn

$AC : AB = \sin ABC : \sin ACB$

$AB : BD = \sin ADB : \sin BAD.$

us folgt durch die Zusammensetzung der Verhältnisse, $DB = ACB$ ist, die angegebene Proportion.

48. Die beiden Diagonalen AC, BD des Vier- $ABCD$ in einem Kreise (Fig. 20.), schneiden sich einem rechten Winkel in E: es ist $AB^2 + CD^2$ $C^2 + AD^2 =$ dem Quadrate des Durchmessers.

Man ziehe durch A den Durchmesser AF, und F nach B und D hin die Chorden FB, FD. Da B. $AFB = ADB$, und die Winkel ABF, AED sind, so sind die Winkel BAF, CAD sich gleich, auch die Bogen, worauf sie stehen, und deren Chor-

Digitized by Google

den, das ist, $BF = CD$. Da $AB^2 + BF^2 = A$ ist, so ist auch $AB^2 + CD^2 = AF^2$. — Auf glei Art sind die Chorden BC, DF sich gleich. Denn W. $AFD = ABD$, daher W. $DAF = BAC$, u die Chorde $DF = BC$. Da $AD^2 + DF^2 = AF$ so ist auch $AD^2 + BC^2 = AF^2$.

49. Hieraus folgt noch $AE^2 + BE^2 + CE + ED^2 = AF^2$.

50. Es ist ABC (Fig. 21.) ein in einem Kre beschriebenes Dreyeck, und CD die senkrechte auf d Seite AB; durch C werde der Durchmesser CE ge gen: es ist $CA : CE = CD : CB$, oder $CA \times C = CE \times CD$.

Denn man ziehe BE, so ist W. $E = A$, und W EBC ein rechter, wie ADC; also sind die Dreyec ADC, EBC ähnliche, woraus die Proportion folgt.

51. Über dem Durchmesser AB sey (Fig. 22. aus dem Mittelpuncte C ein Halbkreis AMB beschri ben. Auf dem Halbmesser CA nehme man irgend eine Punct D, und auf der Verlängerung den Punct E, daß $CD : CA = CA : CE$ sey. Von den Puncte D und E ziehe man an irgend einen Punct des Umfan ges M die geraden DM, EM: es ist $DM : EM = DA : EA$.

Man ziehe den Halbmesser CM, so ist, zufolge de Annahme, $CD : CM = CM : CE$. Dadurch sin die Dreyecke CMD, CEM sich ähnlich, und es i $CM : DM = CE : EM$, oder $CM : CE = DM EM$. Aus der angenommenen Proportion folgt durc Trennung und Verwechslung diese, $CA : CE = DA EA$. Also ist $DM : EM = DA : EA$.

52. Für den Endpunct B des Durchmessers A ist $DB : EB = DA : EA$. Denn aus der angenom menen Proportion folgt durch Verknüpfung und Ver wechslung $CA : CE = DB : EB$. Nun ist auch, w

Digitized by Google

gefunden ist, $CA : CE = DA : EA$, also ist
$EB = DA : EA$.

53. Die Linie BE ist durch die Puncte A, D
nisch getheilt, s. harmonische Theilung.

54. Der Kreis ist der geometrische Ort für die
cke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gege-
Verhältniß der beiden Seiten haben. Diese Eigen-
beruht ganz auf der Gleichheit der Halbmesser.

55. Um den Kreis aus dem gegebenen Verhält-
$DM : EM$ und der Grundlinie DE des Drey-
DME zu bestimmen, theile man DE nach diesem
ältnisse ein, so daß $DA : EA = DM : EM$
Der Halbmesser CA ist die vierte Proportionale zu
$-AD$, AD, AE. — Denn da $CD : CA =$
CE ist, so ist $AD : CA = EA : CE$, oder
$EA = CA : CE$. Daraus ist $AE - AD$;
$= AE : AC$.

56. In einem Dreyeck ABC (Fig. 23.) werde
er Seite AB genommen $AE : BE = m : n$, so
$\times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AE^2 + m \times BE^2$
$m + n) CE^2$.

Man ziehe CD senkrecht auf AB, und verbinde
so ist $AC^2 = AE^2 + CE^2 + 2AE \times ED$;
$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2BE \times ED$, (Drey-
19. 20). Multiplicirt man die Theile der ersten
hung durch n, der zweyten durch m, und addirt
uf der einen und der andern Seite in jener und dieser
nander, so wird da $n \times AE = m \times BE$ ge-
st, der aufgestellte Satz erhalten. — Dieser Zwi-
satz ist zu den folgenden Sätzen für den Kreis nöthig.
n $m = n$, oder $AE = BE$ ist, so ist $AC^2 +$
$= 2AE^2 + 2CE^2$, wie in (Dreyeck, 24).

57. Aus dem Mittelpuncte O (Fig. 24.) sey ein
beschrieben. Auf dem Durchmesser oder dessen Ver-
rung werden die gleichen OA, OB genommen. An
einen Punct des Umfanges P seyn AP, BP ge-

Digitized by Google

zogen: es ist $AP^2 + BP^2 = AB \times BO + 2O$ eine unveränderliche Summe.

Folgt aus (56.), da $m = n$ ist.

58. Es ist aus dem Mittelpuncte O (Fig. 2 ein Kreis beschrieben. In der Ebene desselben ne man zwey Puncte, A, B, theile die gerade AB halb, ziehe durch den Mittelpunct des Kreises die ge HOC, nehme darauf $HC = 3HO$: es ist, wenn irgend einen Punct des Kreises P die geraden AP, CP gezogen werden, $AP^2 + BP^2 + CP^2 =$ $AB \times BH + 2CH \times HO + 3OP^2$, eine unve derliche Summe.

Denn man ziehe HP, so ist in dem Dreyeck A

$$AP^2 + BP^2 = 2AH^2 + 2HP^2,$$

und in dem Dreyeck CPH, worin $CO = 2H$

$$CP^2 + 2HP^2 = CO^2 + 2HO^2 + 3O$$

Durch die Verknüpfung dieser beiden Gleichungen steht

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2AH^2 + CO^2 + 2H + 3OP^2$$

Da $CO = 2HO$ ist, so ist $CO^2 + 2H = 2CH \times HO$. Auch ist, wie vorher, $2A = AB \times BH$.

59. Es ist aus dem Mittelpuncte O (Fig. 2 ein Kreis beschrieben. In der Ebene desselben ne man drey Puncte, A, B, C, willkürlich, theile A in H halb, ziehe HC, nehme HK gleich dem dri Theile von HC, ziehe durch K und O die gerade KO nehme darauf $KD = 4KO$: es ist für jeden Punct auf dem Umfange des Kreises, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ $DP^2 = AB \times BH + 2CH \times HK + 3D \times KO + 4OP^2$, einer beständigen Summe.

Digitized by Google

Denn man ziehe K P und O P, so ist

$$P^2 + BP^2 = AH^2 + BH^2 + 2HP^2;$$
$$P^2 + 2HP^2 = CK^2 + 2HK^2 + 3KP^2;$$
$$P^2 + 3KP^2 = DO^2 + 3KO^2 + 4OP^2.$$

Durch Verbindung dieser drey Gleichungen wird

$$BP^2 + CP^2 + DP^2 = 2AH^2 + CK^2 + 2HK^2 + DO^2 + 3KO^2 + 4OP^2.$$

$B = 2AH$; $CK = 2HK$, und $DO = 3KO$ ergiebt sich die in dem Satze aufgestellte Form des 1 Theils dieser Gleichung.

50. Es erhellt schon hinlänglich, daß der Kreis metrische Ort ist, an welchem die Summe der Qua- der geraden, von irgend einer Anzahl gegebener an irgend einen Punct desselben gezogenen Linien stimmte Größe hat. Der Mittelpunct wird durch ebenen Puncte bestimmt; der Halbmesser durch die e Summe der Quadrate und die Rechtecke von den en Abschnitten auf den Verbindungslinien A B, K D u. s. f. Ist der Kreis der Größe und Lage geben, so wird dadurch einer der Puncte bestimmt, übrigen willkürlich bleiben. Die Construction ist hends eine Verknüpfung jedes gegebenen Punctes ner willkürlichen Folge mit einem Theilungspuncte er vorher gleichmäßig gezogenen geraden Verknü- linie. Jede wird in so viele Theile getheilt als die ngszahl des Punctes, nach welchem die Linie gezo- d, Einheiten hat. Der genannte Theilungspunct erste von dem auf ähnliche Art bestimmten Thei- uncte der vorhergehenden Verknüpfungslinie an .

51. Anstatt der Quadrate der Linien von den ge- Puncten an den Kreis kann man auch Flächen- nehmen, die zu den Quadraten bestimmte Verhält-

Digitized by Google

nisse haben. Nur müssen die Verbindungslinien zwisch den gegebenen Puncten und den Theilungspuncten and getheilt werden, als in dem erstern Falle.

62. Es seyn vier Puncte (Fig. 26.) gegeb und die Summe $m \times AP^2 + n \times BP^2 + p \times C + q \times DP^2$ unveränderlich, so muß genommen werde $AH : BH = n : m$; $CK : HK = m + n :$ $DO : KO = m + n + p : q$.

Dann werde aus O mit einem willkürlichen Ha messer OP ein Kreis beschrieben, so ist für jeden Pu desselben die angegebene Summe unveränderlich. T Rechnung wird auf ähnliche Art wie in (59.) geführt.

63. Diese merkwürdige Eigenschaft des Krei hat Apollonius in seiner Schrift von den ebenen L tern vorgetragen, nach dem Berichte, den uns Papp von diesem Werke gegeben hat. Fermat nennt d Satz einen der schönsten in der Geometrie, in einem Br an Roberval, Operum pag. 151. Er giebt dasel eine Construction der Aufgabe, für fünf Puncte d Kreis zu finden, an welchem die Quadrate der an den ben von jenen fünf Puncten gezogenen geraden Linien e gegebene Summe ausmachen. Sie ist eine andere die hier vorgetragene. Der Beweis sey lang, sagt weswegen er ihn nicht beyfüge, sondern dem Scharfsi Robervals überlasse. In Fermats Schrift, Ap lonii Pergaei Libri duo de locis planis restitu findet sich der Beweis; Opera varia mathemati pag. 33 — 40. Zuerst für Puncte, die in einer gera Linie liegen, dann für jede Lage derselben in einer Eb Er meynt, daß Apollonius nur von Quadraten d Satz ausgesagt habe, und bemerkt dagegen, daß er g allgemein sey. Allein Apollonius hat ihn wirklich a gemein genommen, weil das von Pappus gebrauc Wort εἶδος jede geradlinichte Figur bedeutet.

64. Robert Simpson hat in dem von ihm w der hergestellten Werke des Apollonius die Analy

Digitized by Google

Synthesis des Satzes nach der alten griechischen Me-
vorgetragen. Im wesentlichen ist der Beweis mit
ier gegebenen derselbe, aber durch die Form der alt-
trischen Rechnung weitläufiger und schwieriger. Die
wie Simpson die Allgemeinheit des Satzes für ir-
eine Anzahl von Puncten darthut, ist einfach und
ich. Es wird gezeigt, daß der Satz, wenn er für
eine Anzahl von Puncten gilt, auch für die nächst
re richtig ist, auf folgende Art für drey und vier
te.

65. Für drey Puncte sey der Satz erwiesen, er
uch für vier Puncte dargethan werden, nämlich daß
Kreis der Ort ist, an welchem die Summe $m \times AP^2$
$\times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$ (Fig. 27.)
änderlich ist. — Man verbinde zwey der gegebenen
te, wie A, B, nehme auf der Linie AB den Punct
daß $BE : AE = m : n$ sey, und bestimme ei-
Kreis so, daß an demselben die Summe $(m + n) EP^2$
$\times CP^2 + q \times DP^2 = H$, unveränder-
ey, so ist an demselben auch $m \times AP^2 +$
$BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$ unveränderlich.

Denn es ist $mn \times AP^2 + n \times BP^2 =$
$AE^2 + n \times BE^2 + (m + n) EP^2$. Addirt
zu den Theilen dieser Gleichung die Theile $(m + n)$
$+ p \times CP^2 + q \times DP^2 = H$, so ist $m \times AP^2$
$n \times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$
$n \times AE^2 + n \times BE^2 + H$, einer unveränder-
Größe.

Auf gleiche Art folgt nun der Satz für fünf Puncte,
für sechs, u. s. f.

66. Unter die merkwürdigen Eigenschaften des
es gehört auch diejenige, welche der Cotesische Lehr-
usſagt, s. Th. I S. 561 ff. Es wird aber dieser
nicht anders als durch eine algebraisch-trigonome-
e Rechnung erwiesen werden können.

Digitized by Google

67. Aus dem Mittelpuncte C (Fig. 28.) sey e
Kreis beschrieben, und an dem Puncte M sey die berü
rende MD gezogen, welche den verlängerten Durchmes
BA in D schneide. Von M sey MP senkrecht auf A
in P: es ist CP : CA = CA : CD.

Wegen der ähnlichen Dreyecke PCM, MCD.
Der Satz gilt auch für die Ellipse, s. Ellipse, 30.

68 Aus der Proportion CP : CA = CA : C
folgen diese beide:

$$CA + CP : CD + CA = CP : CA,$$
$$CA - CP : CD - CA = CP : CA.$$

Daraus ist BP : BD = AP : AD, oder BD : B
= AD : AP. Die Linie DB wird von dem Kreise u
der senkrechten durch den Berührungspunct harmo
nisch getheilt, s. harmonische Theilung, Th. II. S
698.

69. Wenn an zwey Puncte M, N eines Krei
umfanges (Fig. 28.) berührende gezogen werden, d
sich in D schneiden, und von diesem Durchschnittspunc
an den Kreis irgend eine gerade DEF gezogen wird,
wird diese von dem Durchschnittspuncte der berührende
dem Kreisumfange und der geraden, die Berührungs
puncte verbindenden MN harmonisch getheilt.

Denn man ziehe aus dem Mittelpuncte C die CD
und die Halbmesser CM, CN, so sind die rechtwinkl
gen Dreyecke, CMD, CND, einander gleich (Dre
eck, 4), und MN schneidet die CD in P unter einem
rechten Winkel. Eben diese treffe die DF in G. G
werde CH auf DF senkrecht gesetzt, so sind die Dreyec
CHD, GPD sich ähnlich, und es ist CD : DH =
DG : DP, also CD × DP = DH × DG. Ja
dem rechtwinkligen Dreyeck CMD, worin MP senkrech
auf CD steht, ist CD × DP = DM², zugleich
DM² = DE × DF (37.), also ist DE × DF

H × DG. Nun ist DE + DF = 2DH.
EH = FH ist, also ist 2DE × DF = DE
G + DF × DG. Man nehme auf beiden Sei-
e beiden Rechtecke, DE × DG + DF × DE
so bleibt DE × GF = DF × EG. Daraus
F : FG = DE : EG, und DF ist in E, G, H
nisch getheilt.

70. Diese Eigenschaften haben alle Kegelschnitte
m Kreise gemein, wie in dem Artikel, krumme Li-
er ersten Classe, gezeigt wird.

71. Von einem Puncte A außerhalb eines Krei-
Fig. 29.) sind an diesen zwey berührende AB, AC
n, auch zwey denselben schneidende, ADE, AFG;
raden DF, EG durch die neben einander liegenden
schnittspuncte D, F und E, G der schneidenden
em Kreise, schneiden verlängert sich auf der verlän-
BC, der durch die Berührungspuncte gezogenen,
mselben Puncte H; und die geraden DG, FE,
die entgegengesetzten Durchschnittspuncte mit dem
, D, G und F, E treffen sich in demselben Puncte
geraden BC innerhalb des Kreises.

Es ist nämlich eine Eigenschaft der harmoni-
Theilung einer geraden Linie, daß die geraden, wel-
urch die vier Theilungspuncte nach irgend einem
te gezogen sind, jede andere gerade auch harmonisch
n (s. Theilung gerader Linien). Die geraden AE,
werden von dem Kreise und der die Berührungspuncte
denden BC harmonisch getheilt, von der letztern die
e in L, die andere in M. Zieht man nun von dem
cie H, wo die EG die BC schneidet, nach den Punc-
A und D die geraden HA, HD, so theilen diese
den schon gezogenen LH, EH die Linie AG har-
sch ein. Diese ist aber auch durch den Kreis und die
harmonisch getheilt. Da drey Puncte, A, M, G
n Theilungsarten gemein sind, so kann der vierte,
jene bestimmte, nicht verschieden seyn, sondern die

Digitized by Google

DH und der Kreis schneiden die AG in demselben Pu
F. Daher geht die DF nach demselben Puncte
BCH, in welchem die EG sie trifft.

Auf gleiche Art wird gezeigt, daß die geraden
bindenden DG, FE sich in einem Puncte K der
treffen.

72. In einem Kreise (Fig. 30.) ist irgend
Sechseck ABCDEF gezeichnet. Je zwey Seiten,
schen welche zwey andere liegen, werden bis zu ih
Durchschnittspuncte verlängert; (den Fall, da sie pa
lel sind, bey Seite gesetzt), nämlich AB und ED
G; BC und FE nach H; CD und AF nach I:
Durchschnittspuncte G, H, I liegen in einer ger
Linie.

Den Gang des ziemlich künstlichen Beweises
übersehen dient folgende vorläufige Bemerkung. W
die beiden GH, HI eine gerade Linie ausmachen, s
der Winkel GHM der GH und der mit CI parallel
zogenen HM gleich dem W. HID; und eben so
wenn HN parallel der EG gezogen ist, der W. IH
= HGD. Daher sind die Dreyecke GHM, H
ähnliche, und es ist GM : MH = HN : NI,
GM : DN = MD : NI, oder GM : MD = DN :
Umgekehrt, wenn erwiesen werden kann, daß diese P
portion unbedingt Statt hat; so liegen die drey Du
schnittspuncte in einer und derselben geraden Linie.

Man ziehe MB, NF, so wird das Verhält
GM : MD zusammengesetzt aus den Verhältni
GM : MB und MB : MD. Eben so ist das Verh
niß DN : NI zusammengesetzt aus denen, DN :
und NF : NI. Jene Verhältnisse müssen nun mit
sen verglichen werden, weswegen die geraden BD, F
zu ziehen sind. Man verbinde auch noch B und E du
die geraden BE, und C, F durch CF.

In dem Viereck BCDE ist der W. CBE =
äußern CDM, weil beide mit dem W. CDE zwey Rec

Digitized by Google

nachen (22.). Da MH parallel mit CD ist, so ist
HMD = CDM, also W. HMD = CBE, oder
HME = HBE. Darum läßt sich um das Vier-
MBE ein Kreis beschreiben (21.), und es ist W.
E = BHE. Auf gleiche Weise ist in dem Viereck
FC der W. HNC = HFC. Darum läßt sich
asselbe ein Kreis beschreiben, und es ist W. CNF
CHF. Folglich ist W. BME = CNF. Ferner
S. MBH = MEH = FCD. Da W. CBD
FD, so ist MBH + CBD = FCD + CFD,
st, W. MBD = FDN. Gleichfalls ist W. NFH
NCH = BED. Da W. EFD = EBD, so ist
NFD = BDM. Folglich sind die Dreyecke MBD,
F ähnliche, worin die übereinstimmenden Winkel in
lben Folge liegen, als in der Bezeichnung der Drey-
ie Buchstaben an ihren Scheiteln.

Man verlängere MB, NF bis an den Kreis in
K, ziehe BK, FL. Es ist W. LFC = MBC.
wie vorher schon bemerkt ist, der W. MBC oder
H = FCD, also W. LFC = FCD ist, so ist
parallel mit CD. Ferner ist W. KBE = NFE,
wie vorher bemerkt ist, der W. NFE oder NFH
ED, also ist W. KBE = BED, und daher
parallel der DE. Nun ist W. GBM = LBA
LFA = CIF; und eben so IFN = KFA
KBA = DGB. Folglich sind die Dreyecke MBG,
ähnliche, worin die übereinstimmenden Winkel die-
Folge haben, wie in der Bezeichnung der Buch-
n.

Die zwey Paare ähnlicher Dreyecke MBG, NIF,
MBD, NDF geben die Proportionen, MG: MB
NF: NI, und MB : MD = ND : NF. Aus
n entsteht durch Zusammensetzung der Verhältniss die
portion MG : MD = ND : NI. Da die paral-
MH und DN, MD und HN sich gleich sind, so
MG : HN = MH : NI, oder MG : MH
NH : NI. Da auch der W. GMH = HNI ist

Digitized by Google

so sind die Dreyecke GMH, NHI sich ähnlich, so
der W. MGH = NHI, und der W. MHG = N
ist. Daher liegen GH, HI in gleicher Richtung, da
Verlängerung von GH oder von IH eben solche gle
Winkel giebt.

73. Wenn zwey der zu verlängernden Chorden
ander parallel sind, als AB und DE, so fällt die
DE parallele BK in BA; es ist alsdann der W. AB
= o, also der W AFK oder NFI = o, und
fällt in I. Daher ist HI parallel mit DE oder
AB.

74. Der Satz ist in dem Anhange zu den geo
trischen Aufgaben, welche Schwab seiner Ausgabe
Euklids Paris beygefügt hat, enthalten. S. 256.
Es wird da gesagt, daß er in Maclaurins We
über die Fluxionen, nr. 623, sich befinde. An die
Orte ist aber ein anderer, doch ähnlicher, Satz enthal
Noch wird daselbst angeführt, daß der Lehrsatz ein bes
derer Fall eines Satzes sey, den Robert Simson
gemein von den Kegelschnitten erwiesen hat; Lord Str
hope habe denselben für den Kreis durch die Element
Geomerrie erwiesen. — Der hier vorgetragene Bew
weicht von dem welchen Schwab mitgetheilt hat, in
Anordnung ab.

75. In einem Kreise (Fig. 31.) ist irgend ein Vier
ABCD beschrieben. Mit der Seite AB ist eine par
lele EI gezogen, welche von der Seite CD in E geschn
ten wird. Diese treffe den Kreis in F, I, und die b
den Seiten des Vierecks AD, BC, in G, H; es
EF : EG = EH : EI.

Denn es ist der W. IGD = A = 2 R — C
also W. EGD = ECH, und die Dreyecke EGI
ECH sind sich ähnlich. Daher ED : EG = EH : E
Da auch ist EF : ED = EC : EI, so ist EF : E
= EH : EI.

Digitized by Google

6. Zu einem Kreisumfange (Fig. 32.) sind sechs
A, B, C, D, E, F genommen. Die Chor-
, CD schneiden sich in G, die Chorden BE,
H; die Chorden CE, AF in I: die Durchschnitts-
, H, I liegen in derselben geraden Linie.

ch den Punct I ziehe man mit AB die Parallele IK,
n BE in L geschnitten werde, und an den Punct
raden GH, IH, so wird man zu zeigen haben,
Dreyecke GBH, ILH sich ähnlich, und daher
el BHG, LHI einander gleich sind.

Man ziehe die Chorde EF, so ist in dem Viereck
die Summe der Winkel bey A und E = 2 R.
BAI + AIK = 2 R, so ist W. BEF = AIK,
L + FIL = 2 R. Daher läßt sich um das
HFLI ein Kreis beschreiben (23.) und es ist
I = LFI, oder W. CEB = AFN, wenn
N hin verlängert wird. Diese FN schneide den
O, so ist der Bogen AQ, auf welchem der Win-
N oder AFO steht, gleich dem Bogen BC, der
Winkel BEC am Umfange gehört. Folglich ist
e CO durch die Puncte C, O parallel mit AB
Sie schneide die verlängerte DF in P, die
AF in Q, und die von B nach D gezogene in
ie DF schneide die verlängerten AB und LI,
I, diese in K, und LF die BAM in N, so ist
Q = MN : MA, und PR : PC = MB : MG.
PO : PQ = PR : PC (75.), also ist
MA = MB : MG. Daraus durch Trennung
NA = MB : BG. Wegen der ähnlichen Drey-
FN, KFL, und AFN, IFL, ist MN : NA
: LI, also auch MB : BG = KL : LI. We-
hnlichen Dreyecke MHB, KHL ist HB : BM
: KL, also durch Zusammensetzung der Ver-
, HB : BG = HL : LI. Daher sind
n Dreyecke HBG, HLI, in welchen die Win-
B und L gleich sind, sich ähnlich; die Winkel

Digitized by Google

BHG, LHI sind sich gleich, und GH, HI liegen in gerader Richtung.

77. Die beiden Lehrsätze für den Kreis (72. 76.) gelten auch für die Kegelschnitte, da jeder Kegelschnitt als eine Projection eines Kreises anzusehen ist. In der projicirten Figur ändern sich zwar die Verhältnisse und Lagen der geraden Linien, allein alle Theile gerader Linien bleiben in gerader Richtung bey einander. Die beiden Lehrsätze haben ihren Nutzen, wenn ein Kegelschnitt, von dem fünf Puncte gegeben sind, gezeichnet werden soll. Davon in dem Artikel, krumme Linien der ersten Classe.

Bestimmung eines Kreises durch Puncte, berührende gerade und berührende Kreise.

78. Daß ein Kreis durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt wird, ist oben (17.) bemerkt. Anstatt der Puncte kann man auch berührende gerade Linien oder Kreise nehmen. Es sind aber, außer dem Falle, da drey gegebene gerade Linien zu berühren sind, zwey, auch mehrere Kreise möglich, welche die Forderung erfüllen. Die Aufgabe ist: wenn von Puncten, geraden Linien und Kreisen in derselben Ebene der Lage nach drey gegeben sind, (Kreise zugleich der Größe nach), einen Kreis zu zeichnen, der durch die gegebenen Puncte geht, wofern Puncte (einer, zwey oder drey) gegeben sind, und jede der gegebenen Linien berührt. Apollonius hat über diese Aufgabe eine Abhandlung in zwey Büchern geschrieben, welche verloren ist. Sie führte den Titel, περὶ ἐπαφῶν, von den Berührungen. Pappus hat zu dieser Schrift Lemmata aufgesetzt, welche wir in seinen Sammlungen mathematischer Sätze im 7ten Buche noch haben. Vieta gab 1600 eine kleine Schrift heraus, unter dem Titel, Apollonius Gallus, worin er die zehn besondern Aufgaben, welche die Hauptaufgabe begreift, aufgelöset hat. Man kann diese Schrift zwar nicht für die Wiederherstellung der Apollonischen gel-

Digitized by Google

lassen, allein sie ist ohne Rücksicht auf diese eine selbst-
dige, worin die Auflösungen scharfsinnig und doch ein-
sind. Man könnte daran aussetzen, daß nicht alle
ndern Fälle der Aufgaben darin vorgenommen sind;
n diese mag ein Liebhaber dieser Untersuchungen, der
dazu hat, selbst zusetzen. Die eigene Methode des
fassers ist, daß er jede Aufgabe auf eine andere bringt,
schon aufgelöset ist. So zeigt er bey der letzten und
ersten Aufgabe, nämlich, einen Kreis zu beschreiben,
von drey gegebenen berührt wird, daß sie darauf be-
t, einen Kreis zu finden, der von zwey gegebenen
sen berührt wird, und durch einen gegebenen Punct
. Diese wird auf die Aufgabe gebracht, durch drey
bene Puncte einen Kreis zu beschreiben. Die Auflö-
en des Vieta gefielen dem Adrianus Roma-
, der die gedachte Aufgabe aufzulösen einen unzulä-
Weg gewählt hatte, so sehr, daß er von Würzburg,
r sich damals aufhielt, nach Frankreich reisete, um
mit Vieta über mathematische Gegenstände zu bespre-
. Camerer hat die Schrift des Vieta mit den
sätzen des Pappus, die hier zum erstenmahl grie-
h erscheinen, herausgegeben, und beiden Schriften
itze und Berechnungen beygefügt. Die empfehlungs-
he Sammlung hat den Titel: Apollonii de tacti-
ous, quae supersunt, ac maxime Lemmata
pi, cet. Gothae et Amstel. 1795. 178 pag. 8.
ft.

79. Die Aufgabe kann dahin abgeändert werden,
der gesuchte Kreis einen gegebenen Halbmesser habe,
ey von den Puncten, geraden Linien und Kreisen nur
in derselben Ebene gegeben seyn dürfen. Marinus
etaldus hat sie in seinem Supplemento Apollo-
Galli, Venet. 1607. aufgelöset.

80. Die Aufgabe von dem Kreise, der drey gege-
Kreise berührt, hat viele beschäftigt. Descartes
darüber ein paar Briefe mit der Prinzessinn Elisa-

Digitized by Google

beth, (der Tochter des Kurfürsten Friedrich von der Pf
der eine kurze Zeit König von Böhmen war) gewechselt.
hatte ihm eine Auflösung geschickt, die er sehr rühmt.
war eine analytische, nach der Methode des Desc
tes. Er selbst zeigt nur, wie man eine Gleichung
den Halbmesser des gesuchten Kreises finden könne. (C
tesii epistolae, T. III. ep. 72. 73.) — Newt
findet in seiner Arithmetica universali durch eine geo
trische Rechnung die Auflösung des Falles, da ein Kr
gefunden werden soll, der durch einen gegebenen Pu
geht, und zwey gegebene Kreise berührt. Auf diesen bri
er die Aufgabe von drey berührenden Kreisen. Zu verg
chen ist hierbey das Lemma XVI. in den Princip. Ph
nat. L. I. — L'Hopital zeigt in seinem Werke v
den Kegelschnitten, S. 377, wie für diese Aufgabe e
Gleichung gefunden werden könne. Weil aber diese
Construction ungemein beschwerlich machen würde, le
er eine Construction aus derjenigen für den Fall her,
zwey Kreise sich gleich sind. Die Aufgabe hat bey
eine andere Form. — In Lamberts deutschem Br
wechsel, Bd. I. S. 311 sind zwey Auflösungen der A
gabe von drey berührenden Kreisen, von welchen die e
mit der von Descartes angezeigten Ähnlichkeit hat,
andere auf trigonometrischen Gründen beruht. Die Gl
chungen werden aber nicht völlig entwickelt, noch weni
zu Constructionen benutzt. Eine polnische Gräfinn ha
einem Freunde Lamberts, Holland, die Frage von d
drey berührenden Kreisen vorgelegt, zu dem Zwecke, we
ein Uhrrad gefunden werden sollte, das drey Räder von
gebener Größe und Lage zu treiben hätte. — In der
ben Sammlung, Bd. V. S. 252 ist eine Auflösung v
Oberreit, die auf der Formel für den Inhalt ein
Dreyecks aus den drey Seiten (s. Dreyeck, 34.) beru
Die Werthe der Coefficienten sind zwar sehr symmetri
zusammengesetzt, bestehen aber aus sehr vielen Glieder
wie es nicht anders möglich ist. — Selbst Euler h
noch in den letzten Jahren seines Lebens die Frage vorg
nommen. In den Novis Actis Ac. Petrop. T. VI.

Digitized by Google

88 ist von ihm eine im J. 1779 mitgetheilte Auflö-
nthalten, die der von Lambert angewandten Me-
ähnlich ist. Er leitet daraus sowohl eine Gleichung
n Abstand der Mittelpuncte des gesuchten Kreises
ines der gegebenen her, als auch eine Construction,
er keine ächt geometrische seyn möchte. Eben da-
hat Fuß noch zwey analytische Auflösungen beyge-
und aus der einen eine Construction hergeleitet, die
cksicht auf die Beschaffenheit der Aufgabe bequem
ist. Die Construction, welche Vieta angiebt,
n Scheine nach sehr einfach, in der That aber aus
Constructionen zusammen gesetzt. — In der deut-
Übersetzung von Clairauts Algebra, die von
pelhoff besorgt hat, sind einige Aufgaben über die
gungen am Kreise trigonometrisch aufgelöset, unter
auch diejenige, wo drey Kreise zu berühren sind. —
erer hat in der vorher angeführten Schrift auch ei-
ieser Aufgaben durch eine geometrische Rechnung
öset, von der letztern auch eine ihm von Pfleide-
nitgetheilte beygefügt.

81. Es ist nicht nöthig, hier alle zehn Aufgaben,
nur von jeder einen Fall, aufzulösen. Folgende
ze und Aufgaben genügen, um das ganze Geschäft
ersehen.

82. Ein Kreis (Fig. 33.) schneide die gerade
n B, C, und berühre die gerade AD in E, welche
sich in A schneiden, so ist $AE^2 = AB \times AC$,
). Daraus erhellt, wie der Mittelpunct O eines Krei-
funden wird, der durch zwey gegebene Puncte B, C
und eine der Lage nach gegebene gerade AD be-
. Der Mittelpunct liegt in der auf BC durch die
e derselben, und in der auf AD durch E senkrecht
enen. Um den Punct E, oder die Länge von AE
den, dient hier bequem das Verfahren in (42.),
man nur AB oder AC auf die andere Seite von A
verlängerten AB tragen muß.

Digitized by Google

83. Die beiden geraden AD, AF berühren einen Kreis in E, G, so halbirt die durch den Mittelpunct O gezogene gerade AO den Winkel DAF, wegen der gleichen Dreyecke AOE, AOG.

84. Soll ein Kreis gezogen werden, der drey gegebene, sich in den drey Puncten A, D, F schneidende gerade AD, AF, DF, berührt, so liegt der Mittelpunct in dem Durchschnitte je zweyer die Winkel A, D, F halbirenden geraden.

85. Sind zwey gerade AD, AF der Lage nach gegeben, welche ein Kreis berühren soll, der zugleich durch den gegebenen Punct C geht, so halbire man den Winkel DAF durch die gerade AO, ziehe von C auf AO die senkrechte CH, verlängere sie nach K, so daß HK = CH, und zeichne den Kreis, der durch die Puncte C, K gehe, und die eine der gegebenen geraden berühre, so berührt dieser auch die andern. — Eine fasslichere Auflösung ist in dem Artikel, Analysis als Methode, Th. I. S. 92. gegeben.

86. Es sind A, B (Fig. 34.) die Mittelpuncte zweyer Kreise, die sich in C berühren. Durch den Berührungspunct C ziehe man willkürlich in dem einen Kreise die Chorden CD, CE, welche den andern Kreis in F, G schneiden; es ist FG parallel mit DE.

Denn man ziehe die Halbmesser AD, AE, und BF, BG, so sind die Dreyecke CAD, CBF ähnlich, so wie CAE, CBG, weil in gleichschenkligen Dreyecken durch einen der Winkel die andern gegeben sind. Da nun CD : CF = CA : CB, und CE : CG = CA : CB ist, so ist CD : CF = CE : CG; oder CD : CE = CF : CG; also sind die Dreyecke DCE, FCG sich ähnlich, (Dreyeck, 6), und die Seiten DE, FG sind parallel.

87. Man ziehe in dem Puncte G die berührende HGI an den Kreis CFG, welche DE in H schneide,

Digitized by Google

CE × EG = DE × EH. Denn es ist der W.
= CFG (30.), das ist, W. HGE = CFG =
. Also sind die Dreyecke CDE, HGE ähnliche,
lchen ist CE : DE = EH : EG.

38. Eben diese Eigenschaften finden Statt an
n, die sich außerhalb berühren.

89. Sind D, E zwey gegebene Puncte, durch
ein Kreis zu ziehen ist, der einen gegebenen CFG
re, so theile man die gerade DE in H so, daß DE
H gleich sey dem Rechtecke der Segmente einer von
den Kreis CFG gezogenen geraden Linie, wie es das
eck CE × EG ist, oder dem Quadrate der berüh-
EK. Ziehe man die schneidende durch den Mittel-
B, so ist CE × EG = (EB + BG)(EB — BG)
$EB^2 - BG^2$. Es ist also DE : EK = EK : EH.
H ziehe man an den gegebenen Kreis die berührende
Durch den Berührungspunct G ziehe man EG,
den Kreis in C schneide. Durch die Puncte D, E, C
man einen Kreis, so berührt dieser den gegebenen

Der Beweis beruht darauf, daß durch die Construc-
die Dreyecke CED, HEG ähnliche sind; daß der
FG = HGE, also auch der W. CDE = CFG
Zu diesen gleichen Winkeln am Umfange der beiden
gehören gleiche Winkel an ihren Mittelpuncten, näm-
AE = CBG. Daher ist der W. ACE = BCG,
e Mittelpuncte der beiden Kreise liegen mit dem ge-
haftlichen Endpuncte der Halbmesser AC, BC in
r Linie. Daher berühren sich die beiden Kreise in
6. II.)

90. Ein Kreis um den Mittelpunct C (Fig.
berührt die um A und B beschriebenen Kreise in D, E.
erade durch A, B und D, E schneiden sich in F.
Durchschnittspunct ist derselbe für jede Größe und
nes Kreises, der die gegebenen um A, B beschriebe-
reise berührt.

Digitized by Google

Die gerade DE schneide den Kreis um A in G, den um B in H, und es seyn AG, BH gezogen. Im Dreyeck DCE sind die Winkel bey D und E sich gleich, so wie in dem Dreyeck DAG die Winkel D und G. Da CD und AD, so wie CE und BE eine gerade ausmachen, so ist W. CDE = ADG, und W CED = BEH, also ist der W. DEB = DGA, und AG parallel mit BE. Daher ist AF : BF = AG : BE, und durch Umkehrung AF : AB = AG : AG − BE, folglich AF eine gegebene gerade Linie.

91. So wie AG und BE parallel sind, sind es auch AD und BH, daher ist der W. DAG = HBE, und die Bogen DG, HE, so wie die zugehörigen Sectoren und Segmente ähnliche.

92. Die gerade durch die Mittelpunkte A und B schneide den erstern Kreis in K, L, den andern in M, N, und es werden GL, EN gezogen. Wegen der parallelen AG, BE sind die Winkel GAF, EBF sich gleich, also auch die Winkel GLA, ENB, und ihre Nebenwinkel. Ferner sind in dem Viereck DGLK die Winkel bey D und K den Nebenwinkeln derer bey L und G gleich, das ist den Winkeln FLG, FGL, oder den Winkeln FNE, FEN. Folglich sind die Dreyecke FDK, FNE sich ähnlich und es ist FK : FD = FE : FN. Daher ist das Rechteck FD × FE ein gegebenes, und gleich dem FK × FN.

93. Wenn die Kreise um A und B gleich groß sind, so ist AF : BF = 1 : 1, das ist, AF und BF sind beide unendlich groß, und DE parallel mit AB.

94. Soll durch einen gegebenen Punct P ein Kreis beschrieben werden, der zwey gegebene Kreise, die um A und B, berührt, so bestimme man zuerst den Punct F auf der geraden durch A, B, so, daß AF : BF = AD : BE sey. Ist EDF der gesuchte Kreis, und es wird an denselben die FP gezogen, welche ihn in Q schneidet, so ist

Digitized by Google

: FQ = FD × FE. Sind nun D, E die
rungspuncte, so ist FD × FE = FK × FN,
FP × FQ = FK × FN, ein gegebenes Rechte
Dadurch ist FQ oder der Punct Q gegeben. Dem-
t nun durch zwey Puncte, P, Q ein Kreis zu zie-
er einen der gegebenen Kreise berührt. Daß dieser
n Kreis um B berührt, ist noch zu erweisen.

Es sey QDP der um C beschriebene Kreis, welcher
A in D berührt. Man ziehe FD, welche den
QDP in E schneide, so ist FP × FQ = FD ×
Da genommen ist FP × FQ = FK × FN,
FD × FE = FK × FN, und da D zugleich
unct auf dem Kreise um A ist, so ist FD × FG
K × FL. Hieraus fließen die beiden Proportionen,
FK = FN : FE, und FD : FK = FL : FG.
t FN : FE = FL : FG; die Dreyecke EFN,
sind sich ähnlich, und daher ist EN : GL
N : FL, auch sind die Winkel bey N und L
eich. Ferner, da AF : BF = AL : BN genom-
t, so ist AF — AL : BF — BN, oder FL : FN
L : BN. Aus dieser und der vorher gefunde-
Proportion folgt EN : GL = BN : AL, oder
BN = GL : AL. Folglich sind die Dreyecke
, ALG sich ähnlich, und es ist BE = BN, also
ein Punct des Kreises um B. Da EN und GL
el sind, so ist W. DEN = DGL, und wegen
3. BEN = AGL ist W. BEH = AGD =
= DEC, also liegt BE mit CE in derselben ge-
Linie, und die Kreise um B und C berühren sich

95. Die Aufgabe, zu drey Kreisen einen vierten
den, der von jenen berührt wird, löset Vieta, wie
r bemerkt ist, dadurch auf, daß er sie auf diejenige
et, einen Kreis zu finden, der von zwey gegebenen
n berührt wird, und durch einen gegebenen Punct
Die Mittelpuncte der drey Kreise seyn, des ersten

Digitized by Google

A, des zweyten B, des dritten C. Aus dem Mittelpuncte C beschreibe man einen Kreis, dessen Halbmesser die Summe oder die Differenz der Halbmesser des ersten und dritten Kreises ist; aus dem Mittelpuncte B einen Kreis, dessen Halbmesser die Summe oder die Differenz des ersten und zweyten ist. Hierauf beschreibe man einen Kreis, der durch den Mittelpunct des ersten A gehe, und zugleich die beiden gezogenen Hülfskreise berühre. Der Mittelpunct desselben ist derjenige des gesuchten. Der Halbmesser wird durch die bey den Hülfskreisen gemachten Annahmen bestimmt.

96. Es sind hier vier Hauptfälle, nachdem man zu den Halbmessern der Hülfskreise entweder Summe oder Differenz der gegebenen Halbmesser genommen hat. Die drey Kreise berühren den gefundenen entweder alle auswärts, oder alle einwärts, oder zwey berühren ihn auswärts (einwärts), und einer einwärts (auswärts). Bey den beiden letztern Fällen finden jedesmahl drey Abänderungen Statt, nachdem man an jedem der gegebenen Kreise die innere oder die äußere Berührung annimmt. So hat die Hauptaufgabe acht verschiedene Fälle.

97. Man kann diese Aufgabe noch in einer andern Gestalt vortragen, nämlich in einem gegebenen Dreyecke ABC (Fig. 36.) einen Punct O zu finden, so daß die Unterschiede, AO − CO; BO — CO, gegebene Größen seyn. Man setze CO = z, AO = z + f; BO = z + g, wo f und g auch beide subtractiv seyn können. Die Halbmesser der um A, B, C beschriebenen gegebenen Kreise seyn α, β, γ, der Halbmesser des sie alle drey berührenden = x, der in jedem besondern Falle verschieden ist, so sind, nach den vier vorher angezeigten Hauptfällen,

	I.	II.	III.	IV.
AO	x + α	x — α	x + α	x — α
BO	x + β	x — β	x — β	x + β
CO	x + γ	x — γ	x — γ	x + γ

Digitized by Google

In III. kann jeder einzelne der drey Halbmesser , in IV. jeder einzelne subtractiv seyn. So ent- och vier Abänderungen von III. und IV. welche hier fortlaufenden Zahlen bezeichnet sind:

V.	VI.	VII.	VIII.
$x - \alpha$	$x + \alpha$	$x - \alpha$	$x + \alpha$
$x + \beta$	$x - \beta$	$x - \beta$	$x + \beta$
$x - \gamma$	$x + \gamma$	$x + \gamma$	$x - \gamma$

s werden folgende Werthe von f und g durch die en Halbmesser erhalten.

II. $f = \pm(\alpha - \gamma)$; $g = \pm(\beta - \gamma)$.
IV. $f = \pm(\alpha + \gamma)$; $g = \mp(\beta - \gamma)$.
VI. $f = \mp(\alpha - \gamma)$; $g = \pm(\beta + \gamma)$.
III. $f = \mp(\alpha + \gamma)$; $g = \mp(\beta + \gamma)$.

Die zusammengehörigen Werthe von f und g sind er zwey Unterschiede der Halbmesser, oder zwey en, oder eine Summe und ein Unterschied mit ge- gem Wechsel.

98. Obgleich die Aufgabe kaum eine theoretische aktische Anwendung hat, so ist sie doch durch sich eachtungswerth. Die analytische Auflösung ist h.

Man setze in dem Dreyeck ABC (Fig. 36.) die $AC = a$; $BC = b$; den W. $ACB = 2\zeta$; $= \zeta + \varphi$; $BCO = \zeta - \varphi$; $CO = z$; AO $+ f$; $BO = z + g$.

Es ist

$$+\varphi) = \frac{a^2 + z^2 - (z+f)^2}{2az} = \frac{a^2 - f^2 - 2fz}{2az};$$

Digitized by Google

$$\cos(\zeta - \varphi) = \frac{b^2 + z^2 - (z+g)^2}{2bz} = \frac{b^2 - g^2 - 2gz}{2bz}$$

(Trigonometrie, oder Dreyeck, 19. 20.).

Man setze $a^2 - f^2 = 2F$; $b^2 - g^2 = 2G$, so ist

$$\cos(\zeta + \varphi) = \frac{F}{az} - \frac{f}{a};$$

$$\cos(\zeta - \varphi) = \frac{G}{bz} - \frac{g}{b}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man entweder den Winkel φ oder die Größe z wegschaffen, um entweder eine Gleichung für z, oder eine für φ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zu erhalten. Das erstere geschieht durch Verwandlung der Cosinus von $(\zeta \pm \varphi)$ in Sinus und Cosinus von ζ und φ, oder kürzer folgendergestalt. Man ziehe OP und OQ senkrecht auf AC und BC, und ziehe PQ, so kann um das Viereck CPOQ ein Kreis beschrieben werden (23.), und es ist $CO \times \sin PCQ = PQ$ (47.), und $CO^2 \times \sin 2\zeta^2 = PQ^2 = CP^2 + CQ^2 - 2CP \times CQ \times \cos 2\zeta$, (Dreyeck, 19.). Da

$$\frac{CP}{CO} = \cos(\zeta + \varphi), \text{ und } \frac{CQ}{CO} = \cos(\zeta - \varphi)$$

ist, so ist

$$\sin 2\zeta^2 = \cos(\zeta + \varphi)^2 + \cos(\zeta - \varphi)^2 - 2\cos(\zeta + \varphi).\cos(\zeta - \varphi).\cos 2\zeta.$$

In dieser Gleichung setze man für $\cos(\zeta + \varphi)$ und $\cos(\zeta - \varphi)$ ihre obigen Werthe, so wird eine quadratische Gleichung für z erhalten, die unter dieser Form,

$$Lzz - 2Mz + N = 0,$$

dargestellt werden kann, worin

Digitized by Google

$= bbff + aagg - aabb \sin C^2 - 2ab\,gf \cos C;$
$= bbFf + aaGg - ab\,(Gf + Fg) \cos C;$
$= bbF^2 + aaG^2 - 2ab\,FG \cos C.$

Größe N ist immer positiv, weil $N = (bF - aG)^2 + abFG - 2abFG \cos C$, und $\cos C < 1$ ist. Die ficienten L und M mögen positiv oder negativ seyn.

99. Die Gleichung hat zwey Wurzeln, weil die erschiede, f, g, positiv oder negativ seyn können, weil in der Frage nicht bestimmt ist und nicht bestimmt en darf. Wir haben gesetzt, $AO - CO = +f$, und $-CO = +g$; es kann aber auch, ohne die Auflö- weiter als in den Vorzeichen von f und g zu verän- $CO - AO = +f$, und $CO - BO = +g$ ge- werden, welches eben so viel ist, als f und g in Be- ng auf jene Annahmen negativ nehmen. Nimmt f und g negativ, so bleiben F und G dieselben mit lben Beschaffenheit; die Coefficienten L und N blei- auch ungeändert, und nur M wird negativ. Die chung wird nun

$$Lzz + 2Mz + N = 0.$$

Wurzeln dieser Gleichung sind dieselben mit denen je- erstern Gleichung, nur entgegengesetzt (Gleichung, . Daher werden die beiden Fälle, welche nur durch Beschaffenheit der Unterschiede f und g verschieden sind, ner einzigen Gleichung begriffen.

100. Es ist hier ein ähnlicher Fall, als bey der ge, aus dem Unterschiede zweyer Zahlen, $x - y$, und m Producte diese Zahlen zu finden. Die quadratische ichung, deren positive Wurzel die eine dieser Zahlen ist, r zugleich die andere als eine negative Größe, (Glei- g, 34.). Die Form, in welcher die Gleichung für fgestellt ist, deutet zwar auf zwey positive Wurzeln, n sie muß entgegengesetzte Wurzeln haben, weil CO den beiden Annahmen, $AO - CO = +f$ un

Digitized by Google

$BO - CO = +g$ eine andere Beziehung gegen AO und BO, so wie gegen f und g hat, als bey den Annahmen, $CO - AO = +f$ und $CO - BO = +g$. Es muß entweder L allein oder L mit M negativ seyn.

101. Bey der Anwendung auf die Frage von drey Kreisen, die von einem vierten berührt werden sollen, ist schon vorher gefunden, daß $AO - CO$, so wie $BO - CO$ vier Paare gleicher und entgegengesetzter Werthe hat. Bey jedem Paare verwandeln sich äußere Berührungen in innere und umgekehrt. Daher zeigen entgegengesetzte Wurzeln der Gleichung die entgegengesetzte Beschaffenheit der Berührung an. Man lasse α den größten der drey gegebenen Halbmesser, γ den kleinsten bedeuten, und setze $f = \alpha - \gamma$; $g = \beta - \gamma$, so zeigt die positive Wurzel der Gleichung für z drey äußere Berührungen, hingegen die negative Wurzel drey innere an. Setzt man $f = +(\alpha + \gamma)$; $g = -(\beta - \gamma)$, so deutet die positive Wurzel der Gleichung auf eine äußere Berührung an dem größten Kreise, und auf innere Berührung an den beiden andern; die negative Wurzel aber auf eine innere an jenem und äußere an diesen. So auch in den übrigen Fällen.

102. Exempel. Es sey $AC = a = 30$; $BC = b = 20$; $C = 60°$; $f = 8$; $g = 4$: so ist

$$L = -249200;\ M = +106640;$$
$$N = +5491360.$$

Dadurch wird unsere Gleichung nach der Division mit 400,

$$623z^3 + 533zz = 13728\frac{1}{4}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $z = +11,17..$ und $z = -19,73..$ Folglich

$AO = z + f = +19,17..$ und $-11,73..$;
$BO = z + g = +15,17..$ und $-15,73..$

Die Verneinungen von AO und BO beziehen sich nur

Digitized by Google

uf, daß z aus einer Gleichung gefunden ist, die ei-
lich für den positiven Werth von z gilt. Die Lage
Punctes O durch die verneinten Werthe wird eben so
nden, als wenn sie positiv genommen werden. Setzt
$\alpha = 14$; $\beta = 10$; $\gamma = 6$, so ist $x + \alpha = 19,17$;
$x = 5,17$, der gesuchte Halbmesser des Kreises für
ußern Berührungen; und $x = 25,73$ für die innern
ührungen.

103. Die Auflösung in (98.) ist von Euler in
(80.) angezeigten Abhandlung entlehnt. Die alge-
chen Erläuterungen habe ich beygefügt, da sie mir be-
ers in Absicht der Bedeutung positiver und negativer
zeln nützlich schienen. Euler macht zwar wegen
egativen Wurzeln auch die Bemerkung, daß sie nicht
tlich den vorgelegten Fall angehen, sondern denjeni-
da die Halbmesser der gegebenen Kreise, α, β, γ,
gengesetzte Vorzeichen bekommen, wodurch die Glei-
g nur in dem Vorzeichen des zweyten Gliedes eine
änderung erleidet, und die positive Wurzel derselben
egative der zuerst gefundenen Gleichung ist. Er will
die negative Form hier vermeiden; welches nicht nö-
seyn möchte; auch scheint er es als möglich anzusehen,
ie Gleichung für z zwey positive Wurzeln habe.

104. Wenn man die Aufgabe in (97.) ohne Rück-
auf die Berührungen an drey Kreisen behandelt, so
e nur zwey Hauptfälle, deren jeder zwey besondere zu-
Denn man kann erstlich AO — CO sowohl $+ f$
$- f$ setzen, und dabey BO — CO bey jener Annahme
$- g$, bey dieser $= - g$ annehmen; allein auch umge-
bey der erstern Annahme jenes Unterschiedes den an-
$= - g$, und bey der zweyten $= + g$ setzen. Der
etrische Ort des Punctes, an welchem die nach zwey
enen Puncten gezogenen geraden einen gegebenen Un-
ied haben, ist eine Hyperbel; deren Brennpuncte
beiden Puncte sind. Es liegen also die Puncte O,
elche der Unterschied, sowohl von AO und CO als

Digitized by Google

von BO und CO, eine gegebene Größe hat, auf den Durchschnittspuncten dieser beiden Hyperbeln, deren vier oder zwey seyn können. Die Zeichnung einer Hyperbel ist durch die Asymptoten leicht, und ist auch als eine theoretische gar nicht verwerflich, wenn gleich die Aufgabe durch zwey verschiedene quadratische Gleichungen, nicht durch eine biquadratische, aufgelöset wird. Sie vereinigt beide Auflösungen durch zwey gleichartige Constructionen, die man vollkommen leicht übersieht.

Die Aufgabe von den drey Kreisen, welche von einem vierten berührt werden, kann nicht durch die Intersectionen zweyer Hyperbeln aufgelöset werden, weil sie nicht der Fall ist, daß, wenn $AO - CO = \pm f$, und $BO - CO = \pm g$ ist, daneben noch sey $BO - CO = \mp g$, oder wenn dieses letztere bey der Annahme, $AO - CO = \pm f$ Statt hat, dann auch sey $BO - CO = \pm g$.

105. Die Lage der geraden Linie zu finden, welche zwey gegebene Kreise berührt, ist eine Aufgabe, welche in der Optik und Astronomie nützlich ist. Die Mittelpuncte der beiden Kreise seyn A, B, (Fig. 37.) und der um B der kleinere. Die berührende kann entweder so liegen, daß sie die gerade AB jenseits B in E schneide, wobey die Berührungspuncte, C, D, beide auf dieselbe Seite von AB fallen, oder sie schneidet die AB zwischen den Puncten A, B, und die Berührungspuncte F, H, liegen auf verschiedenen Seiten der AB.

Mit der berührenden CDE sey BK parallel, welche AC in K schneidet. Da der W. ACE ein rechter ist, so ist der W. AKB auch ein rechter, und K liegt auf dem Umfange eines Halbkreises, dessen Durchmesser AB ist. Da auch BDE ein rechter ist, so ist $CK = BD$, und AK der Unterschied von AC und BD. Man trage demnach in den über AB beschriebenen Halbkreis die Chorde $AK = AC - BD$, so schneidet diese verlängert den Kreis um A in C, und die mit KB parallele CDE ist die gesuchte berührende.

Digitized by Google

Zweytens sey FH die in den ungleichnamig liegen-
Puncten F, H berührende, und AL ihr parallel,
e von BH, der verlängerten, in I. geschnitten werde.
er W. ALB ein rechter ist, gleich den rechten bey
H, so liegt L auf dem Umfange des über AB be-
enen Halbkreises, und es ist BL = AF + BH.
trage also in diesen Halbkreis die Chorde BL
F + BH, welche den Kreis um B in H schneide, so
der Berührungspunct, und die mit AL parallele
berührt den Kreis um A in F.

106. Zur arithmetischen Auflösung hat man die
AE zu suchen. Wegen der ähnlichen Dreyecke
E, BDE ist AC:BD = AE:BE, und durch Zer-
g, AC — BD:AC = AB:AE, oder AC —
BD = AB:BE. Das Verhältniß von AE:AC
den Sinus des Winkels E. — Auf ähnliche Art ist
BH = AG:BG, und daraus durch Zusammenneh-
AF + BH:AF = AB:AG, oder auch AF +
BH = AB:BG. Das Verhältniß von AF:AG
den Sinus des Winkels G.

107. Eine Aufgabe am Kreise, die in der Katop-
orkommt, aber eigentlich eine rein geometrische ist,
se: an einem Kreisumfange diejenigen Puncte zu fin-
an welchen die dahin von zwey, in der Ebene des
es gegebenen, Puncten gezogenen geraden Linien,
e Winkel mit dem Halbmesser machen. Sie ist durch
meine Geometrie nicht auflösbar.

Es sind A, B (Fig. 38.) die gegebenen Puncte,
der Mittelpunct des gegebenen Kreises, P ein Punct,
elchem die Winkel APC und BPC gleich groß sind.
setze AC = a; BC = b; PC = c, und den W.
B = 2α. Diesen Winkel halbire man durch die ge-
CD, und verlängere PC nach CM. Der Winkel
M sey = φ. In dem Falle der Figur ist AC >
und daher liegt CM von CD ab nach AC hin, so

Digitized by Google

daß $ACM = \alpha - \varphi$; $BCM = \alpha + \varphi$ ist*). In den beiden Dreyecken APC und BPC ist (Trigonometrische Formeln)

$$\text{tang } APM = \frac{a \sin(\alpha - \varphi)}{c + a\cos(\alpha - \varphi)},$$

$$\text{tang } BPM = \frac{b \sin(\alpha + \varphi)}{c + b\cos(\alpha + \varphi)}.$$

Da die beiden Winkel gleich groß sind, so sind diese Brüche sich gleich, und man erhält daraus die Gleichung,

$$a \sin(\alpha - \varphi)(c + b\cos(\alpha + \varphi)) =$$
$$b \sin(\alpha + \varphi)(c + a\cos(\alpha - \varphi)).$$

Durch Entwicklung dieser Gleichung, und durch Auflösung der Sinus und Cosinus der zusammengesetzten Winkel in diejenigen der einfachen, verwandelt sie sich in diese,

$$(ac - bc)\sin\alpha.\cos\varphi - (ac + bc)\cos\alpha.\sin\varphi$$
$$= 2ab \sin\varphi.\cos\varphi,$$

In dieser muß entweder $\sin\varphi$ durch $\cos\varphi$, oder $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$ ausgedruckt werden. Oder man führe statt beider die $\text{tang}\,\varphi = x$ ein, so ist $\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$ (Goniometrie, 14.). Auch setze

*) Der Kreis, der durch die Punkte A, C, P beschrieben wird, ist größer als der durch B, C, P gezogene, weil die Segmente über AC und BC, welche die gleichen Winkel bey P fassen, ähnlich sind (3.), und AC größer als BC genommen ist. Wird nun der W. CPB auf CPA gelegt, so fällt B innerhalb des durch A, C, P gelegten Kreises, und es ist der W. PAC kleiner als PBC, daher ist der W. ACM kleiner als BCM, folglich W. ACM kleiner als ACD.

Digitized by Google

zur Abkürzung $(ac+bc)\cos\alpha = A$; $(ac-bc) = B$; $2ab = C$, so entsteht die Gleichung

$$(B-Ax)\sqrt{(1+xx)} = Cx.$$

diese rational zu machen, muß sie quadrirt werden, rch die geordnete Gleichung hervorgeht,

$$A^2x^4 - 2ABx^3 - (C^2-A^2-B^2)x^2 - 2ABx + B^2 = 0.$$

Es ist $A^2+B^2 = (a+b)^2c^2 - 4abc^2\sin\alpha^2$. em Falle der Figur ist b kleiner als a, und größer , daher ist C^2, welches $4a^2b^2$ ist, größer als $-B^2$. Deswegen ist der Coefficient von x^2 durch $C^2-A^2-B^2$) ausgedruckt, nicht durch $+(A^2-C^2)$.

108. Da die Gleichung für tang φ oder x auf ierten Grad steigt, so läßt die Aufgabe vier Auflö- n zu. Wenn alle vier möglich sind, so hat die Glei- zwey positive und zwey negative Wurzeln (Glei- , 88.), daher vier Puncte am Kreise der Aufgabe ß Statt finden. Die gegebene Auflösung ist auf fall eingerichtet, da die gleichen Winkel auf verschie- Seiten des Halbmessers CP liegen, und da der t P jenseits des Mittelpunctes sich befindet. Liegt ßseits des Mittelpunctes, wie der Punct p, so ist h der Winkel Apm größer als Bpm, wenn Cpm rlängerte Cp ist *). Es sey nun $DCm = \varphi$, so ist $n = \alpha+\varphi$, und $BCm = \alpha-\varphi$.

r ist $\text{tang}\,Apm = \dfrac{a\sin(\alpha+\varphi)}{a\cos(\alpha+\varphi)-c}$, und

* Es wird hier eben so wie vorher erwiesen, daß der Winkel pAC kleiner als pBC ist. Da die Winkel ACp, BCp die Unterschiede jener Winkel von den gleichen äußern bey p sind, so ist ACp oder ACm größer als BCm.

Digitized by Google

$\text{tang } Bpm = \frac{b \sin(\alpha - \varphi)}{b \cos(\alpha - \varphi) - c}$. Daraus wird auf gleiche Art wie vorher,

$$(ac - bc) \sin\alpha . \cos\varphi + (ac + bc) \cos\alpha . \sin\varphi = 2ab \sin\varphi . \cos\varphi,$$

oder

$$(B + Ax) \sqrt{(1 + xx)} = Cx.$$

Hieraus entsteht die rationale Gleichung

$$A^2 x^4 + 2ABx^3 - (C^2 - A^2 - B^2) x^2 + 2ABx + B^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind der Größe nach dieselben mit denen der ersten Gleichung, nur entgegengesetzt. Die eine der negativen Wurzeln jener gehört also für diesen zweyten Fall. In der Gleichung für denselben ist sie positiv, weil der W. DCm darin positiv genommen wird, der in Beziehung auf DCM negativ ist.

109. Die beiden gleichen Winkel an dem Halbmesser des Kreises können auch auf derselben Seite liegen, wie in Fig. 39. Hier ist $ACM = \varphi - \alpha$; $BCM = \varphi + \alpha$, und $\text{tang } APM = \frac{a \sin(\varphi - \alpha)}{a \cos(\varphi - \alpha) - c}$;

$\text{tang } BPC = \frac{b \sin(\varphi + \alpha)}{c - b \cos(\varphi + \alpha)}$. Wenn $\varphi + \alpha$ stumpf ist, ist der zweyte Theil des Nenners von tang BPC additiv. Daraus wird durch dieselbe Rechnung wie die zuerst geführte,

$$(ac + bc) \cos\alpha . \sin\varphi - (ac - bc) \sin\alpha . \cos\varphi = 2ab \sin\varphi . \cos\varphi,$$

oder

$$(Ax - B) \sqrt{(1 + xx)} = Cx.$$

Digitized by Google

Durch die Quadrirung der Theile dieser Gleichung
lt man völlig dieselbe biquadratische Gleichung wie für
ersten Fall. Die zweyte positive Wurzel derselben
also für diesen dritten Fall. Der Winkel DCM
φ hat in beiden Fällen dieselbe Lage.

110. Auf der andern Seite des Kreises (Fig. 39.)
n p der W. ApC = Bpm, und Cpm eine gerade.
t man DCm = φ, so ist ACp = α + φ; BCp
BCm = φ − α, und es ist

$$\frac{1}{2}\text{ApC} = \frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{c-a\cos(\alpha+\varphi)};$$

$$\frac{1}{2}\text{Bpm} = \frac{b\sin(\varphi-\alpha)}{b\cos(\varphi-\alpha)-c}.$$ Hieraus ergiebt
die Gleichung,

$$(ac-bc)\sin\alpha.\cos\varphi + (ac+bc)\cos\alpha.\sin\varphi = 2ab\sin\varphi.\cos\varphi,$$

lbe wie für den zweyten Fall. Die zweyte positive
rzel der biquadratischen Gleichung für diesen Fall ge-
also für den vierten, oder die beiden negativen Wur-
der für den ersten Fall gefundenen biquadratischen
chung geben den Punct p in Fig. 38. und 39.

111. Es ist auf jeden der vier Fälle die Rechnung
ittelbar eingerichtet worden, um zu zeigen, wie das
altat dasselbe ist, so daß, bey dem Gebrauche entge-
esetzter Werthe von tang φ, sie alle unter derselben
chung begriffen sind. Dieses ist ein gutes Beyspiel
er Bemerkung über die Anwendung des Entgegenge-
n in Th. II. S. 110. Die Formeln für die gleichen
genten werden aber auch aus den für den ersten Fall
ndenen durch die Anwendung des Entgegengesetzten
ittelbar hergeleitet. In dem zweyten ist der W.
m oder φ negativ; und die geraden Cm, Cp liegen
derselben Richtung, da sie in dem ersten Falle entge-

Digitized by Google

gengesetzte halten. Daher ist C p oder c negativ zu se
In dem dritten Falle bleibt φ positiv, aber c ist nega
der Winkel A P M ist negativ, und B P M stumpf, d
die Tangenten beider Winkel negativ sind, auch ist φ >
In dem vierten Falle sind φ und c negativ, der W. B
ist negativ, und A p m ist stumpf; daher sind die Tan
ten beider Winkel negativ; auch ist φ > α.

112. Die numerische Auflösung der biquadr
schen Gleichung wird nach einer der Methoden in dem
tikel, Gleichung, 96—111, bewerkstelligt. Sie k
mühsam seyn. Die irrationale Gleichung läßt sich leic
als die rationale auflösen, und zwar durch Annäheru
Es ist für den ersten Fall, A tang φ + C sin φ = B;
den dritten, A tang φ — C sin φ = B; für den zwe
und vierten, C sin φ — A tang φ = B. Man hat
vier Winkel zu suchen, die diesen Bedingungen Gen
leisten. Für die dritte sind zwey Winkel möglich, ein
ferer und ein kleinerer.

113. Die Aufgabe hat zuerst ein arabischer M
thematiker, Alhazen, vorgetragen. Seine Auflös
in dem optischen Werke desselben, welches Risner
der Optik des Vitellio im J. 1572 herausgegeben
ist sehr weitläuftig und verworren. Ob er sie selbst erf
den oder von andern genommen habe, kann man nicht
sen. Barrow findet die Aufgabe sehr schwer, und w
in seinen Lection. Opticis, IX. nichts bessers zu geb
als nur die Alhazenische etwas erleichterte Auflösu
Hungens zeigte, wie die gesuchten Puncte durch
Durchschnitte einer Hyperbel mit dem gegebenen Kr
gefunden werden, nach drey verschiedenen Construction
Er fügt auch eine algebraische Auflösung hinzu, die a
zu unbequem ist, wiewohl sie dasselbe Resultat, was
für den zweyten Fall durch sin φ und cos φ gefunden
liefert. — Kästner hat in den Novis Comment. S
Goetting. T. VII. a. a. 1776. eine ausführliche Abha
lung über diese Aufgabe geliefert, worin die verschiede
Fälle derselben besonders erörtert werden. Auch w

Digitized by Google

arin das angezeigte Verfahren, die irrationale Gleichung
att der rationalen biquadratischen aufzulösen, an Exem-
eln gezeigt. Die hier vorgetragene Auflösung ist kein Aus-
ug aus jener Abhandlung. Die Aufgabe gehört jetzt zu
en leichten, obgleich noch Montucla in der zweyten
usgabe seiner Geschichte der Mathematik sagt, daß sie
ne weitläuftige und tief geschöpfte Analysis erfordere.

114. Man bemerke noch, daß die Puncte P und
(Fig. 38.) diejenigen sind, worin zwey Ellipsen zu dem
Brennpuncte A und B, den gegebenen Kreis berühren.
Denn die in P sich berührenden beiden Curven haben da-
elbst eine gemeinschaftliche berührende gerade, mit wel-
her die von den beiden Brennpuncten A, B gezogenen
eraden gleich große Winkel machen (Ellipse, 43.), da-
er die Winkel mit der Normale PC sich gleich sind. Eben
o an dem Puncte p. In Fig. 39. sind P und p die
Puncte, in welchen zwey Ellipsen, deren Brennpuncte
A, B sind, den gegebenen Kreis senkrecht schneiden. Es
ind nämlich CM, Cm berührende an den Ellipsen.

Auf ähnliche Art sind in Fig. 38. P und p die Punc-
te, worin zwey Hyperbeln, deren Brennpuncte A, B sind,
en Kreis unter einem rechten Winkel schneiden, so wie
n Fig. 39. P und p die Puncte sind, an welchen zwey
Hyperbeln zu den Brennpuncten A, B den Kreis berüh-
ren. (Hyperbel, 76.).

115. Es sind noch viele Sätze und Aufgaben über
die in einem Kreise oder an denselben, oder an mehrere
Kreise gezogenen geraden Linien übrig: es wird aber an
den bisher vorgetragenen Sätzen genügen, welche die wich-
tigsten Eigenschaften des Kreises enthalten. Nur eine Auf-
gabe verdient wegen ihrer Schwierigkeit angeführt zu wer-
den. Sie ist, in einem Kreise ein Dreyeck zu zeichnen,
dessen Seiten jede durch einen gegebenen Punct gehen.
Zwey besondere Fälle dieser Aufgabe sind in dem Artikel,
Analysis als Methode, aufgelöset. Daselbst (5. Aufg.
Fig. 6. Tab. I.) gehen zwey Seiten des Dreyecks PMN
nach den gegebenen Puncten A, B, und die dritte MN

Digitized by Google

ist der AB parallel. Eben daselbst §6. Aufg. Fig. 7. gehe zwey Seiten des Dreyecks PMN nach den gegebenen Punkten A, B, und die dritte MN ist nach einem gegebenen Puncte C gerichtet, der aber auf der geraden AB liegt. Castillon hat von jener Aufgabe eine geometrische Auflösung in den Nouveaux Mém. de l'Académie de Berlin a. 1776. geliefert. Sie war ihm ehedem von Cramer aufgegeben, dem sie selbst von einem ungenannten Geometer vorgelegt worden war. Die Construction, so wie der ganze Weg dazu ist sehr verwickelt. La Grange wurde dadurch veranlaßt, eine algebraisch-trigonometrische Auflösung mitzutheilen. Eb. das. S. 284. ff. Sie ist noch schwer, allein das Resultat, die quadratische Gleichung für einen zur Auflösung gesuchten Winkel hat äußerst zusammengesetzte Coefficienten. Bald nachher haben Euler und Fuß ebenfalls Constructionen dieser Aufgabe mitgetheilt, in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. Parte I. pag. 95. et 99. Lexell stellte darüber, nach dem Muster der von la Grange gebrauchten Methode, eine lange analytische Rechnung an, und leitete daraus eine Construction her, woran Euler gezweifelt hatte, daß sie möglich wäre. Auch gab er einen analytischen Commentar zu der von Castillon gewiesenen Construction, in den Actis Acad. Petrop. T. IV. p. II. p. 70 — 90. Alle diese Auflösungen sind sehr schwierig. Ein junger Neapolitaner, Giordano di Ottajano fand in seinem 17ten Jahre eine so einfache Construction, daß sie in Anfangsgründen Platz finden könnte, und zwar auf einem sehr natürlichen und kurzem Wege. Ja er erweiterte so gar die Aufgabe dahin, daß er auf rein geometrische Weise zeigte, wie in einem gegebenen Kreise ein Vieleck von irgend einer Anzahl Seiten eingeschrieben werden kann, dessen Seiten verlängert durch eben so viele gegebene Puncte gehen. Sein Aufsatz steht in den Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana. T. IV. Verona 1788. p. 4 — 17. Malfatti, Professor der Mathematik zu Ferrara, welcher von diesen Auflösungen eines Jünglings gehört hatte, beeiferte sich, auch solche rein

Digitized by Google

geometrische Auflösungen zu finden, welches ihm auch gelang. Seine Auflösungen sind in demselben Bande jener Sammlung enthalten. S. 201—205. Beide Auflösungen zeigen, daß die Geometrie, wo es auf Lagen der Linien ankommt, durch ihre sehr einfachen Mittel viel mehr vermag, als die Analysis durch ihre weitgreifenden Methoden, weil diese die Winkel nur mittelbar durch die Sinus und Tangenten in Rechnung bringt. Sie dienen auch als Beyspiele, zu zeigen, wie sehr die reine Geometrie zur Übung des mathematischen Geistes beförderlich ist.

116. Ortajano gründet seine Methode auf diejenige, die schon von den Alten bey der Auflösung einer ähnlichen eingeschränktern Aufgabe gebraucht ist, derjenigen, die in dem Artikel, Analysis als Methode, 6. Aufg. (Th. I. S 96.) vorgetragen worden. Die Einfachheit der Auflösung macht sie werth, hier mitgetheilt zu werden. Sie giebt ein schönes Beispiel der geometrischen Analysis.

117. Es sind A, B, C (Fig. 40.) die gegebenen Puncte, DEFG ist der gegebene Kreis; es soll in demselben das Dreyeck DEF gezeichnet werden, dessen Seiten verlängert durch die gegebenen Puncte gehen. Es sey geschehen, was verlangt wird. Zuerst ziehe man EG parallel mit AB, dann die GF, welche verlängert die AB in H schneide. Dieser Punct ist für jede Lage der Puncte E, F derselbe. Denn es ist über W. BHF = FGE = FDE. Daher sind die Dreyecke FBH, ABD sich ähnlich, und es ist AB: BD = BF: BH, also AB × BH = DB × BF. Das Rechteck DB × BF ist unveränderlich (35.), und so groß als das Quadrat der berührenden, die von B an den Kreis gezogen ist (36.). Dadurch ist das Rechteck AB × BH gegeben, folglich auch BH und der Punct H.

Zweytens verbinde man den gefundenen Punct H mit dem gegebenen dritten Puncte C, ziehe EF paral-

Digitized by Google

lel mit HC, und die gerade IG, welche HC (die [illegible] längerte) in K schneide. Es ist der W. HCF = FK = FGK (22.) Daher sind die Dreyecke CHF u GHK sich ähnlich, und es ist HC:HF = HG:HK also FH × HG = CH × HK. Da FH × HG [illegible] gegebenes Rechteck ist, so ist CH × HK gegeben, [illegible] auch der Punct K.

Da EG und EI jene mit AB, diese HC [illegible] allel sind, so ist der W. IEG = CHB ein gegebener Man ziehe aus dem Mittelpuncte L des Kreises d Halbmesser LG, LI, so ist der W. ILG gegeb also auch LGI und der W. LGK. Beschreibe [illegible] über der gegebenen LK einen Kreisabschnitt, der d W. LGK faßt (32.), so wird der Punct G gegeb Durch die gerade HG wird der eine Punct F des g suchten Dreyecks, durch die gerade BFD der zwe Punct D, durch die gerade CFE der dritte Punct gegeben, in welchem auch die gerade AD den Kr schneidet. — Der Beweis der Construction aus d gemachten Annahmen muß zeigen, erstlich, daß EI pa allel mit HC ist, dann (wegen IEG = CHB), d EG parallel mit AB ist, ferner, daß der W. ADI = BHF, und daß auch der W. EDF = BHF, al AD und ED in eine gerade fallen.

Man bemerke noch, daß das Rechteck IK × K gegeben wird, und daß IG die Chorde eines gegeben Winkels am Umfange ist. Daher kann man auch d Länge von KI oder KG durch Construction suchen, w in der 2. Aufgabe des Artikels, Anwendung der Ge ometrie auf die Algebra, oder nach Euklids Elemen ten VI. 29.

Das über LK beschriebene Kreissegment schneid den gegebenen Kreis in zwey Puncten, so wie auch der mit dem Halbmesser KI oder KG beschriebene Kreis. Da EG mit AB und EI mit HK parallel seyn muß

Digitized by Google

so ergiebt sich daher, welcher Durchschnitt der brauchbare ist.

118. Um die Methode, deren sich Ottajano für irgend ein in den Kreis beschriebenes Vieleck bedient, begreiflich zu machen, wende ich sie auf das Dreyeck und Viereck an, welches der Erfinder nicht gethan hat. Für das Viereck gebraucht er ein anderes Verfahren, welches dem für das Dreyeck angewandten ähnlich ist.

119. Es ist MNO (Fig. 41.) der gegebene Kreis; A, B, C sind drey gegebene Puncte, durch welche die drey Seiten des Dreyecks MNO gehen. Man ziehe MT parallel mit AB, dann TO, welche AB in G schneide; ferner GC, und mit dieser die parallele TV; endlich VM, welche verlängert die gleichfalls verlängerte CG in H treffe. Es ist der W. BAN = NMT = NOT = BOG, also sind die Dreyecke ABN und OBG sich ähnlich. Gleichfalls sind die Dreyecke GCO und MCH sich ähnlich, da der W. HGO = GTV = OMV, also der W. CGO = CMH ist. Oder: der W. COG = MOT = MVT = MHC.

Da also AB × BG = NB × BO, so wie GC × CH = MC × CO ist, so sind die Puncte G und H gegeben. Auch ist der Winkel VTM = AGH, wegen der mit AG und GH parallelen TM und TV. Es sey L der Mittelpunct des Kreises, so ist der W. MLV = 2MTt, dem Nebenwinkel von MTV. Es ist nämlich MTt einem Winkel an dem Umfange gleich, der auf dem Bogen MTV steht. Daher ist der Winkel LMV oder LVM gegeben, und dadurch der Punct M, wie in der ersten Auflösung. — Den Punct M kann man auch dadurch finden, daß das Rechteck VH × HM, und die Linie VM gegeben werden.

120. Es sey nun in einem gegebenen Kreise ein Viereck zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene

Digitized by Google

Puncte gehen. Der Kreis sey MNOP (Fig.
die gegebenen Puncte A, B, C, D. Es sey MNO
das gesuchte Viereck, so wie die Figur es zeigt.
den Punct M ziehe man MT parallel mit AB,
durch T und den dritten Punct des Vierecks O die
welche verlängert AB in G schneide. Hierauf zie
man GC, ziehe damit parallel die TV, dann dur
und den vierten Punct P des Vierecks die VP,
die GC in H treffe. Noch verbinde man HD,
mit HD die parallele VU, und dann durch U
den auf P folgenden Punct des Vierecks M, da
den ersten, die UM, welche DH in K treffe.
nun, wie bey dem Dreyeck (119), AB×B
NB×BO; GC×CH=OC×CP; HD×D
PD×DM. Also sind die Puncte G, H, K geg
Die Chorde MU wird hier nicht gegeben, wie es
MV in der Aufgabe von dem einzuzeichnenden
eck der Fall war, weil der Bogen MT unbekannt b
Aber der Bogen TU, welcher den Winkel TV
GHK faßt, ist gegeben, und es ist also der W. T
bekannt, welcher dem Nebenwinkel von UVT gleic
Man verlängere die gerade KMU bis am AB,
so ist der W. KaA gegeben, und es ist also nur
thig an irgend einen Punct der AB einen Winke
legen, der dem W. KaA gleich ist. Eine parallele
dem andern Schenkel dieses Winkels durch K gieb
linie Ka. Dadurch wird der Punct M auf dem
fange des Kreises bestimmt, und durch dieses das
suchte Viereck.

Verlängert man KD bis an AB in b, so ist
Dreyeck GbH ähnlich dem Dreyeck KBA. Denn
der W. GHb der Nebenwinkel von GHK, der
TVU gleich ist. Daher ist Kb×bH=ab×bG.

121. Durch das für das Dreyeck und Viereck
zeigte Verfahren kann man die Aufgabe für irgend
Vieleck auflösen. Das Vieleck werde als gezeichnet

Digitized by Google

enommen. Nachdem auf der geraden zwischen zwey der egebenen Puncte ein solcher Theilungspunct, wie dort G nd H sind, bestimmt worden, verbindet man diesen mit em nächstfolgenden der gegebenen Puncte, zieht mit der erbindenden an dem Umfange des Kreises eine parallele urch den zweyten Endpunct der vorhergehenden Parallele, ann durch den Endpunct jener und den nächstfolgenden Winkelpunct des Vielecks eine gerade, welche jene verbinende in einem Puncte trifft. Von diesem nimmt man ufs neue dieselbe Construction vor, bis man auf den Anangspunct kommt. Die gerade durch diesen Anfangsunct und den zuletzt bestimmten Theilungspunct schneidet ey einer ungeraden Anzahl Seiten des Vielecks einen gebenen Bogen des Kreises ab, und macht daher mit dem albmesser einen gegebenen Winkel; bey einer geraden nzahl Seiten macht sie einen gegebenen Winkel mit der eraden durch die beiden unter den gegebenen Puncten, mit elchen der Anfang der Construction gemacht war. Vermittelst dieses gegebenen Winkels wird der Punct M des Vielecks, und daraus das Vieleck selbst bestimmt.

122. Eine nützliche Anwendung der Aufgabe in 32.) ist folgende. Es soll in einem Dreyeck ABC Fig 43.) der Punct P gefunden werden, an welchem ie Winkel der nach den Ecken des Dreyecks gezogenen geaden, APB, APC, BPC, eine gegebene Größe haben. Man lege an AB die gerade AD unter dem gegebenen Winkel DAB = APB, setze auf dieselbe die senkechte AE, welche von der auf AB in B senkrechten BE in E geschnitten werde. Über AE als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, so ist in diesem der Bogen APB er geometrische Ort für alle Winkel über AB, welche em gegebenen DAB gleich sind. Gleichfalls lege man n AC die gerade AF unter dem gegebenen Winkel FAC = APC, setze darauf in A die senkrechte AG, welche von er auf AC in C senkrechten CG in G geschnitten werde, eschreibe über AG als Durchmesser einen Kreis, so ist n diesem der Bogen APC der Ort für alle Winkel über

Digitized by Google

AC, welche dem FAC gleich sind. Der Durchschnitt beider Kreisbogen P ist der gesuchte Punct.

Wenn A, B, C drey Örter auf der Erdfläche sind, deren Entfernungen von einander bekannt geworden, so kann man die Lage des Punctes innerhalb oder auch ausserhalb des Dreyecks ABC vermittelst der Winkel, bestimmen, unter welchen die Seiten des Dreyecks erscheinen.

Kreisrechnung, s. Cyklometrie.

Kreise höherer Art sind die Curven, welche unter der Gleichung, $y^{m+n} = (a-x)^m x^n$, begriffen sind, worin m und n ungerade und größer als die Einheit sind. Nämlich, wenn $m = n = 1$ ist, so ist die Gleichung $y^2 = (a-x)x$ für einen Kreis, dessen Durchmesser $= a$ ist. Die Bedingung, daß m und n ungerade seyn, füge ich hinzu, damit die Abscissen und Ordinaten nicht ins Unendliche wachsen können, sondern daß eine Ähnlichkeit mit dem Kreise erhalten werde. S. Ellipsis.

Krumm ist eine Linie oder Fläche, deren Theile, so klein sie auch genommen werden, nicht einerley Lage neben einander haben, d. i. nicht auf einerley Art neben einander gedacht werden. Es ist das Entgegengesetzte von dem Geraden und Ebenen. Eine krumme Linie und Fläche muß man sich nicht jene aus kleinen geraden Linien, diese aus kleinen Ebenen zusammengesetzt vorstellen. Denn so klein diese Theile auch genommen würden, so haben doch ihre Theile einerley Lage gegen einander. Die stetige Veränderung der Lage der Theilchen ist das Unterscheidende des Krummen. D'Alembert findet Schwierigkeit bey der Definition der krummen Linie, in dem Artikel Courbe des Dictionnaire encyclopédique par ordre des matières. Am Ende sagt er, es möchte am besten seyn, weder die gerade noch die krumme Linie zu erklären, weil es schwer oder gar unmöglich sey, diese Benennungen auf eine noch einfachere Idee zurückzuführen, als sie schon

Digitized by Google

urch sich selbst erwecken. Als gewöhnliche Erklärungen der krummen Linie führt er an, daß sie eine Linie sey, deren Puncte in verschiedenen Richtungen sind, oder eine verschiedentliche Lage, die einen in Beziehung auf die andern haben. Bey jener Erklärung mischt sich der Begriff von Richtung und Bewegung ein; bey dieser ist zu erinnern, daß zwischen zwey Puncten kein Unterschied der Lage weiter als in Betracht ihrer Entfernungen von einander Statt findet.

Die Untersuchung der krummen Linien und krummen Flächen macht den Gegenstand der höhern-Geometrie aus. Die krummen Linien werden entweder für sich schlechtweg, oder als begränzende in einer Fläche betrachtet. So werden auch krumme Flächen entweder für sich allein oder als Begränzungen gedacht. Wenn sie für sich allein genommen werden, so wird die Natur durch eine Gleichung zwischen ihren Coordinaten dargestellt; daraus werden ihre Eigenschaften entwickelt; die Krümmung in irgend einer Stelle wird daraus hergeleitet; die Rectification oder Complanation wird gesucht, wenn dazu Veranlassung ist. Wird eine krumme Linie als begränzende in einer Fläche gedacht, so sucht man die Eigenschaften einer solchen Figur auf. Sie kann einen oder mehrere merkwürdige Puncte enthalten; gerade Linien, die in derselben gezogen werden, können auszeichnende Verhältnisse haben; der Inhalt der Figur mag auf eine nette Art dargestellt werden können. Auf ähnliche Art verhält es sich mit Körpern, die von krummen Flächen begränzt werden.

Krumme Fläche, s. nach den Artikeln von krummen Linien.

Krumme Linie ist das der Länge nach allein ausgedehnte, wovon die Theile ihre Lage gegen einander stetiger Weise ändern. S. den vorhergehenden Artikel.

1. Eine krumme Linie liegt entweder ganz in einer und derselben Ebene, oder kein Theil derselben, so klein

Digitized by Google

er auch genommen wird, liegt ganz in derselben Ebe
Jene heißen krumme Linien von einfacher Krü
mung, diese von gedoppelter Krümmung.

§ 2. Die reine Geometrie betrachtet keine and
krumme Linien als solche, deren Natur durch eine G
chung zwischen ihren Coordinaten, unmittelbar oder m
telbar, dargestellt werden kann. Bey der Anwendung
wirkliche Gegenstände ereignet es sich leicht, daß eine Lin
ein so verwickeltes Gesetz ihrer Bildung hat, daß es sogu
ist, als wenn sie gar keines hätte, oder sie mag auch wir
lich kein Gesetz haben, wie eine Curve, die man aus fre
Hand auf Papier zeichnete. In diesem Falle kann m
sie nur theilweise durch eine aus einigen Coordinaten zu
gene empirische Gleichung darstellen.

3. Bey krummen Linien in derselben Ebene wi
die Gleichung auf zweyerley Art eingerichtet. Erstlich,
man zieht in der Ebene derselben zwey gerade Linien unt
einem beliebigen Winkel, gewöhnlich unter einem rechten;
sie heißen die Axen der Coordinaten, von welch
die Abscissen auf der einen dieser Linien von ihrem Dur
schnittspuncte (dem Anfange der Abscissen) an genomm
die Ordinaten der andern jener beiden Linien parallel ge
gen werden, s. Coordinaten. Zweytens zieht man
in der Ebene der krummen Linie eine beliebige gerade, u
aus einem Puncte derselben gerade Linien an die krumm
Der Winkel einer solchen veränderlichen Linie mit der ge
gebenen und jene Linie sind hier die Coordinaten; der Wi
kel oder ein Kreisbogen mit der Einheit als Halbmesser be
schrieben, ist hier, was nach dem erstern Verfahren die
Abscisse ist. Statt der Winkel selbst werden oft ihre tri
gonometrischen Functionen genommen. Die Gleichung
zwischen den Coordinaten (es mögen beide gerade Linie
oder eine derselben ein Winkel seyn) ist die Gleichung
die Curve, eine Definition derselben, woraus alle
Eigenschaften hergeleitet werden.

4. Da die Axen der geraden Coordinaten, wie
der zweyten Weise der Winkelpunct und die Anfangsli

Digitized by Google

willkürlich genommen werden können, so läßt sich für dieselbe krumme Linie die Gleichung auf unendlich viele Arten abändern. Man kann sie dadurch einfacher machen, um gewisse besondere Eigenschaften in Absicht gewisser an sie gezogenen Linien zu finden, aber auch weitläufiger, um allgemeinere Relationen daran zu entdecken. Doch geht eine Gleichung durch die Verwandlungen der Coordinaten über ihren Grad hinaus. S. Coordinaten.

5. Die krummen Linien werden eingetheilt in algebraische und transscendente. Die Benennungen hat Leibnitz zuerst gebraucht (Acta Erud. 1684, pag. 234.). Die algebraischen Linien sind solche, für welche die Gleichung eine algebraische ist, worin die Relation der Coordinaten vollständig dargestellt wird, allgemein durch ein Aggregat von Potenzen derselben, von Producten dieser Potenzen, jene wie diese mit gegebenen Coefficienten begleitet, wozu noch eine absolute (unveränderliche) Größe als Glied der Gleichung kommen kann. Dergleichen Curven sind die Kegelschnitte, die cubische Parabel, die Cissoide, die Curve, welche Folium genannt wird, die Conchoide, die Cardioide, u. v. m.

6. Die transscendenten Curven sind solche, für welche die Gleichungen transscendent sind, weil sie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern (terminis) bestehen, daher die Relation der Coordinaten nicht vollständig dargestellt werden kann, oder nur in so fern als vollständig betrachtet wird, als man das Gesetz der ins Unendliche fortgehenden Glieder erkennt. Auf dergleichen Curven kommt man, wenn die Differentialgleichung sich nicht algebraisch integriren läßt, sondern auf ein vom Kreise, von den Logarithmen, oder von beiden zugleich abhangendes Integral führt, oder wenn das Integral nur schlechthin durch eine Reihe gefunden werden kann. Auch ohne von Differentialgleichungen auszugehen, kann man auf transscendente Curven kommen, nämlich, wenn man die Werthe der Coordinaten vom Kreisbogen oder von Lo-

Digitized by Google

garithmen abhangen läßt. Ein Beyspiel giebt die Cy
kloide. Für diese ist, (Cykloide, Th. I. S. 60
$x = a(\varphi - \sin\varphi)$, und $y = a(1 - \cos\varphi)$, wo
und y die Coordinaten, und φ ein ihnen zugehöriger,
änderlicher Winkel ist. Hier kann φ durch $\sin\varphi$
$\cos\varphi$ nicht anders als in Gestalt einer unendlichen
ausgedruckt werden, so wie $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auch
anders als in dieser Gestalt durch φ. Die Differen
gleichung zwischen ∂x und ∂y ist vollständig. Denn
ergiebt sich aus den Werthen von x und y der Diffe
tialquotient $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a \sin\varphi}{a - a\cos\varphi}$, worin der Winkel
selbst nicht vorhanden ist. Da $a - a\cos\varphi = y$ ist,
$a\sin\varphi = \sqrt{(2ay - y^2)}$, und es ist $\partial x = \frac{y\partial y}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$
Ein ähnliches Beyspiel giebt die Kettenlinie.

Die archimedeische Spirale, deren Gleichung ist
$y = \frac{a\varphi}{2\pi}$; die Quadratrix, für welche ist $y = (a - x)$
$\tan g \frac{\pi x}{2a}$; die logarithmische Spirale, deren Gleichung
$\varphi = m \log. \frac{y}{a}$, sind transscendente Curven. Die Cy
cykloiden gehören auch zu dieser Abtheilung. Denn
die Halbmesser oder die Umfänge des ruhenden und
sich wälzenden Kreises ein irrationales Verhältniß hab
so tritt der beschreibende Punct nie wieder in dasselbe Gle
und der Radius Vector hat für jedes ω (den Winkel
der Anfangslinie) unendlich viele Werthe. Damit stimm
daß die Differentialformel (Epicykloide, 7.) nicht in
grirbar ist. Wäre sie integrirbar, so gehörten zu ein
bestimmten Winkel ω eine bestimmte Anzahl von Werth
des Radius Vector z, und umgekehrt. In dem Fal
daß das gedachte Verhältniß rational ist, fängt der

Digitized by Google

schreibende Punct zwar nach einer gewissen Anzahl von Umläufen des sich wälzenden Kreises denselben Weg wieder an, und für jedes ω gehört nur eine gewisse Anzahl Werthe von z; allein dieser Umstand macht die Differentialformel nicht integrirbar, da die Verhältnisse der unveränderlichen Größen gegen einander auf die Integrirbarkeit keinen Einfluß haben. Jede algebraische Linie wird von einer geraden höchstens nur in einer gewissen Anzahl Puncte geschnitten, aber man darf dieses nicht umkehren. Die Wurfslinie in einem widerstehenden Mittel, wie die Luft, wird von einer geraden Linie in nicht mehrern Puncten geschnitten als eine Parabel, und ist doch keine algebraische. So verhält es sich auch mit manchen evolvirenden Linien, deren Evoluten nicht rectificabel sind, s. Evolution, 5.

7. Descartes wollte nur die algebraischen Curven als geometrische gelten lassen, und nannte die andern mechanische, weil diejenigen, die zu seiner Zeit bekannt waren, als die archimedeische Spirale und die Quadratrix, durch abgesonderte Bewegungen beschrieben werden, die kein genau meßbares Verhältniß gegen einander haben. Die Linien, welche zu Constructionen gebraucht werden dürfen, müssen, ihm zufolge, durch solche Bewegungen beschrieben werden können, daß nicht bloß einzelne Puncte, sondern irgend welche sich geometrisch finden lassen. (Geometria, L. II.). Newton hingegen und Leibnitz machten in dieser Rücksicht keinen Unterschied zwischen den Curven, sondern sahen bloß auf die Leichtigkeit der Construction. (Newtoni Arithm. univ. p. 212. Leibnitius in A. Erud. 1684. p. 234.). Da gegenwärtig Kreisbogen und Logarithmen als völlig bestimmbar durch ihre zugehörigen Größen anzusehen sind, so mögen alle krummen Linien, die von ihnen abhangen, den algebraischen gleich zu schätzen seyn.

8. Es sind zweyerley Fragen, welche Curven zur Auflösung geometrischer Aufgaben angewandt werden dürfen, und welche als geometrische anzuerkennen sind. In

Digitized by Google

Betreff jener möchte Descartes, wenigstens für den Zustand der Wissenschaft zu seiner Zeit, der Strenge nach Recht haben; wenn aber von der Würdigung der Curven die Frage ist, so sind alle für echt geometrische zu erklären, deren Puncte nach einem gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt werden, es sey, daß dieses Gesetz für die endlichen Coordinaten selbst, oder nur für ihre Differentialverhältnisse gegeben werde, da die letztern immer charakteristisch für die Curven sind. Mit der Erweiterung der Kenntnisse erweitert sich auch der Umfang der Begriffe. Die alten griechischen Geometer scheinen selbst die Kegelschnitte nicht für geometrische anerkannt zu haben, da Pappus (L. III. ad prop. 5.) anführt, daß sie die Aufgabe von der Erfindung zweyer geometrisch mittlern Linien nicht auf geometrische Weise hätten construiren können, weil die Zeichnung der Kegelschnitte in einer Ebene nicht leicht sey. Als die Rechnung des Unendlichen auf die Geometrie angewandt ward, nannte man mechanische Curven diejenigen, für welche eine Gleichung nur zwischen den Differentialen der Coordinaten gefunden werden kann. (Histoire de l'Acad. des Sc. 1704 p. 142.). Diese Benennung möchte gegenwärtig nur von solchen transscendenten Linien zu gebrauchen seyn, die ursprünglich durch Bewegungen beschrieben werden, als durch Wälzung einer Curve auf einer geraden oder krummen Linie, oder durch Abwickelung.

9. Eine Exponentialcurve ist eine solche, deren Gleichung eine exponentielle ist (s. dieses Wort, Th. II. S. 176.). Leibnitz hat diese Curven in die Geometrie eingeführt. A. Erud. 1684. p. 234. Johann Bernoulli, der zu gleicher Zeit mit Leibnitz auf diese Form von Größen gerieth, hat die Exponentialcurven mehrmahls angewandt. Man sehe die Sammlung seiner Werke. Von den Curvis interscendentibus, die Leibnitz unterschieden hat, s. den Artikel, Interscenden.

10. Die algebraischen krummen Linien werden nach dem Grade der für sie gehörigen Gleichungen ein-

Digitized by Google

getheilt. Der Grad einer Gleichung zwischen x und y wird durch die höchste Anzahl der Factoren x und y ihrer Glieder, es sey in den Potenzen derselben oder in ihren Producten bestimmt. Eine Gleichung vom ersten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen, $ay + bx + c = o$, gehört für die gerade Linie, s. diese. Die Gleichungen vom zweyten Grade bestimmen die nach der geraden einfachsten Linien, welche die zweyte Ordnung der Linien überhaupt, oder die erste Classe der krummen ausmachen. Der allgemeine Ausdruck für diese Gleichungen ist

$$\begin{aligned} &ayy + bxy + cx^2 \\ &+ dy + ex + f \end{aligned} = o.$$

Die Coefficienten können negativ, zum Theil auch Null seyn. Nur muß der erste oder höchste Theil, der zwey Dimensionen in Absicht auf x und y enthält, nicht ganz fehlen. Diese Classe begreift die Kegelschnitte.

11. Nach diesen folgen die krummen Linien der zweyten Classe, oder Linien der dritten Ordnung, für welche die allgemeine Gleichung ist,

$$\begin{aligned} &ay^3 + bxy^2 + ex^2y + dx^3 \\ &+ ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k \end{aligned} = o,$$

worin der erste Theil von drey Dimensionen in Absicht auf x und y nicht ganz fehlen darf. Diese Classe ist an Arten sehr zahlreich.

12. Noch weit mehr ist es die dritte Classe, für welche die Dimensionen der Glieder in Absicht auf x und y bis auf die Anzahl vier steigen, so daß das höchste Glied im Allgemeinen ist,

$$ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4,$$

wozu eben solche Glieder kommen, wie in der Gleichung vom dritten Grade enthalten sind.

Digitized by Google

13. Hieraus ersieht man, wie die Gleichungen für die krummen Linien der folgenden Classen beschaffen sind. Der höchste Theil in jeder steigt auf so viele Dimensionen nach x und y als die um Eins vermehrte Ordnungszahl der Classe Einheiten enthält. Die Anzahl der Glieder in der allgemeinen vollständigen Gleichung vom nten Grade ist $= \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$. Sie ist nämlich für eine Gleichung vom ersten Grade $= 1 + 2$; für eine vom zweyten $= 1 + 2 + 3$; für eine vom dritten $= 1 + 2 + 3 + 4$; für eine vom vierten $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$; für eine vom nten Grade $= 1 + 2 + 3 \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$.

14. Was man unter Familie krummer Linien versteht, ist in Th. II. S. 206. schon angeführt. Die Form der Gleichung ist für die Linien von derselben Familie dieselbe, aber der Grad ist verschieden. Die Benennung, genus, ist schicklicher für die Hauptabtheilungen einer Classe von Curven zu gebrauchen.

15. Der Ordinatenwinkel ist willkürlich. Wiewohl der Grad der Gleichung bey jedem Winkel der Coordinaten derselbe bleibt, und selbst die Gattung, wozu die Curve gehört, nicht von diesem Winkel abhängt, so kann es doch auf die Bestimmung der Art einen Einfluß haben, ob der Ordinatenwinkel ein rechter oder ein schiefer ist. Die Gleichung, $yy = aa - xx$, giebt einen Kreis, wenn der Winkel der Coordinaten ein rechter ist, und eine Ellipse bey einem schiefen. Doch gilt die Gleichung $yy = xx - aa$ für eine gleichseitige Hyperbel, der Ordinatenwinkel mag schief oder ein rechter seyn. (Hyperbel, 30.)

16. Wenn eine Gleichung sich in rationale Factoren auflösen läßt, so gilt sie nicht für eine einzige Linie,

Digitized by Google

sondern für zwey oder mehrere, mittelst einer gemeinschaftlichen Abscissenlinie mit demselben Anfangspuncte verbundene Linien. Die zu jeder Abscisse gehörigen Ordinaten endigen sich theils an der einen, theils an der andern Linie. Z. B. die Gleichung, $y - x + a = 0$, gehört für eine gerade Linie, die Gleichung, $yy + xx - 2ax = 0$, für einen Kreis, dessen Halbmesser a ist. Der Anfang der Abscissen auf einem Durchmesser ist in dem einen Endpuncte desselben, und der Ordinatenwinkel ein rechter. Da an der geraden Linie $y = 0$ ist, wenn $x = a$ genommen wird, so geht sie durch den Mittelpunct des Kreises; und da $y = x - a$ ist, so schneidet sie die Abscissenlinie unter einem halben rechten Winkel. Die Gleichung vom dritten Grade, welche durch die Multiplication beider Gleichungen entsteht, stellt beide Linien, die gerade und den Kreis zugleich dar. Für jedes x, das nicht größer als der Durchmesser ist, sind zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten an dem Kreise, und eine an der geraden Linie. Die letztere ist negativ für solche x, die kleiner als a, positiv für solche x, die größer als a sind. Zu negativen x und zu solchen x, die größer als der Durchmesser sind, gehört nur eine mögliche Ordinate an die gerade Linie. Nämlich jede cubische Gleichung, dergleichen hier für y durch jeden beliebigen Werth von x gegeben wird, hat entweder drey mögliche Wurzeln oder nur eine einzige. (Gleichung, 64.)

17. Eine Gleichung vom dritten Grade, die in drey einfache rationale zerlegbar ist, gehört für ein System von drey geraden Linien. — Eine Gleichung vom vierten Grade, die sich in rationale Factoren zerlegen läßt, zeigt an entweder ein System von einer krummen Linie des dritten Grades und einer geraden, oder von zwey Linien der zweyten Ordnung (der ersten Classe), oder von einer der zweyten Ordnung und zwey geraden, oder endlich von vier geraden, nach Beschaffenheit der Factoren. — Auf ähnliche Art verhält es sich bey Gleichungen von höhern Graden.

Digitized by Google

18. Die unbestimmte Gleichung zwischen den Coordinaten x und y wird für jeden bestimmten Werth von x eine bestimmte für y. Da jede bestimmte Gleichung so viele mögliche Wurzeln haben kann, als der Exponent der höchsten Potenz der unbekannten Größe Einheiten enthält (Gleichung, 151.), so kann die Ordinate die Curve in so vielen Puncten schneiden, als der Exponent der höchsten Potenz von y anzeigt, aber auch in wenigern oder gar nicht. Die Mehrheit der Ordinaten entsteht aus der Natur der Frage, durch welche man auf die krumme Linie geführt wird, oder aus der für sie unmittelbar angenommenen Gleichung. Verschiedene Größen können aus gewissen gegebenen Größen auf einerley Art bestimmt werden, wie dies in den Aufgaben (Gleichung, 33, 54, 83, 144.) der Fall ist. Dabey begreift die Algebra die Fälle, worin die Werthe der unbekannten Größe negativ sind, mit denen, worin sie positiv genommen werden, in einer und derselben Formel (Gleichung, 13.). Daher gehört der Endpunct jeder Ordinate, welche die Gleichung für eine Abscisse liefert, der negativen wie der positiven, zu der Curve. Nur werden die entgegengesetzten Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen auf der mit der Axe der Ordinaten parallelen genommen. Verwandelt man in der Gleichung die Vorzeichen der ungeraden Potenzen von y in die entgegengesetzten, so sind die positiven Wurzeln der zweyten Gleichung so groß als die negativen der erstern (Gleichung, 13.), und diese positiven Wurzeln sind die Werthe der Ordinaten auf der andern Seite der Abscissenlinie, der entgegengesetzten von derjenigen, auf welcher die positiven Ordinaten genommen wurden. So wie beiderley Gleichungen nur eine einzige ausmachen, so gehören auch die dadurch bestimmten Ordinaten alle zu derselben Curve. Betrachtet man die auf der einen Seite der Abscissenlinie als positiv, so sind sie auf der andern negativ. Die folgenden Bemerkungen werden noch insbesondere zeigen, daß die arithmetische Entgegensetzung mit der geometrischen zusammenstimmt.

Digitized by Google

19. Jede krumme Linie ist eine stetige Länge. Indem die Abscisse x sich stetig verändert, entsteht eine stetige Folge von Ordinaten, es sey eine für noch so große x ununterbrochen fortgehende, oder eine irgendwo aufhörende. In dem letztern Falle erfordert das Gesetz der Stetigkeit, daß hier eine andere Folge sich durch eine gemeinschaftliche Ordinate anschließe. Davon weiter unten.

20. Die positiven Ordinaten werden nach einer oder der andern Richtung auf die mit der Axe der Ordinaten parallele getragen. Wenn sie in der stetigen Folge durch o vom Positiven zum Negativen übergehen, so zeigt dieses eine stetige Verminderung an, wobey nothwendig eine Entgegensetzung der Lage entsteht. Bleibt eine Folge von Ordinaten durchgehends negativ, so müssen diese zur Übereinstimmung mit jenem Falle auf diejenige Seite getragen werden, welche der für die positiven Ordinaten gewählten Seite entgegengesetzt ist.

21. Die Bezeichnung der geometrisch entgegengesetzten Ordinaten durch die arithmetisch entgegengesetzten wird noch durch folgende Bemerkung erläutert und bestätigt. Man ziehe auf der Seite der Abscissenlinie, welche der für die positiven Ordinaten entgegengesetzt ist, eine parallele in dem Abstande f, und nehme diese zur Abscissenlinie. Die auf diese sich beziehenden Ordinaten, bey derselben Axe der Ordinaten, nenne man z, so ist $z = f + y$. Die Ordinaten auf der Seite der positiven sind alle größer geworden, wie es auch der Ausdruck, $f + y$, ergiebt. Die Ordinaten aber, die nach der entgegengesetzten Seite liegen, sind kleiner geworden. Dieses stimmt ebenfalls mit dem Ausdruck, $f + y$, wenn hier y negativ ist, überein. Ist nämlich y, absolut genommen, kleiner als f, so bleibt z positiv, und diese neue Ordinate liegt auch, zufolge der Zeichnung, nach der Richtung der positiven. Ist aber y größer als f, so ist z negativ, und z liegt nach der entgegengesetzten Richtung.

Digitized by Google

22. Auf gleiche Weise schneidet die Abscissenlinie die Curve höchstens in so vielen Puncten, als die höchste Potenz der Abscisse x Einheiten enthält. Denn man kann sie als eine Ordinate betrachten, wenn die Axe der Ordinaten zur Abcissenlinie genommen wird.

In den Puncten der Curve, worin die Abscissenlinie sie schneidet (oder berührt), ist die Ordinate Null, und die Gleichung für die Curve wird hier eine bestimmte für x, die so viele mögliche Wurzeln haben kann, als der Exponent der höchsten Potenz von x anzeigt. Die ungleichnamigen Wurzeln werden nach entgegengesetzten Seiten von dem Anfangspuncte der Abscissen genommen.

23. Es ist schon vorläufig bemerkt, daß da, wo eine Folge von Ordinaten abbricht, eine andere sich daran schließen müsse. Man nehme z. B. eine Ellipse, ziehe die Coordinaten mit den beiden Axen parallel, so erhält man zwey Folgen von Ordinaten, die sich an den Scheitelpuncten begegnen. Sind die Ordinaten nicht senkrecht auf die Abscissenlinie, so kommen die beiden Folgen in den berührenden Ordinaten zusammen. An der Hyperbel finden vier Folgen von Ordinaten Statt, wovon sich zwey und zwey an einander schließen.

24. Die krummen Linien der zweyten Classe enthalten häufig drey Folgen von Ordinaten. In Fig. 44. ist eine dieser Classe abgebildet. Die Abscissenlinie ist AX auf der Seite der positiven, AX′ auf der Seite der negativen. Die Axe der Ordinaten ist AY für die positiven, AY′ für die negativen. Die Ordinate BC in B berührt die Curve in C. Diese erstreckt sich von C durch M nach X ins Unendliche längs der Asymptote AX. Eine zweyte berührende Ordinate ist DE in E, von wo die Curve durch N nach X′ längs der Asymptote AX′ ins Unendliche fortgeht. Zwischen den Puncten C, E, ist noch ein Theil CFE der Curve enthalten, der jene beiden Theile mit einander verbindet. Zu diesem gehört eine Folge von Ordinaten, zwischen den äußersten BC, DE,

Digitized by Google

deren jene mit zu der Folge von B nach X, diese zu der Folge von D nach X′ gehört.

25. Die Conchoide, Th. I. S. 530., welche daselbst Tab. V. Fig. 79. abgebildet ist, hat vier Folgen von Ordinaten. Die erste oberhalb der Abscissenlinie XX, die auf beiden Seiten sich ins Unendliche erstreckt, oder vom Unendlichen her mit Null anfängt, und ins Unendliche sich wieder verliert; die zweyte geht von GL an rechter Hand ohne Ende fort; die dritte von HK eben so linker Hand; die vierte von GL bis HK an dem Bogen HDG.

26. Ein Zweig einer Curve ist ein solcher Theil, zu welchem eine vollständige Reihe stetiger Ordinaten gehört, wie in Fig. 44. die Theile CMX infin.; CNX′ infin. und CFE. Die Ordinaten mögen auch aus einem gemeinschaftlichen Puncte gezogen werden. Läßt man den Bogen durch einen Punct beschreiben, der auf der Ordinate fortgeht, indem diese sich nach einer gegebenen Richtung parallel, oder um einen fixen Punct bewegt, so gehört der ganze Theil an einer Curve, welcher von jenem Puncte beschrieben werden kann, während daß die Ordinate nach derselben Gegend sich bewegt, zu einem und demselben Zweige.

27. Eine Linie der mten Ordnung und eine Linie der nten können sich höchstens in mn Puncten schneiden, z. B. zwey Kegelschnitte, als Linien der zweyten Ordnung, höchstens in vier Puncten, aber auch in wenigern, oder gar nicht. Ein Kegelschnitt und eine Linie der dritten Ordnung (d. i. eine der zweyten Classe der krummen Linien) können sich in sechs Puncten schneiden. Man gebe beiden Curven gemeinschaftliche Axen der Coordinaten, so sind in den Durchschnittspuncten beider die Ordinaten y dieselben. Man schaffe nun aus den Gleichungen für die beiden Curven die veränderliche y heraus, so wird eine bestimmte Gleichung für x erhalten, deren Wurzeln diejenigen Werthe der Abscissen sind, welche zu den Durchschnittspuncten gehören. In dem Artikel, Elimination,

Digitized by Google

Th. II. S. 69. ist ein Beyspiel der dazu erforderlichen Rechnung gegeben. Die Gleichungen

I. $P + Qy + Ry^4 = o$,

II. $p + qy + ry^2 + sy^3 = o$,

seyn jene vom zweyten, diese vom dritten Grade; P, Q, p, q, r, s, seyn Functionen von x; R und s aber bloße gegebene Größen. Die Functionen Q und r können nur vom ersten Grade, P und q vom zweyten, p vom dritten seyn, wegen des angenommenen Grades der Gleichungen. Die durch die Elimination erhaltene Gleichung für x kann bis auf den sechsten Grad, aber nicht höher steigen. Wäre die Gleichung I. vom dritten Grade, nämlich wenn R eine Function von x des ersten Grades, Q des zweyten, und P des dritten, oder auch nur eine dieser Beschaffenheiten da ist, so kann die Gleichung für x auf den neunten Grad steigen. Die Nachweisungen über diese Anwendung der Algebra auf die höhere Geometrie sind in dem gedachten Artikel zu finden. Dazu setze man noch Euleri Introd. in Anal. infin. T. II. cap. 19.

28. Die krummen Linien der ersten Classe werden vielfältig benutzt, sowohl zu geometrischen Beweisen und Auflösungen, als auch zu Anwendungen auf physische und technische Untersuchungen. Von den Linien höherer Ordnungen wird wenig Gebrauch gemacht. Dennoch sind sie ein wichtiges Hauptstück der Geometrie, woraus die Alten nur ein paar Linien kannten. Die Mannigfaltigkeit der Formen ist schon in der zweyten Classe sehr groß, und dennoch lassen sie sich unter einer Formel begreifen. Man möchte sie mit den Werken der Natur vergleichen, worin auch eine sehr große Verschiedenheit der Bildungen auf einfache und gemeinschaftliche Anlagen gegründet ist. Wenn Schönheit in der Vereinigung des Mannigfaltigen zur Einheit besteht, so kann man besonders den algebraischen Curven eine intellectuelle Schönheit beylegen, die dem Geometer oft ein eigenthümliches Vergnügen verschafft. Die Algebra ist zur Entdeckung ihrer Eigenschaf-

Digitized by Google

n ein Hülfsmittel, welches die Alten entbehrten. Dagegen gewährt die Geometrie wiederum durch die Formen ihrer Linien dem Verstande eine faßliche Ansicht der Verhältnisse der veränderlichen Größen und der Beschaffenheit ihrer stetigen Folgen. Die symbolische Darstellung giebt nur einzelne Glieder; die geometrische liefert der Einbildungskraft durch einzelne Puncte den ganzen Zug, selbst ins Unendliche fortlaufend. Die Mannichfaltigkeit der Fälle in einer Gleichung ist nicht leicht zu übersehen, besonders wo drey, vier und mehr Reihen möglicher Werthe der einen veränderlichen Größe neben einander bestehen. Die Zeichnung macht es viel leichter als die analytischen Reihenausdrücke.

29. Alle algebraischen Curven haben gewisse Eigenschaften gemein, die aus den Relationen der Coefficienten einer algebraischen Gleichung zu den Wurzeln derselben folgen. Es sey die Gleichung für zwey veränderliche Größen, (A),

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \ldots + Ty + V = 0,$$

wo P, Q, ... T, V Functionen von x allein sind. Die Function + P ist das Aggregat der den Wurzeln dieser Gleichung, nämlich den Werthen von y, für irgend ein gegebenes x, entgegengesetzten Größen (Gleichung, 151.), mit Einschluß der unmöglichen. Ist m dem Grade der Linie gleich, das ist der höchsten Summe der Dimensionen nach x und y, so ist P eine Function des ersten Grades von x, nämlich $\alpha x + \beta$, wiewohl auch hier $\alpha = 0$ seyn kann. Ist der Grad der Gleichung $= n$, so kann die Function P bis zum Grade $n - m + 1$ steigen.

30. Man setze $y = u - \frac{1}{m}P$, so entsteht durch die Substitution dieses Werthes eine Gleichung von der Form, (B),

$$u^m + Q'u^{m-2} + \ldots + T'u + V' = 0,$$

wo die durch ein Strichelchen unterschiedenen Coefficienten neue Functionen von x sind. In dieser Gleichung ist die

M

Digitized by Google

Summe der positiven Werthe von u gleich der Summe der negativen. Man setze, daß $P = \alpha x + \beta$ ist, so ist $y = u - \frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$. Für die Curve mit der Gleichung (Å) seyn in (Fig. 45.) die geraden AX, AY die Axen der Coordinaten: Q, R, S, T, etc. Puncte derselben auf der Ordinatenlinie RPT zu der Abscisse AP. Man nehme auf der Axe der Abscissen $AB = \frac{\beta}{\alpha}$, und auf der Axe der Ordinaten $AC = -\frac{1}{m}\beta$, und ziehe BCU, welche die Ordinatenlinie RT in M schneide. Es sey $AP = x$, so ist, da AB : AC = PB : PM ist, $PM = -\frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$. Nun ist $\alpha x + \beta$ oder P gleich dem Aggregate der entgegengesetzten aller Ordinaten y; also ist das mfache von PM das Aggregat der Ordinaten selbst, oder PM ist das arithmetische Mittel derselben. Ist P positiv, so ist das Aggregat der Ordinaten negativ, und PM fällt in die Richtung der negativen Ordinaten; ist P negativ, so ist das Aggregat der Ordinaten positiv, und PM hat die in der Figur gesetzte Lage. Ist β negativ, so erhält AC die Richtung der negativen Ordinaten, und (wofern α positiv ist) AB die Richtung der positiven Abscissen.

Nimmt man BU zur Abscissenlinie, so ist die Summe der Ordinaten auf der einen Seite in Beziehung auf dieselbe so groß als auf der andern. Denn die positiven Ordinaten, wie MQ, MR, sind die positiven Werthe von u; die negativen Ordinaten, wie MS, MT, sind die negativen Werthe von u. Die Summe jener ist aber so groß als die Summe dieser. Eben dieses folgt auch aus der Natur eines arithmetischen Mittels ungleichnamiger Größen.

31. Jede Curve, in deren Gleichung der Coeffici-

Digitized by Google

ent des zweyten Gliedes die Function $\alpha x + \beta$ ist, hat für parallele in ihr gezogene Linien einen Durchmesser, in dem allgemeinen Sinne, daß auf jeder derselben die Summe der entgegengesetzten Ordinaten zu diesem Durchmesser gleich groß ist. Die Lage des Durchmessers wird durch die Gleichung, $z = -\frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$, bestimmt. Die Ordinaten z sind jenen Ordinaten parallel. Ist $\alpha = 0$, also $P = \beta$, so ist der Durchmesser der anfangs genommenen Abscissenlinie parallel.

Da eine gerade Linie durch zwey Puncte bestimmt wird, so wird der Durchmesser auch gefunden, wenn zwey Ordinatenlinien so getheilt werden, daß die Summe der Ordinaten auf beiden Seiten des Theilungspunctes gleich groß ist.

32. Ist P eine Function $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, oder eine noch höhere, so hat die Curve, bey der für sie angenommenen Lage der Coordinaten, keinen geradlinichten Durchmesser, sondern einen krummlinigten, der durch die Gleichung, $PM = \frac{1}{m}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, oder eine ähnliche bestimmt wird. Dieser Durchmesser ist eine parabolische Linie. Es läßt sich aber durch Veränderung der Coordinaten die Gleichung immer so einrichten, daß die höchste Potenz der Ordinate dem Grade der Gleichung gleich sey. Cramer, Analyse des lignes courbes, Ch. VI. §. 68. Der parabolischen Durchmesser erwähnt dieser Geometer nicht.

33. Das letzte Glied + V der Gleichung (A) in (29.) ist gleich dem Producte aller den Wurzeln der Gleichung entgegengesetzten Größen. Sind also in (Fig. 45.) Q, R, S, etc. Puncte der Curve auf der Ordinatenlinie durch den Punct P der Abscissenlinie, so ist das Product $(-PQ)(-PR)(+PS)(+PT)$, etc. $= \mp V$,

Digitized by Google

einer Function der Abscisse AP. Z. B. in der Gleichung vom zweyten Grade (10.) ist das Product der beiden Ordinaten, mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen $= \frac{cx^2+ex+f}{a}$. In der Gleichung vom dritten Grade (11.) ist das Product der drey, entgegengesetzt genommenen, Ordinaten $= \frac{dx^3+gx^2+ix+k}{a}$.

34. Die Wurzeln der Gleichung (A) in (29.) unterscheide man durch die Bezeichnungen y, y', y'', etc. so ist der Coefficient + T die Summe der Producte von je m — 1 derselben mit entgegengesetzten Vorzeichen. Setzt man zu jedem dieser Producte den zu dem Producte aller, nämlich V, noch fehlenden Factor, und dividirt zugleich durch denselben, so ist

$$V\left(\frac{1}{-y}+\frac{1}{-y'}+\frac{1}{-y''}+\text{etc.}\right)=T,$$

oder

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}+\text{etc.}=-\frac{T}{V}.$$

(s. noch Gleichung, 211. u. 212.). Die Werthe der veränderlichen Grössen werden hier als Zahlen in Beziehung auf eine angenommene Einheit angesehen.

35. Es sey MN (Fig. 46.) eine gerade, welche die Abscissenlinie AX in B schneidet. Der Anfang der Abscissen ist in A; die Ordinate daselbst AC; eine unbestimmte Abscisse ist AP, die Ordinate zu derselben ist PQ parallel mit AC. Man setze AB = a; AC = b; den W. BAC = α; AP = x; PQ = y, so ist $y=\frac{b}{a}\times(a-x)$.

Man ziehe AQ, und setze AQ = z, den W. BAQ = φ, so ist $y=\frac{z\sin\varphi}{\sin\alpha}$; $x=\frac{z\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}$. Daher ist

$(a \sin \varphi + b \sin(\alpha - \varphi))\, z = ab \sin \alpha$, die Gleichung zwischen den beiden veränderlichen Größen z und φ. Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\sin \varphi}{b \sin \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{a \sin \alpha}.$$

36. Es sey M N (Fig 47.) ein Bogen einer krummen Linie, Q ein Punct auf demselben, und die zu demselben gehörigen Coordinaten AP, PQ. Man ziehe AQ, setze $AQ = u$, $PAQ = \varphi$; den Ordinatenwinkel $QPX = \alpha$; $AP = x$; $PQ = y$, so ist $y = \frac{u \sin \varphi}{\sin \alpha}$; $x = \frac{u \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung zwischen y und x für die Curve, von welcher der Bogen MN ein Theil ist, so geben alle Glieder derselben, außer dem gegebenen Gliede, und den beiden, welche x und y allein enthalten, Potenzen von u. Die beiden niedrigsten Glieder der transformirten Gleichung in Beziehung auf u entstehen also aus jenen dreyen. Diese seyn $Cy + Bx - A$, so entstehen daraus die Glieder,

$$\frac{C \sin \varphi}{\sin \alpha} u + \frac{B \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} u - A.$$

Die Summe der reciproken Werthe von u ist, wie in (34.),

$$= + \frac{C \sin \varphi}{A \sin \alpha} + \frac{B \sin(\alpha - \varphi)}{A \sin \alpha}.$$

Der Factor zu der höchsten Potenz von u hat auf diesen Quotienten keinen Einfluß, weil, wenn diese Potenz von demselben durch die Division befreyt wird, sowohl der Coefficient von u als das unveränderliche Glied A dadurch zugleich dividirt werden.

Man nehme nun auf der Abscissenlinie von A aus die Länge $AB = \frac{A}{B}$, ziehe AC parallel mit den Ordi-

Digitized by Google

naten, und nehme $AC = \frac{A}{C}$, ziehe durch B, C die gerade mn, welche von AQ in q geschnitten werde, so ist

$$\frac{1}{Aq} = \frac{C \sin \varphi}{A \sin \alpha} + \frac{B \sin (\alpha - \varphi)}{A \sin \alpha}.$$

Folglich ist $\frac{1}{Aq}$ gleich der Summe aller reciproken Werthe der die Curve in der Richtung Aq und qA schneidenden geraden, deren eine durch AQ dargestellt ist.

37. Den letzten Satz hat Maclaurin in einer Abhandlung über die allgemeinen Eigenschaften geometrischer Linien, die seiner Algebra angehängt ist. Er drückt ihn aber folgendergestalt aus. Wenn eine gerade Linie, die sich um einen fixen Punct A dreht, einer geometrischen (algebraischen) Linie in so vielen Puncten begegnet, als sie (in dem höchsten Gliede ihrer Gleichung) Dimensionen enthält, und wenn auf derselben Aq immer so genommen wird, daß $\frac{1}{Aq}$ gleich ist der Summe aller reciproken

Digitized by Google

oder an die Curven sich endigenden Abschnitte, mit Beobachtung entgegengesetzter Vorzeichen für entgegengesetzte Lagen, so ist der Ort des Punctes q eine gerade Linie. Er schreibt den Satz dem Cotes zu, aus dessen Nachlasse er denselben von Smith ohne Beweis mitgetheilt erhalten hatte. Er giebt zwey Beweise, von welchen der eine, der auf Eigenschaften der harmonischen Theilung beruht, ziemlich zusammengesetzt ist, der andere mit dem hier gegebenen zwar auf gleichem Grunde beruht, aber doch viel umständlicher und ganz anders ausgeführt worden. Die Einschränkung, daß die Linie AQ die Curve in so vielen Puncten schneiden solle, als die höchste Anzahl der Dimensionen der sie bezeichnenden u Einheiten enthält, ist nicht nöthig. Giebt es unmögliche u, so wird doch die Summe von je zwey unmöglichen zusammengehörigen reciproken Werthen möglich.

38. Eine Linie wird durch so viele Puncte bestimmt, als die allgemeine Gleichung für dieselbe Glieder, weniger eines, enthält. Demnach wird eine Linie der ersten Ordnung, oder die gerade, durch zwey Puncte, wie bekannt, bestimmt; eine Linie der zweyten Ordnung durch fünf Puncte; eine Linie der dritten Ordnung durch neun; überhaupt eine Linie der nten Ordnung durch $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ Puncte, das ist durch $\frac{n(n+3)}{2}$.

Soll eine krumme Linie zu einer gewissen Gattung ihrer Classe gehören, so wird dazu eine gewisse Relation der Coefficienten in ihrer Gleichung erfordert weswegen weniger Puncte als im Allgemeinen für diese Classe bestimmbar sind, gegeben werden dürfen, indem jede gegebene Relation zwischen den Coefficienten die Stelle eines gegebenen Punctes vertritt.

39. Daß die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung für eine Linie um Eins vermindert wird, um die Anzahl der erforderlichen Puncte für sie zu erhalten, beruht darauf, daß die Einheit für die als numerische Größen betrachteten Coefficienten unbestimmt bleibt. Die Coefficienten können durch die Multiplication oder Division aller mit einer und derselben Zahl verändert werden, ohne daß die Gleichung verändert wird. Es kommt bey derselben nur auf das Verhältniß der Coefficienten an.

Die allgemeine Gleichung für die gerade Linie, z. B. ist $ay + bx + c = o$. Hier ist $-\frac{c}{a}$ die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abscissen, und $-\frac{c}{b}$ der Abstand des Durchschnitts der geraden mit der Abscissenlinie. Diese beiden Längen bestimmen die gerade Linie. Dabey

Digitized by Google

bleibt die absolute Größe von a, b, c willkürlich, nur die Verhältnisse a:c und b:c sind bestimmt, und dadurch auch das a:b.

40. Die gegebenen Puncte bestimmen eben so viele Ordinaten mit den zugehörigen Abscissen, wenn die Lage der Abscissenlinie, der Anfangspunct und der Ordinatenwinkel gegeben sind oder angenommen werden. Für eine Linie der zweyten Ordnung seyn die zugehörigen gegebenen Werthe von x und y, wie folget,

x	α,	β,	γ,	δ,	ε.
y	A,	B,	C,	D,	E.

In der allgemeinen Gleichung,

$$ayy + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o,$$

setze man nach der Reihe die zusammengehörigen Werthe von x und y, so erhält man fünf Gleichungen, wie diese erste,

$aA^2 + b\alpha A + c\alpha^2 + dA + e\alpha + f = o$, woraus fünf der sechs Coefficienten a, b, c, d, e, f, bestimmt werden, und einer derselben willkürlich genommen werden kann. Dieser dient zur Einheit für die übrigen.

Legt man die Abscissenlinie durch zwey der gegebenen Puncte, und nimmt den einen Punct zum Anfangspunct der Abscissen, so wird die Bestimmung der Curve so viel leichter.

41. Wenn von den gegebenen Puncten mehrere in einer geraden Linie liegen, als die Anzahl der Puncte ist, in welchen die krumme Linie von einer geraden geschnitten werden kann, so gehört die Gleichung, welche durch alle gegebenen Puncte bestimmt wird, nicht für eine einzige Linie, sondern für ein System mehrerer, worunter eine oder mehrere gerade sind. Z. B. wenn eine Gleichung vom zweyten Grade gefunden werden soll, und es lägen drey gegebene Puncte in einer geraden Linie, so gehörte die

Digitized by Google

Gleichung für ein System zweyer geraden, da eine Linie vom zweyten Grade von einer geraden nur in zwey Puncten geschnitten werden kann.

Krumme Linien der ersten Classe sind diejenigen, für welche die Gleichung auf den zweyten Grad steigt. Die allgemeine Gleichung für dieselben ist

$$ayy+bxy+cxx+dy+ex+f=0.$$

Diese Classe begreift die Kegelschnitte. Da für die Ellipse und Hyperbel die besondern Eigenschaften schon entwickelt worden, aus den Gleichungen, worin die Axen der Coordinaten zwey Durchmesser sind, und auf ähnliche Art es auch für die Parabel geschehen wird, so werden hier nur die allgemeinen Eigenschaften aus der allgemeinen Gleichung hergeleitet werden.

1. Zuerst ist die Frage, wie sich die Gattungen der unter der allgemeinen Form begriffenen Linien von einander unterscheiden. Der Charakter derselben wird am füglichsten von dem Verhältnisse der Coordinaten für unendlich große Abscissen hergenommen.

2. Man setze $\frac{y}{x}=q$, so ist

$$aqq+bq+c+\frac{dq}{x}+\frac{e}{x}+\frac{f}{xx}=0.$$

Diese Gleichung nähert sich, je größer x ist, desto mehr der Gleichung,

$$aqq+bq+c=0.$$

Setzt man x unendlich groß, so verwandelt sich jene völlig in diese. Denn wenn es nicht geschähe, so wäre x noch endlich.

3. Die Gleichung für q giebt

$$q=\frac{-b\pm\sqrt{(bb-4ac)}}{2a}.$$ Hier sind drey verschie-

Digitized by Google

6. Es sey die mit den Ordinaten parallele BC eine berührende in C, und durch C werde mit der Abscissenlinie parallel die CD gezogen, welche MN in E schneide, so ist

$$EN - EM = \frac{b}{a} \times pP.$$

7. Wenn in der Gleichung zwischen x und y ist $b = o$, und $d = o$, so sind die Werthe der Ordinaten durchgehends gleich und entgegengesetzt, oder beide unmöglich.

8. Wenn für zwey verschiedene Abscissen die Werthe der zugehörigen Ordinaten gleich und entgegengesetzt sind, so sind die Coefficienten b und $d = o$. Denn der Factor von y, nämlich $\frac{bx + d}{a}$, kann nur für einen einzigen Werth von x null werden, nämlich für $x = -\frac{d}{b}$, wenn nicht beide, b und d, null sind. Ist d allein null, so ist der Factor bloß null, wenn $x = o$ ist; und wenn b allein null ist, so ist der Factor unveränderlich, und $= \frac{d}{a}$. Die Werthe der Ordinaten sind für jedes x alsdann ungleich.

9. Eine gerade Linie, die zwey parallele Chorden halbirt, halbirt jede mit diesen parallele, und ist daher ein Durchmesser im eigentlichen Verstande. Sie wird durch die Gleichung, $z = -\frac{bx + d}{2a}$, bestimmt (krumme Linie, 31.). Diese Ordinate z an eine gerade ist das arithmetische Mittel zwischen den beiden Ordinaten an die krumme Linie; daher die Unterschiede jener z und dieser gleich groß sind.

10. Eine krumme Linie der ersten Classe (Fig. 49.) werde von der Abscissenlinie in B und C geschnitten. Die Ordinatenlinie schneide sie in M und N. Das Product

Digitized by Google

der den Wurzeln der allgemeinen Gleichung entgegengesetzten Grössen ist $= \frac{cx^2+ex+f}{a}$ (Gleichung, 40.). Da in dem Falle der Figur die Werthe von y sich entgegengesetzt sind, so ist hier $PM \times PN = -\frac{cx^2+ex+f}{a}$, wie in Gleichung, 34. Weil die Abscissenlinie zweymahl die Curve treffen soll, so wird die Function $cxx+ex+f$ zweymahl Null, und die Wurzeln der Gleichung, $cxx+ex+f=0$ sind AB, AC, wenn nämlich A der Anfang der Abscissen ist. Daher ist, (Gleichung, 43.), die Function $xx+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c}=(x-AB)(x-AC)$ $=(AP-AB)(AP-AC)$ oder $PB \times PC = -(xx+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c})$. Der Werth dieses Products mit dem von $PM \times PY$ verglichen, giebt $PM \times PN : PB \times PC = c:a$, oder das Verhältniß der Rechtecke von den Segmenten der einander und die Curve unter demselben Winkel schneidenden geraden ist ein unveränderliches. Im Kreise ist das Verhältniß das der Gleichheit.

11. Es sey DE eine mit MN parallele, welche die BC in F schneide; so ist $FD \times FE : FB \times FC = c:a$, also ist

$$PM \times PN : FD \times FE = PB \times PC : FB \times FC.$$

12. Man ziehe noch GH parallel mit BC, welche die beiden ED und NM in K, L schneide. Da $PB \times PC : LG \times LH = PM \times PN : LM \times LN$, und

$$LG \times LH : KG \times KH = LM \times LN : KD \times KE$$

ist, so entsteht hieraus die Proportion,

$$PB \times PC : KG \times KH = PM \times PN : KD \times KE.$$

Ein rein geometrischer Beweis dieser Sätze macht mehr

Digitized by Google

Anmerk. Man sehe Milnes sect. conic. elementa, Prop. 17. 18. De la Hire Sect. Con. L. V. prop. 4. 5.

13. Die Abscissenlinie berühre die krumme Linie in B (Fig. 50.), so fallen zwey Durchschnittspuncte in einen einzigen B (C) zusammen, und die Function, $xx + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c}$ ist ein Quadrat. Zieht man die parallelen PNM, FED an die Curve, so ist

$$PM \times PN : FD \times FE = PB^2 : FB^2.$$

14. Wenn die Abscissenlinie die krumme Linie nicht schneidet, so hat die Function von x, welche dem Producte der den Ordinaten entgegengesetzten Grössen gleich ist, nämlich $\frac{1}{a}(cxx + ex + f)$, keine mögliche Factoren, da y für keinen Werth von x Null wird. Daher ist $4cf > e^2$. Man gebe der Function von x diese Form, $\frac{1}{ac}((cx + \frac{1}{2}e)^2 + cf - \frac{1}{4}e^2)$, so verhält sich das Product der entgegengesetzt genommenen Ordinaten, wie das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Katheten sind $cx + \frac{1}{2}e$ und $\sqrt{(cf - \frac{1}{4}ee)}$. Die krumme Linie sey EFMN (Fig. 51.), die Abscissenlinie AX, welche die Curve nicht schneidet, eine Abscisse AP, die Ordinaten PM, PN. Man setze in A auf die Abscissenlinie die senkrechte $AB = \frac{1}{c}\sqrt{(cf - \frac{1}{4}ee)}$, ziehe durch B mit AX die parallele BB, nehme $AC = \frac{e}{2c}$, errichte in P die senkrechte PQ bis an BB, und ziehe CQ, so ist $CQ^2 = (x + \frac{e}{2c})^2 + \frac{1}{cc}(cf - \frac{1}{4}ee)$ oder $CQ^2 = \frac{1}{cc}((cx + \frac{1}{2}e)^2 + cf - \frac{1}{4}ee)$. Das Product der

Digitized by Google

Ordinaten $PM \times PN$, welches mit dem ihrer entgegengesetzten gleichnamig ist, ist also $= \frac{c}{a} \cdot CQ^2$. Eine andere Ordinatenlinie sey DEF. Durch den Punct D setze man senkrecht auf AX die DG, welche AB in G treffe, so ist das Product $DE \times DF = \frac{c}{a} CG^2$. Folglich ist

$$PM \times PN : DF \times DE = CQ^2 : CG^2.$$

15. Es sey BMCN (Fig. 52.) eine Curve der ersten Classe, an welche von irgend einem Puncte A eine gerade AMN willkürlich gezogen ist. Der Ort für die Summe der reciproken $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$, ist eine gerade RR, und zwar diejenige, welche durch die Gleichung $dy + ex + f = o$ bestimmt wird, wenn A der Anfang der Abscissen auf irgend einer Axe derselben ist (krumme Linie, 36.). Demnach ist, wenn AMN die RR in P schneidet, $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AP}$.

Daraus ist $AM + AN : AM = AN : AP$;
auch $AN - AP : AP = AN : AM$;
oder $AM - AP : AP = AM : AN$.

16. Es seyn AB und AC (Fig. 52) berührende in B und C, welche die RR jene in D, diese in E schneiden. Hier ist $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AD}$, also $AB = 2AD$; und eben so $AC = 2AE$. Man ziehe BC, so ist, wegen der gleichen Verhältnisse, AB:AD und AC:AE, die gerade BC parallel mit DE oder RR.

17. Die gerade AMN schneide BC in L, so ist $AL = 2AP$, weil $AL : AP = AB : AD$ ist. Es ist

Digitized by Google

daher $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AL}$. Hieraus ist $AL \times AN + AL \times AM = 2AM \times AN$, oder $(AM + ML)AN + AL \times AM = AM \times AN + AM(AL + LN)$, das ist

$$AN \times ML = AM \times LN,$$

und $AN : AM = LN : ML$.

Die Linie AN wird also von der Curve, und der die Berührungspuncte verbindenden BC harmonisch getheilt, s. harmon. Theilung.

18. Durch M und N ziehe man mit BC die parallelen FH, GI, welche die berührenden jene in F, H, diese in G, I, und die Curve in S und T schneiden. Es ist $BF : BG = LM : LN = AM : AN = FM : GN$. Aus (14.) ist $FM \times FS : GN \times GT = BF^2 : BG^2$. In dem erstern zusammengesetzten Verhältnisse setze man für das $FM : GN$ das ihm gleiche $BF : BG$, so wird es $BF \times FS : BG \times GT$. Durch Aufhebung der gleichen componirenden Verhältnisse in der Proportion, verwandelt sie sich in diese, $FS : GT = BF : BG$. Es ist $BF : BG = ML : LN = AM : AN = AF : AG$, also $FS : GT = AF : AG$. Die gerade GI wird von der geraden AS in einem Puncte T' so geschnitten, daß $FS : GT' = AF : AG$ ist. Daher fallen die Durchschnittspuncte, T mit der Curve, und T' mit der geraden AS, in einen zusammen, oder die gerade ST geht durch A.

19. Durch die Mitte O von MS ziehe man AOQ bis an NT. Diese NT wird auch von AQ halbirt. Da die gerade, welche zwey Chorden halbirt, auch alle diese parallelen halbirt (9.), so ist der Punct K, worin AQ die BC trifft, die Mitte von BC. Folglich halbirt die AO auch die mit BC parallele FH. Dadurch ist $FM = HS$. Oder, die Abschnitte einer geraden Linie zwischen der Curve und zwey berührenden geraden, wenn jene

Digitized by Google

mit der die Berührungspuncte verbindenden parallel ist, sind sich gleich.

20. In dem Artikel, Hyperbel, 35. ist gefunden, daß die Segmente einer geraden Linie zwischen der Curve und den Asymptoten gleich groß sind. Dieses ist ein besonderer Fall des jetzt gefundenen allgemeinen. Die Asymptoten sind als berührende in unendlich entfernten Puncten anzusehen; die verbindende der Berührungspuncte hat keine bestimmte Lage.

21. Der Satz (15.) dient, zu fünf gegebenen Puncten eines Kegelschnitts so viele einzelne zu finden als man will. Man ziehe durch zwey Paare derselben, als M und N, S und T (Fig. 52.) gerade Linien, welche sich in A schneiden, und nehme AP und AU so wie es in (15.) angegeben ist. Dadurch wird die Lage der geraden RR bestimmt. Nun ziehe man von A nach dem fünften Puncte eine gerade, welche RR in einem gewissen Puncte schneide. Durch die Abstände beider Puncte von A findet man den sechsten auf dem Kegelschnitte. Darauf nehme man von den sechs Puncten zwey andere Paare als vorher, und bestimme dadurch eine andere gerade RR, verfahre darauf, wie eben gezeigt worden, und setze dieses fort, bis eine für die Ausübung hinlängliche Anzahl Puncte bestimmt worden ist.

22. Zu der Zeichnung eines Kegelschnittes mittelst einzelner Puncte kann man die Lehrsätze in dem Artikel, Kreis, 72. 76. benutzen. Es seyn von einem Kegelschnitte fünf Puncte gegeben; diese betrachte man als Projectionen der fünf Puncte eines Kreises, A, B, C, D, E (Fig. 30.). In dem Kreise verlängere man die geraden AB, ED bis zu ihrem Durchschnitte G, ziehe willkürlich die gerade GHI, verlängere die gerade BC bis an dieselbe in H, und die CD eben dahin in I, verbinde HE, AI, so liegt der Durchschnitt F der verlängerten HE und der AI auf dem Kreisumfange. Nimmt man eben diese Zeichnung in der Projection vor, so ist F auch ein Punct des

Digitized by Google

Kegelschnittes, zu welchem die Puncte A, B, C, D, E g
hören. Denn die Durchschnittspuncte G, H, I, welch
in der Zeichnung für den Kreis in eine gerade Linie falle
(72) liegen in der Projection ebenfalls in einer gerade
Linie.

Auf ähnliche Art wird zufolge (76.) aus fünf Pun
ten eines Kreises ein sechster bestimmt. Die gegeben
Puncte seyn A B C D, E. (Fig. 32.) Man verlängere d
geraden A B, D C bis zu ihrem Durchschnitte G, ziehe B E
nehme auf derselben einen Punct H, ziehe G H, welch
verlängert die gleichfalls verlängerte C E in I treffe, so i
der Durchschnitt F der verlängerten D H mit der A I e
Punct des Kreises. Durch dieselbe Zeichnung wird
ein Punct des Kegelschnittes, zu welchem die Punct
A, B, C, D, E gehören.

Es ist hier, wie bey der vorhergehenden Zeichnung,
gleichgültig, welche zwey von den drey Puncten G, H, I
man wähle, um den dritten zu bestimmen.

Lambert hat in seiner freyen Perspectiv, Th. II
S. 165. gezeigt, wie durch Hülfe der Perspectiv die Auf
gabe, durch fünf Puncte eine Linie der zweyten Ordnung
zu ziehen, aufgelöset werden mag. Doch ist bey den ge
gebenen Puncten noch eine gewisse einschränkende Bedin
gung, wenn die Horizontallinie gegeben wird.

23. Aus der allgemeinen Gleichung wird die Lage
des Durchmessers für den gegebenen Ordinatenwinkel fol
gendergestalt gefunden.

Es sey G M I N (Fig. 53.) eine Curve der ersten
Classe, A X die Abscissenlinie, A P eine Abscisse, P M
und P N die dazu gehörigen Ordinaten. Die allgemeine
Gleichung ist

$$ayy - bxy + cx^2 - dy + ex + f = o.$$

Der Factor von y hat das Vorzeichen — bekommen, da
mit die Wurzeln der Gleichung als positiv erscheinen, wie

Digitized by Google

die Ordinaten PM, PN in der Figur. Übrigens können b und d beide oder einzeln negativ seyn, wodurch die Glieder additiv werden, so fern x und y positiv sind. Man setze $y = \frac{bx+d}{2a} + u$, so verwandelt sich die Gleichung in diese,

$$auu - \frac{(bx+d)^2}{4a} + cx^2 + ex + f = o.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie, $AB = \frac{d}{b}$, den positiven Abscissen entgegengesetzt, lege $AE = \frac{d}{2a}$ den Ordinaten parallel, ziehe die gerade BED, welche die Ordinatenlinie PNM in Q schneide, so ist $PQ = \frac{bx+d}{2a}$, da BA : AE = BP : PQ ist. Der Punct Q theilt MN in zwey gleiche Theile. Denn es ist $PM + PN = \frac{bx+d}{a}$, dem Factor oder Coefficienten von y, in der durch a dividirten Gleichung. Also ist PM + PN = 2PQ, und daher PQ das arithmetische Mittel von PM und PN, das ist MQ = NQ. Oder durch Zerlegung: PQ + QM + PN = PQ + PN + NQ, das ist QM = QN.

24. Es soll nun die Lage des Mittelpuncts C auf dem Durchmesser GI in Beziehung auf die Abscissenlinie bestimmt werden.

Durch die Endpuncte G, I des Durchmessers ziehe man parallel mit den Ordinaten die geraden GF, IH bis an die Abscissenlinie in F und H. Da hier die gleichen Ordinaten auf BD null sind, oder u = o ist, so ist

$$\frac{(bx+d)^2}{4a} = cx^2 + ex + f,$$

Digitized by Google

Kegelschnittes, zu welchem die Puncte A, B, C, D, E g
hören. Denn die Durchschnittspuncte G, H, I, welch
in der Zeichnung für den Kreis in eine gerade Linie falle
(72) liegen in der Projection ebenfalls in einer gerad
Linie.

Auf ähnliche Art wird zufolge (76.) aus fünf Pun
ten eines Kreises ein sechster bestimmt. Die gegeben
Puncte seyn A B C D, E. (Fig. 32.) Man verlängere di
geraden A B, D C bis zu ihrem Durchschnitte G, ziehe B E
nehme auf derselben einen Punct H, ziehe G H, welch
verlängert die gleichfalls verlängerte C E in I treffe, so i
der Durchschnitt F der verlängerten D H mit der A I e
Punct des Kreises. Durch dieselbe Zeichnung wird
ein Punct des Kegelschnittes, zu welchem die Punct
A, B, C, D, E gehören.

Es ist hier, wie bey der vorhergehenden Zeichnung,
gleichgültig, welche zwey von den drey Puncten G, H, I
man wähle, um den dritten zu bestimmen.

Lambert hat in seiner freyen Perspectiv, Th. II
S. 165. gezeigt, wie durch Hülfe der Perspectiv die Auf-
gabe, durch fünf Puncte eine Linie der zweyten Ordnung
zu ziehen, aufgelöset werden mag. Doch ist bey den ge
gebenen Puncten noch eine gewisse einschränkende Bedin
gung, wenn die Horizontallinie gegeben wird.

23. Aus der allgemeinen Gleichung wird die Lag
des Durchmessers für den gegebenen Ordinatenwinkel fol
gendergestalt gefunden.

Es sey G M I N (Fig. 53.) eine Curve der erste
Classe, A X die Abscissenlinie, A P eine Abscisse, P M
und P N die dazu gehörigen Ordinaten. Die allgemein
Gleichung ist

$$ayy - bxy + cx^2 - dy + ex + f = o.$$

Der Factor von y hat das Vorzeichen — bekommen, da
mit die Wurzeln der Gleichung als positiv erscheinen, wie

Digitized by Google

die Ordinaten PM, PN in der Figur. Übrigens können b und d beide oder einzeln negativ seyn, wodurch die Glieder additiv werden, so fern x und y positiv sind. Man setze $y = \frac{bx+d}{2a} + u$, so verwandelt sich die Gleichung in diese,

$$auu - \frac{(bx+d)^2}{4a} + cx^2 + ex + f = o.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie, $AB = \frac{d}{b}$, den positiven Abscissen entgegengesetzt, lege $AE = \frac{d}{2a}$ den Ordinaten parallel, ziehe die gerade BED, welche die Ordinatenlinie PNM in Q schneide, so ist $PQ = \frac{bx+d}{2a}$, da BA : AE = BP : PQ ist. Der Punct Q theilt MN in zwey gleiche Theile. Denn es ist $PM + PN = \frac{bx+d}{a}$, dem Factor oder Coefficienten von y, in der durch a dividirten Gleichung. Also ist PM + PN = 2PQ, und daher PQ das arithmetische Mittel von PM und PN, das ist MQ = NQ. Oder durch Zerlegung: PQ + QM + PN = PQ + PN + NQ, das ist QM = QN.

24. Es soll nun die Lage des Mittelpuncts C auf dem Durchmesser GI in Beziehung auf die Abscissenlinie bestimmt werden.

Durch die Endpuncte G, I des Durchmessers ziehe man parallel mit den Ordinaten die geraden GF, IH bis in die Abscissenlinie in F und H. Da hier die gleichen Ordinaten auf BD null sind, oder u = o ist, so ist

$$\frac{(bx+d)^2}{4a} = cx^2 + ex + f,$$

Digitized by Google

Kegelschnittes, zu welchem die Puncte A, B, C, D, E
hören. Denn die Durchschnittspuncte G, H, I, we
in der Zeichnung für den Kreis in eine gerade Linie fa
(72) liegen in der Projection ebenfalls in einer gera
Linie.

Auf ähnliche Art wird zufolge (76.) aus fünf Pu
ten eines Kreises ein sechster bestimmt. Die gegebe
Puncte seyn A B C D, E. (Fig. 32.) Man verlängere
geraden A B. D C bis zu ihrem Durchschnitte G, ziehe B
nehme auf derselben einen Punct H, ziehe G H, we
verlängert die gleichfalls verlängerte C E in I treffe, so
der Durchschnitt F der verlängerten D H mit der A I
Punct des Kreises. Durch dieselbe Zeichnung wird
ein Punct des Kegelschnittes, zu welchem die Pu
A, B, C, D, E gehören.

Es ist hier, wie bey der vorhergehenden Zeichnu
gleichgültig, welche zwey von den drey Puncten G, H,
man wähle, um den dritten zu bestimmen.

Lambert hat in seiner freyen Perspectiv, A
S. 165. gezeigt, wie durch Hülfe der Perspectiv die A
gabe, durch fünf Puncte eine Linie der zweyten Ordn
zu ziehen, aufgelöset werden mag. Doch ist bey den
gebenen Puncten noch eine gewisse einschränkende Be
gung, wenn die Horizontallinie gegeben wird.

23. Aus der allgemeinen Gleichung wird die L
des Durchmessers für den gegebenen Ordinatenwinkel f
gendergestalt gefunden.

Es sey G M I N (Fig. 53.) eine Curve der er
Classe, A X die Abscissenlinie, A P eine Abscisse, P
und P N die dazu gehörigen Ordinaten. Die allgem
Gleichung ist

$$ayy - bxy + cx^2 - dy + ex + f = 0.$$

Der Factor von y hat das Vorzeichen — bekommen, d
mit die Wurzeln der Gleichung als positiv erscheinen, w

Digitized by Google

ie Ordinaten PM, PN in der Figur. Übrigens können
b und d beide oder einzeln negativ seyn, wodurch die Glie-
er additiv werden, so fern x und y positiv sind. Man
he $y = \frac{bx+d}{2a} + u$, so verwandelt sich die Glei-
ung in diese,

$$auu - \frac{(bx+d)^2}{4a} + cx^2 + ex + f = o.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie, $AB = \frac{d}{b}$, den
riven Abscissen entgegengesetzt, lege $AE = \frac{d}{2a}$ den
dinaten parallel, ziehe die gerade BED, welche die
dinatenlinie PNM in Q schneide, so ist $PQ = \frac{bx+d}{2a}$,
a BA: AE = BP: PQ ist. Der Punct Q theilt MN
zwey gleiche Theile. Denn es ist $PM + PN = \frac{bx+d}{a}$, den Factor oder Coefficienten von y, in der
ch a dividirten Gleichung. Also ist $PM + PN = 2PQ$,
daher PQ das arithmetische Mittel von PM und PN,
s ist MQ = NQ. Oder durch Zerlegung: $PQ + QM = PN = PQ + PN + NQ$, das ist QM = QN.

24. Es soll nun die Lage des Mittelpuncts C auf
Durchmesser GI in Beziehung auf die Abscissenlinie
timmt werden.

Durch die Endpuncte G, I des Durchmessers ziehe
parallel mit den Ordinaten die geraden GF, IH bis
die Abscissenlinie in F und H. Da hier die gleichen
dinaten auf BD null sind, oder u = o ist, so ist

$$\frac{(bx+d)^2}{4a} = cx^2 + ex + f,$$

Digitized by Google

oder

$$(bb-4ac)x^2-(4ae-2bd)x+dd-4af=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind AF und AH. Man halbire FH in K, so ist $AK=\frac{1}{2}(AF+AH)$, das ist

$$AK=\frac{2ae-bd}{bb-4ac}.$$

Man ziehe KC. so ist diese mit FG parallel, da GC=CI, so wie FK=KH ist. Nun ist BA:AE=BK:KC.

Hier ist $BK=BA+AK=\frac{2a(be-2cd)}{b(bb-4ac)}$. Da BA:AE=2a:b, und BA:AE=BK:KC ist, so ist

$$CK=\frac{be-2cd}{bb-4ac}.$$

25. Alle Durchmesser einer Curve der ersten Classe haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

An derselben krummen Linie (Fig. 53.), für welche die Gleichung zwischen x und y, oder zwischen AP und PM (auch PN), gesetzt ist nehme man den Ordinatenwinkel ARM statt des APM, so treten für die Coordinaten AP, PM die AR, RM an demselben Puncte M in die Stelle. Die Verhältnisse von PM, RM, PR sind gegeben. Man setze AR=t; RM=z, RP=mz; PM=nz, so ist x=t+mz; y=nz. Diese Werthe von x und y substituire man in der gegebenen Gleichung um eine zwischen t und z zu erhalten. Aus dieser findet man die Lage des Mittelpuncts des Durchmessers gi für die Ordinaten RM, durch zwey ähnliche Formeln als vorher für den Durchmesser GI zu den Ordinaten PM. Es bedeute nun C den Mittelpunct des Durchmessers gi für die Ordinaten wie RM. Durch C sey CL parallel mit den Ordinaten RM gezogen, welche die Abscissenlinie in L treffe. Die Gleichung zwischen z und t sey diese,

Digitized by Google

$$Azz - Btz + Ct^2 - Dz + Et + F = o,$$

so ist

$$A = n^2a - mnb + m^2c;$$
$$B = nb - 2mc; \qquad C = c;$$
$$D = nd - me; \qquad E = e; \; F = f.$$

Es ist nun wie in (24.)

$$AL = \frac{2A.E - B.D}{B.B - 4A.C};$$

$$LC = \frac{B.E - 2C.D}{B.B - 4A.C}.$$

Nun ist

$$2A.E = 2e(n^2a - mnb + m^2c),$$
$$B.D = n^2b^2d - 2mncd - mnbe + 2m^2ce.$$

also

$$2A.E - B.D = n^2(2ae - bd) - mn(be - 2cd).$$

ferner $B.B = n^2bb - 4mnbc + 4m^2cc;$

$$4A.C = 4n^2ac - 4mnbc + 4m^2cc.$$

also

$$B.B - 4A.C = n^2(bb - 4ac).$$

Noch ist

$$B.E - 2C.D = n(be - 2cd).$$

Daraus ist

$$AK - AL = KL = \frac{m(be - 2cd)}{n(bb - 4ac)},$$

und $$LC = \frac{be - 2cd}{n(bb - 4ac)}.$$

Man ziehe von C als Mittelpunct auf dem Durchmesser gi nach K die gerade CK, so ist das Dreyeck CLK dem MRP ähnlich. Denn es ist $CL : LK = 1 : m = MR : RP$, und die Winkel L und R sind gleich. Es ist also $RP : MP = LK : CK$, das ist $m : n = LK : CK$, also $CK = \frac{be - 2cd}{bb - 4ac}$; zugleich ist CK parallel mit

Digitized by Google

MP. Dieses ist aber auch der Werth der von K nach dem Mittelpuncte auf GI gezogenen, und mit PM parallelen geraden Linie. Folglich fallen beide Mittelpuncte, der von GI und gi in eins, welche Lage auch gi haben mag.

In Eulers Introd. in Anal. Inf. T. II. §. 101 — 108 ist der Beweis auf eine ganz andere Art geführt.

26. Wenn $bb = 4ac$, so sind AK und KC unendlich groß. Dieses ist der Fall bey der dritten Gattung in (3.), der Parabel. In dieser sind also wegen des unendlich entfernten Mittelpunctes die Durchmesser alle sich parallel.

27. Durch den Unterschied der Abscissen AF, AH, nämlich FH, wird die Größe des Durchmessers GI bekannt. Denn es ist $AB : BE = FH : GI$. Die Linie BE wird in dem Dreyecke BAE durch die Seiten AB, AE mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben. Dadurch ist auch der Winkel GQN der Coordinaten gegeben, der dem W. AEB gleich ist, das ist der Winkel des zu GI conjugirten Durchmessers mn mit demselben. Dieser Durchmesser ist der Unterschied der beiden Ordinaten in K. Aus den conjugirten Durchmessern und ihrem Winkel werden die beiden Axen und ihr Winkel mit jenen bekannt, weil dadurch das Product der beiden Axen und die Summe ihrer Quadrate gegeben werden, (Ellipse, 23. 24. Hyperbel, 27, 28. Vergl. Gleichung, 49.) Wie eine Parabel bestimmt werden könne, wird sich aus dem Artikel, Parabel, ergeben.

28. Es werde nun aus der einfachsten Gleichung für einen Kegelschnitt, bey einem gegebenen Winkel der Coordinaten die allgemeinste Gleichung für eine krumme Linie der ersten Classe gesucht, um daraus einzusehen, wie die Coefficienten der letztern aus den gegebenen Größen an dem Kegelschnitte und der Lage der Abscissenlinie mit jenem Winkel bestimmt werden. Daraus wird zugleich erhellen,

Digitized by Google

daß alle krummen Linien der ersten Classe Kegelschnit sind. Die einfachste Gleichung für jeden Kegelschnitt wi erhalten, wenn die Abscissen auf einem Durchmesser vo dem Scheitel (an der Ellipse und Hyperbel von dem eine oder dem andern) genommen werden, und die Ordinate auf beiden Seiten der Abscissenlinie sich gleich sind. D in der Parabel der Mittelpunct unendlich weit entfernt i so ist daran der Anfang der Abscissen in ihrem Scheit zu nehmen, und deßhalb auch in den beiden andern Kege schnitten.

29. Es sey DE (Fig. 54.), ein Durchmesser e ner Ellipse, FG der conjugirte, welche sich in dem Mi telpuncte O schneiden. Mit FG sey parallel die Chord MN, welche DE in Q treffe, so ist QM = QN (E lipse, 16.). Es ist (daf. 18.)

$$\frac{2FO^2}{DO} \cdot DQ - \frac{FO^2}{DO^2} DQ^2 = QM^2.$$

Nun sey AX irgend eine zur Abscissenlinie genommene g rade, welche die verlängerte DE in B schneide. Auf de selben sey A der Anfangspunct, AP irgend eine Abscis PNM eine Ordinatenlinie parallel mit FG. Durch A ziehe man parallel mit PM die AC bis an BD in C auch AR parallel mit DE an MN. Es ist nu DQ = AR — CD, und AR die vierte proportional zu AB, BC und AP. Ferner ist QM = PM + QI — PR, wo PR die vierte proportionale zu AB, AC un AP ist. So ist auch die entgegengesetzte QN = QI + PR — PN. Man setze AP = x; PM = y, A = a; AC = b; BC = c; CD = d; DO = f FO = mf, so ist

$$2m^2f\left(\frac{cx}{a} - d\right) - m^2\left(\frac{cx}{a} - d\right)^2 = \left(y - b - \frac{bx}{a}\right)^2.$$

Digitized by Google

Daraus ist die geordnete Gleichung,

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} + \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by + \left(\frac{2bb}{a} - \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x + bb + m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen, $Ay^2 - Bxy + Cx^2 - Dy + Ex + F = 0$, so geben die fünf Coefficienten, $-\frac{B}{A}$; $+\frac{C}{A}$, u. s. f. fünf Gleichungen zur Bestimmung von fünf Größen unter den sechs, a, b, c, d, f, m. Es ist für die allgemeine Gleichung der Coordinatenwinkel willkürlich. Nimmt man diesen an, so ist c durch a und b bestimmt, und es bleiben fünf noch zu finden. Erstlich ist $b = \frac{1}{2}D$; ferner $\frac{2b}{a} = B$, also $a = \frac{D}{B}$. Dann ist $\frac{1}{4}B^2 \times \left(1 + \frac{4m^2c^2}{D^2}\right) = C$, woraus m gefunden wird. Die beiden übrigen Größen d und f werden aus der Verbindung der beiden Werthe von E und F gefunden. Für d finden zwey Werthe Statt, deren einer der Abstand des Punctes C von dem andern Scheitel ist.

30. In der gefundenen Gleichung ist $\frac{1}{4}B^2 < AC$, weswegen für unendliche x keine y möglich sind (3.). Die Ellipse ist eine Curve in einem beschränkten Raume.

31. Aus der einfachsten Gleichung für die Hyperbel, die Abscissen auf einem Durchmesser, und der Anfang im Scheitel genommen, die Ordinaten parallel mit dem conjugirten gezogen, (Hyperbel, 22.) leite man eben so eine allgemeine Gleichung her. Diese ist, da bloß das Quadrat der Abscisse D Q das Vorzeichen ändert,

Digitized by Google

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} - \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by$$
$$+ \left(\frac{2bb}{a} + \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x$$
$$+ bb - m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Hier ist $\frac{1}{4}B^2 > AC$, und die Gleichung hat für ein unendliches x zwey unendliche Ordinaten. Die Hyperbel hat vier unendliche Zweige.

32. Das Aggregat der drey ersten Glieder der Gleichung, oder der höchste Theil ist das Product aus den Factoren, $y - \left(\frac{b}{a} + \frac{mc}{a}\right)x$, und $y - \left(\frac{b}{a} - \frac{mc}{a}\right)x$. Für unendlich große Coordinaten ist also die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$, oder von q in (2.), $= \frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}$, wobey x sowohl positiv als negativ genommen werden kann. Die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr zwey geraden Linien, deren Gleichungen sind, $y - \left(\frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}\right)x + k = 0$, wo k für jede eine besondere unveränderliche, positive oder negative Größe, oder auch 0 ist; denn zu einer völlig bestimmten Gleichung für eine gerade Linie gehört auch eine solche gegebene Größe. Für unendliche x und y wird das Verhältniß der Coordinaten an der Hyperbel und an den beiden geraden Linien dasselbe. Die Werthe von k werden aus den vollständigen Werthen von y, welche die Auflösung der Gleichung zwischen x und y liefert, gefunden. Sie sind der gegebene Theil in diesen Werthen. Die Gleichungen für die Asymptoten seyn nun $z - \alpha x + \beta = 0$, und $z - \gamma x + \delta = 0$, wo z die Ordinaten an diesen ge-

Digitized by Google

Daraus ist die geordnete Gleichung,

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} + \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by + \left(\frac{2bb}{a} - \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x + bb + m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen, $Ay^2 - Bxy + Cx^2 - Dy + Ex + F = 0$, so geben die fünf Coefficienten, $-\frac{B}{A}$; $+\frac{C}{A}$, u. s. f. fünf Gleichungen zur Bestimmung von fünf Größen unter den sechs, a, b, c, d, f, m. Es ist für die allgemeine Gleichung der Coordinatenwinkel willkürlich. Nimmt man diesen an, so ist c durch a und b bestimmt, und es bleiben fünf noch zu finden. Erstlich ist $b = \frac{1}{2}D$; ferner $\frac{2b}{a} = B$, also $a = \frac{D}{B}$. Dann ist $\frac{1}{4}B^2 \times \left(1 + \frac{4m^2c^2}{D^2}\right) = C$, woraus m gefunden wird. Die beiden übrigen Größen d und f werden aus der Verbindung der beiden Werthe von E und F gefunden. Für d finden zwey Werthe Statt, deren einer der Abstand des Punctes C von dem andern Scheitel ist.

30. In der gefundenen Gleichung ist $\frac{1}{4}B^2 < AC$, weswegen für unendliche x keine y möglich sind (3.). Die Ellipse ist eine Curve in einem beschränkten Raume.

31. Aus der einfachsten Gleichung für die Hyperbel, die Abscissen auf einem Durchmesser, und der Anfang im Scheitel genommen, die Ordinaten parallel mit dem conjugirten gezogen, (Hyperbel, 22.) leite man eben so eine allgemeine Gleichung her. Diese ist, da bloß das Quadrat der Abscisse D Q das Vorzeichen ändert,

Digitized by Google

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} - \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by + \left(\frac{2bb}{a} + \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x + bb - m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Hier ist $\frac{1}{4}B^2 > AC$, und die Gleichung hat für ein unendliches x zwey unendliche Ordinaten. Die Hyperbel hat vier unendliche Zweige.

32. Das Aggregat der drey ersten Glieder der Gleichung, oder der höchste Theil ist das Product aus den Factoren, $y - \left(\frac{b}{a} + \frac{mc}{a}\right)x$, und $y - \left(\frac{b}{a} - \frac{mc}{a}\right)x$. Für unendlich große Coordinaten ist also die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$, oder von q in (2.), $= \frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}$, wobey x sowohl positiv als negativ genommen werden kann. Die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr zwey geraden Linien, deren Gleichungen sind, $y - \left(\frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}\right)x + k = 0$, wo k für jede eine besondere unveränderliche, positive oder negative Größe, oder auch 0 ist; denn zu einer völlig bestimmten Gleichung für eine gerade Linie gehört auch eine solche gegebene Größe. Für unendliche x und y wird das Verhältniß der Coordinaten an der Hyperbel und an den beiden geraden Linien dasselbe. Die Werthe von k werden aus den vollständigen Werthen von y, welche die Auflösung der Gleichung zwischen x und y liefert, gefunden. Sie sind der gegebene Theil in diesen Werthen. Die Gleichungen für die Asymptoten seyn nun $z - \alpha x + \beta = 0$, und $z - \gamma x + \delta = 0$, wo z die Ordinaten an diesen ge-

Digitized by Google

raden Linien bedeuten, welchen die Ordinaten y an der Hyperbel zuletzt gleich werden. Setzt man im Unendlichen $y = z$, und nimmt den Werth von z an der erstern Asymptote, $z = \alpha x$, so verwandelt sich der höchste Theil der Gleichung für y in $\beta(y - \gamma x + \delta)$. Dieses ist ein Unendliches vom ersten Grade, welches sich mit dem zweyten Theile der Gleichung, der x und y enthält, so weit heben muß, daß nur ein endlicher Unterschied bleibt, der mit dem gegebenen Theile der Gleichung zusammen genommen $= 0$ wird. Eben so verhält es sich, wenn $y = \gamma x$ gesetzt wird.

33. Wenn das Glied xx fehlt, oder wenn $b = \pm mc$ ist, so ist einer der Coefficienten von x in den Gleichungen für die Asymptoten $= 0$. Es sey $\alpha = a$, so ist die Gleichung für die eine derselben, $z + \beta = 0$, welches anzeigt, daß die eine der Asymptoten der Abscissenlinie in dem Abstande $-\beta$ nach der Richtung der Ordinaten parallel ist. Sie fällt in diese selbst, wenn $\beta = 0$ ist. In jenem Falle ist die Gränze der einen Reihe der Ordinaten y der Abstand $-\beta$ von der Abscissenlinie. Fehlt yy und ist xx vorhanden, so ist die Axe der Ordinaten y der einen Asymptote parallel, oder fällt in diese selbst. Fehlen xx und yy beide, so sind beide Axen der Coordinaten, jede einer derselben, parallel, oder liegen in ihnen selbst.

34. Die Gleichung für die Parabel, wenn die Abscissen auf einem Durchmesser von dem Scheitel an, und die Ordinaten gleich und entgegengesetzt genommen werden, ist $h.DQ = QM^2$, wo h der Parameter zu dem Durchmesser ist. Es wird nämlich in der Gleichung für die Ellipse $m = 0$, das ist, der conjugirte Durchmesser wird zwar unendlich groß, wie der Durchmesser $2f$, aber gegen diesen unendlich klein, so doch daß der Parameter $2m^2 f$ endlich ist. Dieser werde durch h bezeichnet. Die allgemeine Gleichung für die Parabel ist daher,

Digitized by Google

$$yy - \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}x^2 - 2by$$
$$+\left(\frac{2bb}{a} - \frac{ch}{a}\right)x + bb + dh = 0.$$

Hier ist $B^2 = 4AC$. Auch erhält d nur einen einfachen Werth.

35. Die Linie, welcher sich die Parabel immer mehr nähert, ist eine andere Parabel, deren Gleichung ist $z^2 - \frac{2b}{a}xz + \frac{bb}{aa}x^2 - \frac{ch}{a}x = 0$. Für diese ist $z = \frac{bx}{a} \pm \sqrt{\frac{ch}{a}x}$. Eben dieses ist der Werth von y, wenn in dem Werthe dieser Größen die endlichen Größen gegen die unendlich großen weggelassen werden. Zu vergleichen die Bemerkung in (3.). Ohne das Glied, $\sqrt{\frac{ch}{a}x}$, unterschiede sich die Ordinate zu der Asymptote der Parabel nicht von der für eine Hyperbel.

36. Für die alten Geometer war es eine wichtige Aufgabe, den geometrischen Ort zu drey oder vier geraden Linien zu finden. Pappus giebt in der Vorrede zu dem siebenten Buche seiner mathematischen Sammlung folgende Nachricht derselben. Es sind drey gerade Linien der Lage nach gegeben, an welche von einem (noch unbestimmten) Puncte drey gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden; das Verhältniß des Rechtecks zweyer dieser letztern zu dem Quadrate der dritten unter ihnen ist gegeben: so liegt der gedachte Punct auf einem der drey Kegelschnitte. Wenn aber vier gerade Linien der Lage nach gegeben sind, und an dieselben von einem Puncte gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, so daß das Verhältniß des Rechtecks von zweyen derselben zu dem Rechteck von den beiden andern ein gegebenes sey, dann liegt gleichfalls der Punct auf einem Kegelschnitte.

Digitized by Google

Euklides hat sich schon mit dieser Aufgabe beschäftigt. Nun sagt zwar Apollonius in der Vorrede zu seinem großen Werk über die Kegelschnitte, daß Euklides sie weder vollständig noch glücklich aufgelöset habe, weil dieses ohne die von ihm selbst erfundenen Sätze nicht möglich gewesen sey. Allein Pappus tadelt ihn wegen dieser Herabsetzung eines so würdigen Geometers, als Euklides war, den er als einen sehr sanften, nicht ruhmredigen, sondern jedes auch geringe Verdienst um die Mathematik gütig schätzenden Mann schildert. Pappus führt ferner an, daß für mehr als vier gegebene gerade Linien der Ort des Punctes nicht bekannt, sondern nur eine so genannte Linie (d. i. eine Curve, die kein Kegelschnitt ist) sey. Bey fünf oder sechs geraden Linien ist das Verhältniß der Parallelepipeden gegeben, welche von den veränderlichen, aus jedem Puncte der Curve unter gegebenen Winkeln an die geraden Linien gezogenen, geraden gebildet werden. Bey mehr als sechs erinnert er, daß man statt der geometrischen Größen, der Rechtecke und Parallelepipeden zusammengesetzte Verhältnisse gebrauchen müsse, da es keine Größen von vier Dimensionen gebe.

Descartes fängt seine Geometrie mit dieser Aufgabe, allgemein genommen, an, um von da auszugehen, wo die Alten stehen geblieben waren. Wir wollen hier nur die Aufgabe, für vier gegebene gerade Linien auflösen, woraus es genugsam erhellen wird, wie sie für mehrere behandelt werden könne.

37. Es sind AA, BB, CC, DD (Fig. 55.) vier der Lage nach gegebene gerade Linien, an welche von einem Puncte P die geraden PQ, PR, PS, PT unter gegebenen Winkeln, PQA, PRB, PSC, PTD, gezogen werden sollen. Man verlängere jede der drey letztern bis zu ihrem Durchschnitte mit der ersten AA, mit welcher hier keine der andern parallel seyn soll. Die Durchschnitte nach der Folge der geraden Linien seyn H, I, K. Die gerade AA nehme man zur Abscissenlinie für

Digitized by Google

die Curve, welche der Ort des Punctes P ist, setze den Anfang der Abscissen in H (oder wo man sonst will), und betrachte HQ und QP als Coordinaten an der gesuchten krummen Linie unter dem gegebenen Winkel PQA. Die Ordinate PQ verlängere man bis an die drey andern geraden in b, c, d. Es sind nun in den Dreyecken QbH, QcI, QdK alle Winkel gegeben, daher die Verhältnisse ihrer Seiten. Eben so in den Dreyecken PbR, PcS, PdT. Man setze HI = a; HK = b; HQ = x; QP = y; HQ : Qb = 1 : m; IQ : Qc = 1 : n; KQ : Qd = 1 : p, so ist Qb = mx; Qc = n(a + x); Qd = p(b − x). Ferner sey Pb : PR = 1 : α; Pc : PS = 1 : β; Pd : PT = 1 : γ, so ist

$$PR = \alpha(y + mx).$$
$$PS = \beta(y + nx + na).$$
$$PT = \gamma(y - px + pb).$$

Multiplicirt man eine dieser Linien in y, die andern beiden auch in einander, und setzt das Verhältniß beider Producte einem gegebenen gleich, so entsteht eine Gleichung vom zweyten Grade zwischen x und y. Der Ort des Punctes P ist also ein Kegelschnitt. Diese Eigenschaft der Kegelschnitte ist in der That merkwürdig. — Sind nur drey gerade Linien gegeben, so wird die eine der an sie gezogenen Linien mit einer gegebenen multiplicirt.

Die hier gegebene Auflösung ist die von Descartes, allein die Anordnung und die Bezeichnung, sowohl die für die Größen und Verhältnisse als der Linien in der Figur ist deutlicher.

38. Wenn mehr als vier gerade Linien gegeben sind, so erhalten alle die an sie unter bestimmten Winkeln von einem Puncte, wie P, gezogenen gerade, eben die Form. Daher steigt das Product von dreyen auf den dritten Grad, und der Ort des Punctes ist eine Linie vom dritten Grade, wenn fünf oder sechs gerade Linien gegeben sind.

Digitized by Google

Wenn nur zwey gerade Linien gegeben werden, so ist der Ort eine gerade Linie.

Krumme Linien der zweyten Classe,

oder Linien der dritten Ordnung, sind diejenigen, für welche die Gleichung auf den dritten Grad steigt. Die allgemeine Gleichung ist

$$\begin{aligned} &ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 \\ &+ ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k \end{aligned} = o.$$

Der Winkel der Coordinaten ist willkürlich.

1. Ehe man sich auf die Untersuchung der Gestalt dieser Linien in endlichen Entfernungen von dem Anfange der Abscissen einläßt, ist es nöthig, die verschiedene Gestalt ihrer ins Unendliche fortgesetzten Zweige zu bestimmen, bey welcher wenigere Abänderungen Statt haben. Die Verschiedenheiten derselben werden den Eintheilungsgrund für diese Linien an die Hand geben.

2. Man setze $\frac{y}{x} = q$, so ist

$$aq^3 + bq^2 + cq + d + \frac{eq^2 + fq + g}{x} + \frac{hq + i}{x^2} + \frac{k}{x^3} = o.$$

Für ein unendlich großes x verschwinden alle Glieder, die x im Divisor enthalten, gegen diejenigen, welche davon frey sind, oder gegen den höchsten Theil der Gleichung. Es wird bey dieser Annahme

$$aq^3 + bq^2 + cq + d = o.$$

Diese Gleichung hat entweder nur eine mögliche Wurzel, oder drey mögliche. Wenn alle drey Wurzeln möglich sind, so sind sie alle entweder ungleich, oder zwey derselben sind sich gleich, oder sie sind alle drey einander gleich.

Digitized by Google

Daher enthält die zweyte Classe der krummen Linien vier Gattungen, zufolge der Beschaffenheit der Wurzeln, welche die Gleichung für q hat.

Bey der Untersuchung über die Formen der Gleichungen für diese vier Gattungen wird angenommen, daß das Glied ay^3 in der allgemeinen Gleichung nicht fehle, oder daß a nicht Null sey. Wenn in einer Gleichung für eine Linie dieser Classe y^3 nicht vorhanden wäre, so darf man nur setzen, $x = t + \alpha u$. und $y = \beta u$, um eine Gleichung zu erhalten, worin u^3 sich findet. Dieses ist nur den Coordinatenwinkel ändern.

3. Die Gleichung für q habe die Wurzeln, m, n, p, so ist $aq^3 + bq^2 + cq + d = a(q-m)(q-n) \times (q-p)$, nach Gleichung, 61. Es behält nämlich jene Gleichung dieselben Wurzeln, wenn alle Glieder durch a dividirt werden. Setzt man für q seinen Werth zurück, so ist

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = a(y - nx)(y - mx)(y - px).$$

4. Es ist schon bey den krummen Linien der ersten Classe (32. 35.) bemerkt, daß, wenn gleich für unendlich große x und y ein Gränzwerth von $\frac{y}{x} = m$ ist, doch nicht schlechthin $y - mx = o$ wird. Denn eine geradlinichte Asymptote wird nur durch eine vollständige Gleichung vom ersten Grade, $z = mx + \alpha$, bestimmt, wo nur in besondern Fällen $\alpha = o$ ist. Bey einer Asymptote vom zweyten Grade muß in dem Werthe ihrer Ordinate noch zu dem Gliede, welches x enthält, das Glied $\sqrt{x}$ hinzukommen.

5. Man theile die ganze Gleichung in vier Theile, nach der Anzahl der Dimensionen von den veränderlichen Größen, nämlich $P + Q + R + k = o$, wo P, Q, R nach der Reihe Functionen von drey, zwey, einer Dimensionen sind, und k das unveränderliche Glied ist. Man setze $P = (y - mx)M$. Es ist also

Digitized by Google

$y - mx + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{k}{M} = o$, wo Q und M Functionen von gleich vielen Dimensionen sind. Daher ist der Bruch $\frac{Q}{M}$ eine endliche Größe, wenn für unendlich große x und y die ihnen proportionalen 1 und m gesetzt werden, es müßte denn Q den Factor $y - mx$ enthalten. Die andern beiden Brüche verschwinden aber dadurch, daß der Nenner gegen den Zähler unendlich groß ist. Der Gränzwerth des Bruches $\frac{Q}{M}$ sey α, so ist die Gränzgleichung $z - mx + \alpha = o$, und der Gränzwerth von P ist $-\alpha M$, wo M eine Function zweyer Dimensionen von x und y ist. Dieser Gränzwerth kann sich mit dem zweyten Gliede Q heben, weil sie beide gleich viele Dimensionen enthalten. Da dieses bey dem Verhältnisse $1 : m$ für $x : y$ geschieht, so hat die Function $-\alpha M + Q$ den Factor $y - mx$. Es sey also $-\alpha M + Q = (y - mx) N$, so ist im Unendlichen $(y - mx) N + R = o$, oder $y - mx + \frac{R}{N} = o$. Setzt man in N für x und y die proportionalen $1 : m$, so wird der Bruch $\frac{R}{N}$ eine endliche Größe β. Es ist also die Gränzgleichung, $z - mx + \beta = o$, und die Gränze von $-\alpha M + Q$ ist $-\beta N$. Auf gleiche Weise ist im Unendlichen $-\beta N + R + k = o$. Da die beiden ersten Glieder sich mit k, einer unveränderlichen Größe, heben müssen, so hat $-\beta N + R$ den Factor $y - mx$. Es sey $-\beta N + R = (y - mx) h$, wo h eine unveränderliche Größe ist. Es ist nun die Gränzgleichung, $(z - mx) h + k = o$, oder $z - mx + \frac{k}{h} = o$. Setzt man, zur Gleichförmigkeit mit dem vorhergehenden, $\frac{k}{h} = \gamma$, so ist die Gränzgleichung, $z - mx + \gamma = o$.

Digitized by Google

6. Da diese neue Darstellung der Beschaffenheit einer Gleichung vom dritten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen, wenn sie unendlich groß werden, eines Exempels bedürfen möchte, so folgt hier ein solches, worin die Zahlen ganz willkürlich genommen sind.

Es sey $P = (y - 4x)(y - 2x)(y - 3x)$; $Q = 5y^3 - 6xy + 4x^3$; $R = 8y + 2x$; $k = 10$. Ferner sey $y - mx = y - 4x$, und $M = (y - 2x) \times (y - 3x) = y^2 - 5xy + 6x^2$. Im Unendlichen ist $x : y = 1 : 4$. Der Gränzwerth von $\frac{Q}{M}$ ist daher $= + 30 = \alpha$. Es ist also bey jenem Verhältnisse, $y - mx + 30 = 0$, und P verwandelt sich in $- 30M$, oder in $- 30(yy - 5xy + 6xx)$, das ist, es wird nicht absolut Null, sondern um eine Dimension herabgesetzt. Ferner ist nun $- 30M + Q = - 25yy + 144xy - 176xx = - (y - 4x)(25y - 44x)$, und daher $N = - (25y - 44x)$. Im Unendlichen ist

$$- (y - 4x)(25y - 44x) + 8y + 2x = 0,$$

oder $$y - 4x - \frac{8y + 2x}{25y - 44x} = 0,$$

das ist $y - 4x - \frac{17}{28} = 0$, und $\beta = - \frac{17}{28}$. Daher ist die Gränze von $- 30M + Q = - \frac{17}{28}(25y - 44x)$. Auch hier wird die Function, $- 30M + Q$, nicht absolut Null, sondern auf eine Function von einer Dimension herabgesetzt. Ferner ist

$$- 30M + Q + R \text{ oder } - \beta N + R = - \frac{17}{28} \times (25y - 44x) + 8y + 2x = \frac{- 201y + 804x}{28} = - \frac{201}{28}(y - 4x).$$

Dazu das beständige Glied, + 10,

Digitized by Google

genommen, wird $-\frac{201}{28}(y-4x)+10=0$, oder $y-4x-\frac{280}{201}=0$, und $y=\frac{280}{201}$. So ist im Unendlichen $-\beta N+R=-10$, und der Rest bey den Herabsetzungen jedes Theils wird zuletzt mit dem gegebenen Gliede zusammen genommen $=0$.

7. Es heben sich auch im Unendlichen alle Theile der Gleichung, P, Q, R, k, gegen einander auf. Denn sonst müßten die Coefficienten in jedem Theile eine besondere Relation gegen einander haben, wenn jeder Theil für sich Null werden sollte.

8. Die Gleichung für q, bey einer unendlichen Abscisse x, habe nur eine mögliche Wurzel, m, so haben die beiden unmöglichen die Form, $A\pm B\sqrt{-1}$, nach Gleichung, 66, und es ist der höchste Theil der Gleichung $=a(y-mx)(yy-2Axy+(A^2+B^2)xx)$. Hier ist also $M=a(yy-2Axy+(A^2+B^2)xx)$, und $Q=eyy+fxy+gxx$. Daher ist im Unendlichen $\frac{Q}{M}=\frac{em^2+fm+g}{a(m^2-2Am+A^2+B^2)}$, und die Gränzgleichung ist $z-mx+\frac{Q}{M}=0$. Die gerade Linie, welche durch diese Gleichung bestimmt wird, ist die Asymptote der Curve.

9. Die Gleichung für q habe drey mögliche Wurzeln, m, n, p. Man setze $a(y-nx)(y-px)=M$, und $eyy+fxy+gxx=Q$, so ist, wie vorher, im Unendlichen, $\frac{Q}{M}=\frac{em^2+fm+g}{a(m-n)(m-p)}$, und die Gränzgleichung ist $z-mx+\frac{Q}{M}=0$. Diese gehört für eine Asymptote der Curve. Die Gleichungen

Digitized by Google

für die beiden andern Asymptoten findet man auf gleiche Art, wenn man den Factor $y - mx$ mit $y - nx$ oder mit $y - px$ vertauscht. Es ist nämlich zweytens, $\frac{Q}{M} = \frac{en^2 + fn + g}{a(n-m)(n-p)}$, und $z - nx + \frac{Q}{M} = 0$; drittens, $\frac{Q}{M} = \frac{ep^2 + fp + g}{a(p-n)(p-m)}$, und $z - px + \frac{Q}{M} = 0$.

16. Die Gleichung für ein System dreyer geraden Linien, deren Gleichungen sind, I. $z - mx + \alpha = 0$; II. $z - nx + \beta = 0$; III. $z - px + \gamma = 0$; worin die z drey veränderliche Grösen bedeuten, ist das Product dieser drey Gleichungen. In diesem ist der Theil, welcher die Glieder von drey Dimensionen enthält, dem gleichnamigen in der Gleichung für den Fall in (9.) völlig gleich, wenn daselbst $a = 1$ gesetzt, und z mit y vertauscht wird. Man nenne diesen Theil P, und das Product zweyer Factoren, als $(z - nx)(z - px) = M$, so daß $P = (z - mx)M$ ist. Ferner sey der zweyte Theil von zwey Dimensionen $= Q$, so ist $\frac{Q}{M} = \alpha$, wenn in den Functionen Q und M statt z gesetzt wird mx; und eben so entweder β oder γ, wenn m mit n oder mit p vertauscht wird. Es seyn jene drey gerade Linien die Asymptoten der Curve in (9.), so sind die drey durch die Substitution von mx statt y oder z erhaltenen Werthe von $\frac{Q}{M}$, für das System von den drey geraden und für die Curve dieselben. Da zugleich die Werthe von M dieselben sind, so sind es auch die von Q, und daher auch die von Q selbst als einer Function von y und x. Daher kommt die Gleichung für das System der drey geraden mit der für die Curve in den ersten beiden Theilen von drey und zwey Dimensionen überein. Die Zweige der Curve nä-

Digitized by Google

hern sich daher den Asymptoten sehr bald und stark, da der Theil von einer Dimension und das unveränderliche Glied im Allgemeinen gegen die beiden ersten höhern Theile bald sehr klein werden.

11. Der höchste Theil der Gleichung zwischen x und y habe zwey gleiche und einfache Factoren, oder er sey $= a(y - mx)^2 (y - nx)$, so nähert sich die Curve je weiter je mehr einem System einer geraden Linie und einer Parabel. Denn die allgemeine Gleichung für eine Parabel ist (Krumme Linien der zweyten Classe, 32.)

$$zz - 2mzx + m^2xx - Az + Bx + C = 0.$$

Die Gleichung für eine gerade Linie ist $z - nx + \alpha = 0$. Die Gleichung für das System beider Linien ist das Product beider Gleichungen. Die Coefficienten der höchsten Glieder sind darin dieselben wie in der Gleichung für die Curve, wenn man den Coefficienten a zur Einheit nimmt, oder die durch a dividirten Coefficienten mit denselben Symbolen wie vorher bezeichnet. Die Größen m und n sind durch die Factoren des höchsten Theils in der Gleichung für die Curve gegeben. Die übrigen Größen, α, A, B, C, werden durch die Vergleichung der Coefficienten in den Gleichungen für y und z bestimmt. Die Coefficienten von yy, xy und xx sind, e, f, g; die von zz, xz, xx, sind nach der Ordnung,

I. $\alpha - A$; II. $nA + B - 2m\alpha$; III. $m^2\alpha - nB$; welche nach der Folge den Coefficienten e, f, g gleich zu setzen sind. Es folgt hieraus

$$\alpha = \frac{n^2e + nf + g}{(n - m)^2}.$$

Dieses ist derselbe Werth, welcher nach dem Verfahren in (9.) erhalten wird, wenn man in dem dritten Werthe von $\frac{Q}{M}$ daselbst, $n = m$ setzt, und dann p mit n vertauscht.

Die Coefficienten A, B ergeben sich nun aus zweyen der angenommenen Gleichungen leicht. Für den Coefficienten

Digitized by Google

C sind zwey Bestimmungen möglich. So fern die Parabel als Asymptote betrachtet wird, ist das unveränderliche Glied in ihrer Gleichung gleichgültig. Setzt man $C = \frac{B\alpha}{n}$, so hat das Glied, worin x ist, in beiden Gleichungen denselben Coefficienten; nimmt man $C = A\alpha$, so geschieht dieses bey dem Gliede mit z oder y.

12. Ist $m = 0$, so kann die Gleichung sich auch der für ein System von drey geraden Linien nähern, deren zwey der Axe parallel sind. Diese Gleichung ist $(z - nx + \alpha)(z - b)(z - c) = 0$, wovon die höchsten Glieder sind $z^3 - nxz^2$.

13. Wenn die Gleichung $q^3 + bq^2 + cq + d = 0$, zwey gleiche Wurzeln hat, so ist eine gewisse Relation zwischen den Coefficienten, b, c, d, vorhanden, welche in dem Art. Gleichung, 190. angegeben ist.

14. Hat die Gleichung, $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$, zwey gleiche Wurzeln, m m, so ist m auch eine Wurzel der Gleichung, $3aq^2 + 2bq + c = 0$, (Gleichung, 182.). Nämlich, was von der durch a dividirten Gleichung gilt, gilt auch von jener selbst. Es ist also

I. $am^3 + bm^2 + cm + d = 0$.

II. $3am^2 + 2bm + c = 0$.

In der letztern Gleichung gehört nur ein Werth von m der Curve zu.

15. Ist der höchste Theil der Gleichung ein Product von drey gleichen Factoren, so ist die Asymptote weder eine gerade Linie, noch ein Kegelschnitt, sondern eine einfachere Linie vom dritten Grade. In einem besondern Falle ist sie eine Parabel.

In diesem Falle ist $b = -3am$; $c = 3am^2$; $d = -am^3$. Daher ist

Digitized by Google

I. $am^3 + bm^2 + cm + d = o$,

II. $3am^2 + 2bm + c = o$,

III. $2.3am + 2b = o$.

Die Gleichung III. folgt zugleich daher, daß II. zwey gleiche Wurzeln hat.

Vereinfachung der Gleichungen für die zweyte Classe.

16. Nun ist zu suchen, wie den Gleichungen für jede Gattung die einfachste Form mit Erhaltung der Allgemeinheit gegeben werden möge. Zuerst verlege man die Abscissenlinie auf die gerade Linie, deren Gleichung ist $z = mx$, wenn m die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$ ist. Die Axe der Ordinaten, nebst dem Anfangspuncte der Abscissen werde beybehalten. Es bleibt also alles in der Gleichung unbestimmt bis auf die Lage der Abscissenlinie, die durch den Factor $y - mx$ in dem höchsten Theile bestimmt wird. Es sey in Fig. 56. AX die Abscissenlinie, A der Anfangspunct, $AP = x$ auf der Axe der Abscissen AX, $PM = y$ die Ordinate an den Punct M der Curve. Auf dieser nehme man $PN = mx$, ziehe die gerade ANT, und nehme diese zur Abscissenlinie. Die neuen Coordinaten seyn $AN = t$; $NM = u$. Auch sey $AN = \mu x$. Nun ist $x = \frac{1}{\mu} t$, und $y = u + \frac{m}{\mu} t$. Diese Werthe sind in die Gleichung zwischen x und y zu setzen.

17. Es ist $\frac{y}{x} = m + \frac{\mu u}{t}$. Wird hier unter m der einzige Gränzquotient, welcher dem $\frac{PN}{AP}$ gleich ist, verstanden, so verschwindet gegen unendliche t (oder AN) die zugehörige u (oder NM), das ist, es ist ent-

Digitized by Google

weder $u = o$, oder eine endliche Größe, oder es ist zwar u unendlich groß, aber gegen t unvergleichbar klein. In dem ersten Falle ist AT die Asymptote; in dem andern ist AT derselben parallel; in dem dritten Falle hat die Curve keine gerade Asymptote für den Zweig, an welchem das Gränzverhältniß $x : y = 1 : m$ ist.

Übrigens kann das Gränzverhältniß von $t : u$ noch zwey endliche Werthe oder einen solchen haben, wenn außer dem $1 : m$ für $x : y$ dergleichen Statt finden.

18. Der höchste Theil der Gleichung zwischen x und y habe nur einen möglichen Factor, $y - mx$. In diesem Falle hat die Gleichung für die Gränze m des Quotienten q, nämlich $am^5 + bm^4 + cm + d = o$, nur eine mögliche Wurzel, und es ist auch nur diese einzige Relation von m gegen die gegebene Größe vorhanden. Setzt man für x und y ihre Werthe durch t und u, so wird der Coefficient von $t^5 = \frac{1}{\mu^5}(am^5 + bm^4 + cm + d)$. Es fällt also das Glied, welches t^5 enthält, weg, und es ist für die erste Gattung die allgemeine Gleichung, wenn die Abscissen auf der in (16.) bestimmten AT genommen werden,

$$Au^5 + Btu^4 + Ct^2u + Du^3 + Etu + Ft^2 + Gu + Ht + K = o.$$

Für ein unendliches t hat der Quotient $\frac{u}{t}$ nur einen Werth, weil die Gränze von $\frac{y}{x}$ nur einen einzigen Werth hat. Jener ist $= o$, weil die Gränzgleichung für $\frac{u}{t}$ diesen Quotienten selbst zum Factor hat. Es ist also u entweder $= o$, oder eine endliche Größe (4.). Jenes kann nicht Statt finden, weil das Glied Ft^2 sich gegen keines aufheben könnte. Es ist also u endlich, und der Werth

Digitized by Google

desselben $= -\frac{F}{C}$, aus den beiden Gliedern, Ct^2u, $+Ft^3$, welche allein sich im Unendlichen heben können. Eben dieses folgt aus der Gränzgleichung $y = mx + \frac{Q}{M}$ in (8.), wenn die gehörigen Vertauschungen gemacht werden, das ist, wenn statt x, y, m, g und a $(A^2 + B^2)$ gesetzt werden t, u, o, F, C.

19. Der höchste Theil der Gleichung zwischen x und y habe drey mögliche ungleiche Factoren, so wird durch jeden derselben eben eine solche Gleichung zwischen t und u wie in (18.) erhalten. Nur hat die Gränze des Quotienten $\frac{u}{t}$ neben dem Werthe o noch zwey endliche, welche von den beiden andern Factoren entstehen. Der endliche Werth von u für unendliche t ist ebenfalls $= -\frac{F}{C}$.

20. Der höchste Theil der Gleichung zwischen x und y habe zwey gleiche Factoren, jeden $= y - mx$. Daher sind hier (14.) zwey Gleichungen für den Gränzquotienten m, der zweymahl vorhanden ist, nämlich

$$\text{I. } am^3 + bm^2 + cm + d = o.$$
$$\text{II } 3am^2 + 2bm + c = o.$$

Man setze in die allgemeine Gleichung für x und y ihre Werthe, $\frac{1}{\mu}t$ und $v = u + \frac{m}{\mu}t$. Der Coefficient von t^2u ist $= \frac{1}{\mu^2}(3am^2 + 2bm + c) = o$. Für die Linien der dritten Gattung ist also die Gleichung,

$$Au^3 + Btu^2 + Cu^2 + Dtu + Ev^2 + Fu + Gt + H = o.$$

Digitized by Google

Die eine Gränze des Verhältnisses $t : u$ ist $= A : -B$; die andere ist $t : u^2 = B : -E$, bey welcher u zwar unendlich groß, aber nicht mit t vergleichbar ist.

21. Der höchste Theil der Gleichung zwischen x und y habe drey gleiche Factoren, jeden $= y - mx$. Hier finden drey Gleichungen für m, oder dreyerley Relationen gegen die gegebenen Coefficienten Statt (15.). Dadurch werden die Coefficienten von tu^2, t^2u und t^3 Null, und es ist für die Linien der vierten Gattung die allgemeine Gleichung, in Beziehung auf die nach (16.) bestimmte Abscissenlinie AT,

$$Au^3 + Bu^2 + Ctu + Dt^2 + Eu + Ft + G = o.$$

Die Asymptote ist eine Curve, deren Gleichung ist $Au^3 + Dt^2 = o$. Ist $D = o$, so ist die Gränzgleichung $Au^3 + Ctu = o$, oder $Au^2 + Ct = o$. Ist zugleich $C = o$, so bleibt $Au^3 + Ft = o$ zur Gleichung für die Asymptote.

22. Man ziehe (Fig. 56.) mit der Abscissenlinie AT die parallele BV als neue Abscissenlinie, worauf der Anfang der Abscissen in C sey. Die Ordinate MN an die erstere werde (in dem Falle der Figur) bis an BV in Q verlängert. Durch eine schickliche Bestimmung des Abstandes NQ und der Lage des Punctes C, lassen sich die gefundenen Gleichungen noch einfacher machen.

23. Es sey AB parallel mit der Axe der Ordinaten oder mit QM, und $AB = a$; $BC = b$, wo a und b andere Bedeutungen haben als anfangs. Ferner sey $CQ = v$, und $QM = w$. Es ist also $u = w - a$; $t = v + b$. Diese Werthe setze man in die Gleichung für die beiden ersten Gattungen (18, 19.), und bestimme a nebst b so, daß die Coefficienten von v^2 und vw Null seyn. Die Glieder, welche v^2 und vw geben, sind

$$B(v + b)(w - a)^2 + C(v + b)^2(w - a) + E(v + b)(w - a) + F(v + b)^2.$$

Digitized by Google

28. Durch dasselbe Verfahren erhält die eine oder die andere Gleichung in (25.) die Form,

$$y^3 + ax^2 + by + c = 0.$$

Ist a daselbst $= 0$, so verwandelt sich die Gleichung in diese:

$$y^3 + bxy + cx + d = 0.$$

29. Es sind also die einfachsten und doch allgemeinen Formen der Gleichungen für die vier Gattungen der Linien der dritten Ordnung folgende:

I. $y(y^2 + \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$

II. $y(y^2 - \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$

III. $xy^2 + ax^2 + by + cx + d = 0.$

IV. $y^3 + ax^2 + by + c = 0.$

und, wenn das Glied x^2 fehlt,

$$y^3 + axy + bx + c = 0.$$

Nur die Lage der Axen der Coordinaten ist bestimmt, welches etwas willkürliches ist.

Gestalten der krummen Linien von der zweyten Classe.

30. Wenn für eine stetige Folge von Abscissen x alle drey Werthe der zugehörigen Ordinaten y mögliche sind, so entstehen dadurch drey Fortschreitungen der y, also drey Zweige einer krummen Linie von der zweyten Classe. Gehören zu einem Werthe von $x = h$ zwey gleiche y, so schneiden sich zwey Zweige der Curve an dem Endpuncte der gemeinschaftlichen Ordinaten, oder es schließen sich daselbst zwey Bogen der Curve unter einer gemeinschaftlichen berührenden an einander. In dem erstern Falle bleiben zwey stetige Fortschreitungen der y, davon die eine zunimmt, da die andere abnimmt; in dem andern Falle hört jede der beiden Fortschreitungen auf, indem sie sich an einander schließen. Auf der einen oder auf der andern Seite

Digitized by Google

der gemeinschaftlichen Ordinate sind in dem letztern Falle keine Ordinaten vorhanden, solche nämlich, die zu einer der beiden stetigen Fortschreitungen gehörten. Geschieht das letztere für zwey verschiedene Werthe von x, so entsteht daher ein ganz abgesonderter Theil der Curve. Alles dieses und die Beschaffenheit der unendlich fortlaufenden Zweige werden die folgenden Untersuchungen deutlich machen.

31. Da die Wurzel einer cubischen Gleichung durch die cardanische Formel nur auf eine bedingte Art, und nicht bequem dargestellt wird, so ist aus der allgemeinen Gleichung zwischen x und y die dritte Potenz von x weggeschafft worden. Dadurch sind für jedes y nur zwey Werthe von x vorhanden, und es läßt sich x allgemein und bequem genug durch y darstellen. Wir wollen nun die durch x bezeichnete veränderliche Größe als Ordinate, und y als Abscisse betrachten, zu welcher der zugehörige Werth jener gesucht werde.

Erste Gattung.

32. Für die erste Gattung ist die Gleichung, $y(y^2 + \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0$, gefunden. Man dividire die Gleichung durch α^2, um x^2 von dem Coefficienten zu befreyen, setze $\frac{1}{\alpha\alpha} = pp$, und gebrauche für die übrigen Coefficienten die Bezeichnungen, $-a$, $-b$, $-2c$, $-d$, da die Zeichen etwas willkürliches sind. So ist

$$y(p^2y^2 + x^2) - ay^2 - by - 2cx - d = 0.$$

Daraus ist (Gleichung, 33. 34.)

$$x = \frac{c}{y} \pm \frac{\sqrt{(c^2 + dy + by^2 + ay^3 - p^2y^4)}}{y}.$$

Wenn der Werth der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe negativ ist, so sind keine Werthe von x möglich.

Digitized by Google

Dd, Ee. Über B und E hinaus sind keine mit AX parallele Ordinaten möglich, auch nicht zwischen C und D. Daher ist zwischen Bb und Cc eine von der übrigen Curve ganz abgesonderte Ovale oder rundliche Figur enthalten. In b und c begegnen sich die beiden Fortschreitungen der x, da hier der Werth der Function Y Null ist. In D und E sind Dd und Ee die äußersten Ordinaten der ins Unendliche sich erstreckenden Curve. Sie sind zwey Fortschreitungen gemeinschaftlich. Die eine derselben geht von Dd an durch AX, wo die Ordinate unendlich ist, und von dem Unendlichen auf der entgegengesetzten Seite (von $-X'$ her) bis an Ee; die andere von Dd durch AF, wo die Ordinate $x = -\frac{d}{2c}$ ist, bis an dieselbe Ee. Für den Fall der Figur ist d oder c negativ.

37. Wenn die beiden größten Wurzeln AB, AC der Gleichung Y sich gleich sind, so geht die Ovale bc in einen einzelnen, aber zur Curve gehörigen Punct, punctum conjugatum, über.

38. Wenn die beiden mittlern Wurzeln AC, AD (Fig. 59.) sich gleich sind, so schließt sich die Ovale an die übrige Curve. Es entsteht ein Knoten. Die beiden Zweige bdXX'e und bce schneiden sich in dem Doppelpuncte cd. Es wird hier sowohl an dem einem Zweige als an dem andern $x = \frac{c}{y}$ oder $\frac{c}{AC}$.

39. Wenn die drey Wurzeln AB, AC, AD alle drey gleich sind, so zieht der Knoten sich in einen Punct, eine Spitze, zusammen (Fig. 60.), wo ein Rückkehrpunct ist. So lange noch ein Knoten, wie in Fig. 59. vorhanden ist, machen die beiden Zweige ech, Xdb in ihrem Durchschnittspuncte einen Winkel, nach der Richtung ihrer berührenden, mit einander. Ver-

Digitized by Google

schwindet der Knoten, so können die beiden Zweige sich nicht unter einem endlichen Winkel schneiden, weil dabey die Curve nicht eine stetige Linie bliebe, da die Lage der Theile an dem Durchschnittspuncte sich plötzlich änderte. Die beiden Zweige müssen vielmehr hier eine gemeinschaftliche berührende haben. Auch müssen sie einer auf dieser, der andere auf jener Seite der berührenden liegen. Denn bey einem Knoten (Fig. 59.) ist der eine Bogen gegen die Axe AY hohl, der andere erhaben. Diese Lage bleibt, so klein der Knoten auch werden mag, also auch indem er in eine Spitze übergeht. In dem Artikel, Rückkehrpunct, wird dieses genauer gezeigt werden.

Die Spitze ist hier ein dreyfacher Punct, indem hier die drey Puncte, b, c, d, in (Fig. 58.) sich in einen einzigen vereinigt haben.

40. Die Gleichung Y habe nur zwey mögliche Wurzeln, α, β, deren eine, wegen des Gliedes $-c^2$, negativ ist. (Gleichung, 174.) Daher kann weder eine Ovale, noch conjugirter Punct, noch Knoten, noch Spitze Statt haben, sondern die krumme Linie besteht bloß aus einem einzigen zusammenhängenden Zweige in Beziehung auf die Axe AX, oder aus dreyen, aber zusammenhängenden, wenn der Bogen eFd eine größte und kleinste Ordinate x zu zwey Abscissen y hat.

41. Wenn $c = 0$, oder wenn das Glied mit x fehlt, so ist die Axe der y ein Durchmesser, der alle mit der Axe der x parallelen halbirt, indem alsdann für jedes y zwey gleiche und entgegengesetzte x vorhanden sind.

42. Die Cissoide der Alten ist eine Linie der dritten Ordnung, oder eine Curve der zweyten Classe, die zu der ersten Gattung gehört. Die für sie in dem Art. Cissoide (Th. I. S. 434.) gefundene Gleichung ist $x^3 = (a-x)y^2$, wo die Ordinaten y mit der Asymptote parallel laufen, also das sind, was hier die Abscissen x. Der Anfang der Abscissen ist dort in der Spitze genommen.

Digitized by Google

Die erste Gleichung ist für eine gerade Linie, die in die Abscissenlinie selbst fällt, die beiden andern sind für zwey gerade, deren Coordinaten x und z sind. Die daraus gebildete Gleichung ist für das System aller drey. Soll dieses System sich der Curve immer mehr nähern, je grösser die Abscisse x genommen wird, und für ein unendliches x mit ihr zusammentreffen, so müssen nicht allein die Glieder, welche drey Dimensionen der veränderlichen Grössen enthalten, sondern auch die mit zwey Dimensionen in den Gleichungen für das System und für die Curve übereinstimmen; auch muß zugleich der Ordinatenwinkel derselbe seyn. Es ist also $(\alpha+\beta)\,p=a$, und $\alpha-\beta=o$, oder $\alpha=\beta$. Daher $\alpha=\frac{a}{2p}$, und die Gleichungen für die beiden Asymptoten außer der Abscissenlinie sind,

$$pz-x+\frac{a}{2p}=o;\quad pz+x+\frac{a}{2p}=o.$$

Die Ordinaten z nähern sich denen an der Curve mehr und mehr.

46. Man nehme auf der Abscissenlinie AX (Fig. 61.) von dem Anfange der Abscissen A an, $AB=\frac{a}{2p}$; $AC=-\frac{a}{2p}$; und auf der Axe der Ordinaten AY die $AD=\frac{-a}{2pp}$, wenn a negativ ist, sonst nach entgegengesetzter Richtung; ziehe BD und CD, so sind deren Verlängerungen MM', NN' die beiden andern Asymptoten der Curve, außer der XX'. An diesen dreyen können die Zweige der Curve auf mancherley Arten hinlaufen. Sie können innerhalb des Winkels je zweyer liegen, ohne sie zu schneiden, auf gleiche Art wie die Hyperbeln am Kegel, oder sie können den Winkel ganz in sich einschließen, oder sie können in einer endlichen von dem Scheitel

Digitized by Google

des Winkels den einen Schenkel, oder auch beide schneiden. Der Asymptotenwinkel, in oder an, oder um welchem sie liegen, kann der innere Winkel des Dreyecks seyn, welches die Asymptoten bilden, oder dessen Scheitelwinkel, oder dessen äußerer Nebenwinkel. Es können auch zwey Schenkel an derselben Asymptote nach entgegengesetzten Enden hinlaufen, indem die andern beiden Paare in den Scheitelwinkeln der beiden andern Asymptoten liegen. Die beiden Schenkel, die zu derselben Asymptote gehören, können sich ihr an entgegengesetzten Seiten nähern, oder an derselben Seite. Die drey Paare der Schenkel der Curve können ganz von einander gesondert seyn, oder es kann sich ein Schenkel des einen Paares mit dem eines der beiden andern schneiden. Die drey Asymptoten können sich in einem gemeinschaftlichen Puncte begegnen. Newton hat aus allen diesen Abänderungen zwey und dreyßig Arten (Species) gemacht, wozu Stirling in seinem Commentar noch vier gefügt hat.

47. Nachdem die drey Asymptoten gezogen sind, nehme man auf der nach beiden Seiten hin verlängerten AD die Wurzeln der Gleichung Y ihren Vorzeichen gemäß. Diese Wurzeln seyn alle positiv und ungleich, nämlich AE, AF, AG, AH (Fig. 61.). Durch E, F, G, H ziehe man mit AX die parallelen Ee, Ff, Gg, Hh. Auf diesen nehme man die zu jenen Werthen von y gehörigen Werthe von x aus (43.). Diese sind die einfachen, $\frac{c}{y}$, weil die Größe unter dem Wurzelzeichen Null ist, da für y eine Wurzel der Gleichung $Y = o$ gesetzt worden. Die Ee, Ff, Gg, Hh berühren also die Curve. Zwischen den Ordinaten Ee, Ff, so wie zwischen Gg und Hh giebt es keine mögliche. Jenseits Hh, so wie diesseits Ee sind für jedes y zwey x vorhanden. In diesem Falle ist über dem Theile FG der Abscisse y eine Oval e. Übrigens hat die Curve sechs hyperbelartige Zweige. Der eine PeX liegt, wegen der positiven Wurzel AE über AX nach der Gegend der positiven y bis an

Digitized by Google

die äußerste Ordinate E e. Der andere mit jenem zusammenhängende Zweig P M' erstreckt sich längs der Asymptote B M', die er in der Figur schneidet, welches in andern Fällen nicht geschehen mag. Der zweyte hyperbelartige Theil X' Q N' geht nicht über die Abscissenlinie nach der Gegend der positiven y hinaus, weil für jedes y nur zwey x möglich sind, und nach der Gegend der positiven x schon von A bis E zwey Ordinaten x sich finden. Die Asymptote C N' mag von der Curve geschnitten werden oder nicht. Der dritte hyperbelartige Theil M R N liegt neben den beiden Asymptoten D M, D N, auf die gezeichnete Art, bey der angenommenen Lage der ersten beiden Paare Zweige. Denn eine Parallele mit der Asymptote M M' schneidet die Curve nur in zwey Puncten.

48. Wenn die beiden mittlern Wurzeln A F, A G der Gleichung $Y = o$ gleich sind, so fällt die Ovale in einen conjugirten Punct zusammen. Sind die Wurzeln A E, A F gleich, so hängt sich die Ovale an den hyperbelartigen Theil, der an den Asymptoten B X, B M' liegt. Sind die drey Wurzeln A E, A F, A G gleich, so entsteht eine Spitze an jenem Theile. Sind zwey Wurzeln unmöglich, und die beyden möglichen, welche wegen des Gliedes $+ cc$ in der Gleichung $Y = o$ einerley Vorzeichen haben, ungleich, so sind die drey hyperbolischen Theile ganz frey, ohne Ovale, Knoten, zugeordneten Punct oder Spitze. Sind zwey Wurzeln, wie A E, A H, möglich, und die beiden andern, auch möglichen, sich gleich, und jenen entgegengesetzt, so schneiden sich zwey hyperbolische Schenkel einander in dem zu den beiden gleichen y gehörigen Puncte. Die eine hyperbolische Linie liegt in dem Winkel B C N', die andere in dem Winkel C B M'. Sind zwey Wurzeln unmöglich, und zwey mögliche sich gleich, so ist auch ein solcher Durchschnitt vorhanden.

49. Sind endlich alle vier Wurzeln der Gleichung $Y = o$ unmöglich, oder sind unter vier möglichen zwey

Digitized by Google

und zwey sich entgegengesetzt, so sind nur zwey hyperbelförmige Theile da, und der übrige Theil der Curve schlingt sich an der einen Asymptote auf entgegengesetzten Seiten herum, auf die Art, wie in Fig. 58. der neben der Abscissenlinie AX hinlaufende Theil der Curve.

50. In der Gleichung für diese zweyte Gattung (43.) sey $c=0$, so sind für jedes y zwey gleiche x, und die Axe der y ist ein Durchmesser der Curve in eigentlichem Verstande. Übrigens sind hier eben solche Abänderungen der Figur möglich als vorher angezeigt worden sind. In dem Falle, daß zwey Schenkel desselben hyperbolischen Theils eine gemeinschaftliche Asymptote haben, liegen diese auf derselben Seite, nach Art des einen Theils einer Conchoide, daher Newton diese partielle Figur eine Hyperbola conchoidalis nennt, so wie diejenige, welche sich auf beiden Seiten herum wendet, eine Hyperbola anguinea.

51. Wenn in jeder der drey Gleichungen, worin eine der drey Asymptoten als Axe der Abscissen x genommen ist, das Glied cx fehlt, so ist jede der drey Axen der y ein Durchmesser.

52. Da eine Asymptote eine berührende in einem unendlich entfernten Puncte ist, und in andern berührenden der Berührungspunct zwey Bogen gemein ist, so kann man die an den entgegengesetzten Enden der Asymptoten befindlichen, unendlich entfernten Puncte als einen einzigen betrachten, und solchergestalt alle sechs Schenkel der Curven der zweyten Gattung als zusammenhangend ansehen. Vergl. Hyperbel, 42.

Dritte Gattung.

53. Die Gleichung für die dritte Gattung ist

$$xy^2 - ax^2 - 2by - cx - d = 0,$$

wenn in (29. III.) die Vorzeichen geändert und 2b statt

Digitized by Google

b geschrieben wird. Hier sind für jedes x zwey y möglich oder gar keines; so wie auch jedem y zwey x oder gar keines zugehören. Es ist

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 + dx + cx^2 + ax^3)}}{x}$$

Für $x = o$ ist ein Werth von y unendlich groß, ein Werth $= -\frac{d}{2b}$ wie in (35.) Die Axe der y ist die Asymptote der Curve, an welcher sich auf entgegengesetzten Seiten zwey hyperbolische Schenkel erstrecken. Für unendliche x wird $y = \pm\sqrt{ax}$, wo bey einem negativen a die x auch negativ zu nehmen sind. Die Curve hat also nach der einen Gegend auf der Axe der x zwey parabolische Zweige. Übrigens hängt ihre Figur von der Beschaffenheit der Größe unter dem Wurzelzeichen ab, wie sie sich in Factoren auflösen läßt. Es sey

$$ax^3 + cx^2 + dx + b^2 = X,$$

so hat die Gleichung, $X = o$, entweder drey mögliche Wurzeln oder nur eine. In jenem Falle können zwey einander gleich seyn; auch kommt es noch auf die Beschaffenheit der Wurzeln in Rücksicht ihrer Vorzeichen an.

54. Es sey in Fig. 62. AX die Axe der Abscissen, AY der Ordinaten. An der letztern laufen zwey hyperbolische Zweige PM, QN' hin, und nach der Gegend der Abscissen auf der einen oder der andern Seite die parabolischen Zweige PR, QS. Der eine hyperbolische Zweig schneidet die Axe AY' in dem Abstande $AB = -\frac{d}{2b}$. Die Gleichung $X = o$ habe drey ungleiche gleichnamige Wurzeln. Man trage diese, wenn sie negativ sind, auf AX' nach AC, AD, AE, und errichte hier unter dem bestimmten Ordinatenwinkel die zugehörigen y als Ordinaten, nämlich Cc, Dd, Ee. Die Cc ist eine Gränzordinate an dem Zweige BN'; die andern beiden schließen eine Ovale ein. Die parabolischen Schenkel liegen nach

Digitized by Google

der entgegengesetzten Seite, als jener, wohin die drey Wurzeln fallen. Wie in den beiden ersten Gattungen kann sich hier die Ovale in einen abgesonderten Punct verwandeln, oder sich an den hyperbolischen Zweig durch einen Knoten schließen, oder an demselben in eine Spitze übergehen. Auch kann die Curve ganz frey von allen diesen Beyfügungen seyn. Dieses ist der Fall, wenn die Gleichung, $X = o$, nur eine mögliche Wurzel hat.

55. Wenn zwey Wurzeln dieser Gleichung sich gleich, und der dritten entgegengesetzt sind, so schneiden sich die beiden paraboliſchen Zweige kreuzweise. Der Durchschnitt gehört zu derjenigen Abscisse x, welche zweymal die Wurzel der Gleichung, $X = o$, ist. Sind nur zwey Wurzeln gleichnamig, da die dritte entgegengesetzt ist, so schließen sich die beiden hyperbolischen Zweige an einander, und die paraboliſchen auch, so daß sie durch einen Raum abgesondert sind, in welchem keine Ordinaten Statt haben.

56. Wenn in der Gleichung (53.) das Glied $2by$ fehlt, so sind für jedes x zwey gleiche entgegengesetzte y vorhanden. Die Gleichung ist

$$y = \pm \frac{\sqrt{x(ax^2 + cx + d)}}{x},$$

Hat die Gleichung, $ax^2 + cx + d = o$, keine mögliche Wurzeln, so schließen sich die hyperbolischen Zweige jeder an den benachbarten paraboliſchen, so daß der Anfang der Curve den Umriß einer zierlichen Vase mit ihrem Fuße bildet. Sind zwey Wurzeln möglich und gleich, so verbindet sich jeder hyperbolische Zweig mit dem entgegengesetzten paraboliſchen, so daß hier ein Durchschnitt entsteht. Sind die Wurzeln ungleich, so verbindet sich jede Art von Zweigen unter sich allein, und sind ganz getrennt.

57. Es fehle in (53.) das Glied ax^2, daher die Gleichung ist

$$xy^2 - 2by - cx - d = o,$$

Digitized by Google

$$\text{und } y = \frac{b \pm \sqrt{(cx^2 + dx + b^2)}}{x}.$$

Ist hier c negativ, so ist die Wurzelgröße bloß möglich für die Werthe von $-x$, welche zwischen die beiden Wurzeln der Gleichung, $cx^2 + dx + b^2 = 0$, fallen, oder sie selbst sind. Die Curve besteht bloß aus zwey hyperbolischen zusammenhangenden Zweigen, die an der einzigen Asymptote, welche die Axe der y ist, hinlaufen.

58. Ist c positiv, so hat die Curve sechs hyperbolische Zweige an drey Asymptoten, von welchen zwey der Axe der Abscissen x parallel sind, die dritte die Axe der Ordinaten y ist. Denn für $x = 0$ ist ein Werth von y unendlich groß. Der andere ist $= -\frac{d}{2b}$. Setzt man x unendlich, so ist $y = \pm \sqrt{c}$. Daher sind auf jeder Seite der Abscissenlinie zwey Asymptoten, in dem Abstande $\pm \sqrt{c}$ ihr parallel. Für jedes y ist nur ein Werth von x. Hat die Gleichung, $cx^2 + dx + b^2 = 0$, zwey mögliche Wurzeln, so ist die Wurzelgröße unmöglich, wenn x zwischen diesen Wurzeln liegt. Die Curve hat alsdann eine Gestalt, wie in Fig. 63. Es sind AX und AY die Axen der Coordinaten; BM und CN sind der erstern parallel; AD, AE sind die beiden Wurzeln jener Gleichung; Dd, Ee die zugehörigen Werthe von y. Zwey hyperbolische Zweige erstrecken sich von der Ordinate Ee an nach M und N hin; zwey andere an den Asymptoten BM′ und BY; noch zwey an CN′ und CY′.

Sind aber die Wurzeln jener Gleichung sich gleich oder unmöglich, so erstrecken sich zwey zusammenhangende Zweige in dem ganzen Raume zwischen den beiden Asymptoten, und die beiden andern liegen in dem Winkel MBY, N′CY′.

59. Fehlt mit ax^2 auch $2by$, so ist $y = \pm \frac{\sqrt{(cx^2 + dx)}}{x}$, und es liegt zwischen den bei-

Digitized by Google

den Asymptoten MM′ und NN′ wieder ein gedoppelter Zweig, wie in Fig. 63, nur daß dieser von der Abscissenlinie in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Die andern beiden Paare von Zweigen liegen in den Winkeln M′BY und N′CY′.

60. In der Gleichung (53.) seyn a und c jedes $\gtrless 0$, so daß $xy^2 - 2by - d = 0$ ist. Es ist nun

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(dx + b^2)}}{x}.$$

Hier ist statt der zwey mit der Abscissenlinie parallelen Asymptoten nur jene allein eine solche, daher der zwischen jenen in Fig. 63. enthaltene Doppelzweig wegfällt.

Vierte Gattung.

61. Die allgemeine Gleichung für die vierte Gattung (29.) ist

$$y^2 - ax^2 + by + c = 0,$$

wo die Bezeichnung + a mit − a vertauscht ist. Es ist also

$$x = \pm\sqrt{\frac{y^2 + by + c}{a}}.$$

Die Gleichung, $y^2 + by + c = 0$, habe drey mögliche ungleiche Wurzeln. Man trage auf der Axe der Ordinaten AY (Fig. 64.) von A aus die positiven nach der Richtung AY, die negativen nach AY′, hier eine positive AB, zwey negative AC, AD, und ziehe mit der Axe der Abscissen AX durch B, C, D die parallelen bb, cc, dd, so ist zwischen den beiden bb und cc keine Abscisse (hier Ordinate) x enthalten, weil der Werth der Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist. Zwischen cc und dd liegt eine Ovale, jenseits dd sind keine Ordinaten. Auf der andern Seite von bb hat die Curve eine glockenförmige Gestalt EBE, da die Ordinaten x stärker zunehmen als

Digitized by Google

die Abscissen y. Denn für große x ist nahe $ax^2 = y^3$, also ist $x^2 : y^2 = y : a$.

62. Die Ovale kann sich auch hier in einen Punct, in einen Knoten, in eine Spitze verwandeln. Sind zwey Wurzeln der obigen Gleichung unmöglich, so ist die Figur EBE ganz frey von allen Beyfügungen.

63. In dem Falle, da die Gleichung $y^3 + by + c = 0$, drey gleiche Wurzeln hat, ist bey B eine Spitze vorhanden. Es ist alsdann $ax^2 = (y-p)^3$, wo p die Wurzel jener Gleichung ist. Hier ist AB = p. Setzt man $y - p = z$, so ist $ax^2 = z^3$. Dieses ist die Gleichung für die Neilische Parabel.

64. Wenn das Glied ax^2 fehlt, so ist für diesen Fall die Gleichung der vierten Classe (29.),

$$y^3 + axy + bx + c = 0.$$

Es ist also $x = -\frac{y^3 + c}{ay + b}$.

Hier wird x unendlich, wenn $y = -\frac{b}{a}$. Die Curve hat in der Entfernung $-\frac{b}{a}$ von der Abscissenlinie AX (Fig. 65.) eine dieser parallele Asymptote MN, an deren entgegengesetzten Seiten sich die zwey Schenkel der Curve, CD und EF erstrecken. Für unendliche x hat aber die Curve noch die unendlich großen Ordinaten, $\pm\sqrt{-ax}$, so daß sich die beiden Schenkel CG, EH, einem parabolischen immer mehr nähern. Beide schließen sich an jene hyperbolischen, jeder an einen derselben. Die Figur der ganzen Curve nähert sich einem Dreyzack, und heißt daher auch Tridens. Ist a positiv, so liegen die parabolischen Schenkel nach der Gegend der negativen Abscissen. Descartes hat sich dieser krummen Linie be-

Digitized by Google

dient, um durch sie algebraische Gleichungen vom sechsten Grade aufzulösen. (Geometria, pag. 98.).

65. Eine Art in der vierten Gattung, von welcher ein Bogen für einen Bogen anderer verwickelten Linien gebraucht wird, ist die, deren Gleichung ist

$$ay^3 + by^2 + cy + d = x.$$

Sie gehört zu der Familie der parabolischen Linien, in welcher die Abscisse x aus Potenzen von y allein zusammengesetzt wird. Sie dient zur geometrischen Darstellung der Wurzeln einer cubischen Gleichung, wenn y als Abscisse, und x als Ordinate betrachtet wird, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

Setzt man $y = z - \frac{1}{3}b$, so erhält die Gleichung die Form,

$$z^3 + Az + B = x.$$

Wenn A positiv ist, so hat für jedes x die Ordinate z nur einen möglichen Werth (Gleichung, 69.). Ist A negativ, oder ist die Gleichung, $z^3 - Az + B = x$, so sind drey Werthe für z nur möglich, wenn $4A^3 > 27(x-B)^2$ ist (das. 70.). Die krumme Linie hat in diesem Falle eine Gestalt, wie in Fig. 66. gezeichnet ist.

Eintheilung der Gattungen in Arten.

66. Newton brachte die Linien der dritten Ordnung auch auf vier Gattungen, oder, wie er es nennt, Casus, für welche er folgende vier allgemeine Gleichungen fand.

I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Diese sind von den in (29.) aufgeführten ganz verschieden. Die Arten (Species) bestimmt Newton nach der

Digitized by Google

Gestalt der Curven im endlichen Raume, zugleich mit Rücksicht auf die Asymptoten, und die Beschaffenheit der Zweige im Unendlichen, auch mit Unterscheidung der Fälle, wo ein Durchmesser Statt hat. Manche Arten möchte man als Varietäten ansehen können. Er zählt 72 Arten. Stirling hat in der ersten Gattung noch vier hinzugesetzt, und Gua fand noch zwey. Cramer will zu den vier Arten Newtons von 53 — 56 noch zwey beygefügt haben. Analyse des lignes courbes p. 364. Stirlings Commentar, welcher zu Oxford 1717 herauskam, ist zu Paris bey Düprat 1797 (198, S. 8. g. Kupf.) wieder abgedruckt, zugleich mit Newtons Abhandlung selbst, welche bey jener Ausgabe nicht vorhanden ist.

67. Euler theilt die Linien der dritten Ordnung bloß nach der Beschaffenheit ihrer Zweige im Unendlichen ein. Diese Eintheilung gewährt nicht allein eine viel bequemere Übersicht, sondern ist auch ganz bestimmt, so daß weder mehrere noch wenigere Arten Statt haben können. Euler findet 16 Species. Was in diesem Artikel Gattungen genannt sind, unterscheidet er als Casus. Am Ende erinnert er, daß es besser seyn möchte die Benennung, Genera, zu gebrauchen, und die Abänderungen durch Species zu benamen.

Eulers Methode, die Beschaffenheit der Zweige im Unendlichen zu erforschen, ist etwas weitläuftig, weil er sie aus den noch sehr zusammengesetzten Gleichungen (18 bis 21.) herleitet, wobey er zu dem Coordinatenwinkel einen rechten nimmt. Auf diesen Winkel kommt es hiebey aber nicht an, wie es Euler am Ende selbst bemerkt. Cap. X. §. 259. Die einfachen Gleichungen in (29.) sind hier völlig hinreichend.

68. Zum Gebrauch bey dem Folgenden ist zu bemerken, daß eine Curve, deren Gleichung ist $y = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x^3} + \text{etc.}$ eine hy-

Digitized by Google

perbolische zu nennen ist, wie man eine Curve, deren Gleichung ist $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. eine paraboliſche nennt. Dieſes iſt noch ein Zuſatz zu dem Artikel, Hyperbel höherer Art.

69. Für die erſte Gattung der Linien der dritten Ordnung iſt (29.) die Gleichung,

$$y(y^2 + a^2x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$$

Man gebe ihr die Geſtalt,

$$y + \frac{ayy}{yy + aax} + \frac{by + cx}{yy + aax} + \frac{d}{yy + aax} = 0.$$

Die Gränze des Verhältniſſes $x : y$ iſt $= 1 : 0$, oder die Abſciſſenlinie iſt Aſymptote der Curve.

Man nehme eine krumme Linie, deren Gleichung iſt,

$$z + \text{ } + \frac{c}{aax} + \frac{d}{aaxx} = 0.$$

Sie habe mit jener gemeinſchaftliche Abſciſſen, und denſelben Ordinatenwinkel. Da das Gränzverhältniß $x : y = 1 : 0$ iſt, ſo kommt die Gleichung für y im Unendlichen mit der hyperboliſchen für z überein. Die letztere giebt deutlich zu erkennen, in welchem Maaße die Annäherung von y zu dem Gränzwerthe 0 geſchehe. Iſt c nicht Null, ſo iſt die Annäherung proportional dem Quotienten $\frac{1}{x}$; iſt $c = 0$, ſo iſt ſie proportional dem $\frac{1}{xx}$. In jenem Falle wird das letzte Glied $\frac{d}{aaxx}$ nicht beachtet. Euler druckt dieſes ſo aus: die Curve hat eine geradlinichte Aſymptote von der Form (species) $y = \frac{A}{x}$; oder eine von der Form $y = \frac{A}{xx}$.

Digitized by Google

70. Die erste Gattung hat demnach zwey Arten nach Beschaffenheit der hyperbolischen Asymptote. In der ersten geschieht die Annäherung von entgegengesetzten Seiten der geraden Asymptote, wegen der entgegengesetzten Beschaffenheit der Abscissen im Unendlichen. (Euleri Species. I. et II. Newtoni 33—45.)

71. Für die zweyte Gattung ist die Gleichung, (29.)

$$y(yy-\alpha\alpha xx)+ayy+by+cx+d=0.$$

Man gebe ihr eine dieser Gestalten:

I. $$y+\frac{ayy}{yy-\alpha\alpha xx}+\frac{by+cx}{yy-\alpha\alpha xx}+\frac{d}{yy-\alpha\alpha xx}=0.$$

II. $$y+\alpha x+\frac{ayy}{y(y-\alpha x)}+\frac{by+cx}{y(y-\alpha x)}+\frac{d}{y(y-\alpha x)}=0.$$

III. $$y-\alpha x+\frac{ayy}{y(y+\alpha x)}+\frac{by+cx}{y(y+\alpha x)}+\frac{d}{y(y+\alpha x)}=0.$$

Ferner nehme man folgende Gleichungen für hyperbolische Linien an:

I. $$z+\ *\ +\frac{c}{-\alpha\alpha x}+\frac{d}{-\alpha\alpha xx}=0.$$

II. $$z+\alpha x+\tfrac{1}{2}a+\frac{-b\alpha+c}{2\alpha\alpha x}+\frac{d}{2\alpha\alpha xx}=0.$$

III. $$z-\alpha x+\tfrac{1}{2}a+\frac{b\alpha+c}{2\alpha\alpha x}+\frac{d}{2\alpha\alpha xx}=0.$$

Digitized by Google

Da die Gränzen des Verhältnisses x:y sind, I.: 0; II. 1 : $-\alpha$; III. 1 : $+\alpha$, so sind die drey hyperbolischen Linien die Asymptoten der Curve. Ist weder b noch c Null, oder ist b allein Null, so ist die Annäherung zu der geradlinichten Asymptote an allen drey Zweigen proportional dem Quotienten $\frac{1}{x}$; ist c allein Null, so ist sie bey I proportional dem $\frac{1}{xx}$, bey II. und III. dem $\frac{1}{x}$. Ist entweder $c - b\alpha$ oder $c + b\alpha$ Null, so ist an zwey Zweigen die Annäherung wie $\frac{1}{x}$, an einem wie $\frac{1}{xx}$. Sind beide b und c Null, so ist sie an allen drey Zweigen wie $\frac{1}{xx}$.

72. Demnach enthält die zweyte Gattung drey Arten. An der ersten sind drey Asymptoten von der Form $\frac{A}{x}$; an der zweyten sind zwey von der Form $\frac{A}{x}$, und eine von der Form $\frac{A}{xx}$; an der dritten sind alle drey von der Form $\frac{A}{xx}$. An keiner Art sind zwey Asymptoten von der Form $\frac{A}{xx}$ mit einer von der Form $\frac{A}{x}$. (Euleri Species III. IV. V. Newtoni 1—9; 24—27; 10—21; 28—31; 22, 23, 32.)

73. Die Gleichung für die dritte Gattung ist (29.)

$$xy^2 + ax^2 + by + cx + d = 0.$$

Man gebe ihr eine dieser beiden Gestalten:

I. $yy + ax + \frac{by + cx}{x} + \frac{d}{x} = 0$;

Digitized by Google

II. $x + \frac{axx}{yy} + \frac{b}{y} + \frac{cx}{yy} + \frac{d}{yy} = o.$

Nach der letztern sehe man y als Abscisse an, die ins Unendliche wachsen mag, und x als Ordinate.

Man nehme folgende beide Gleichungen an, die erstere für eine Parabel, die andere für eine hyperbolische Linie.

I. $zz + ax + c = o;$

II. $x + \frac{b}{z} + \frac{d}{zz} = o,$

in welcher letztern x als Abscisse betrachtet werden mag.

In I. ist die Gränze des Verhältnisses $x : yy = 1 : a$, wo y mit x unendlich groß wird, aber gegen x unendlich klein bleibt (53.). Im Unendlichen verschwinden die Glieder $\frac{by}{x}$ und $\frac{d}{x}$, das ist $\frac{b}{y}$ und $\frac{d}{x}$. Es nähert sich also die Gleichung für y der für z immer mehr ohne Ende. In beiden mag man auch die Größe c im Unendlichen weglassen. In II. ist die Gränze des Verhältnisses $x : y$, wenn x mehr und mehr abnimmt, $o : 1$, und die Gleichung nähert sich immer mehr der zweyten Gleichung für z, das ist der Gleichung $x + \frac{b}{z} = o$, und wenn $b = o$ ist, der Gleichung, $x + \frac{d}{zz} = o$. Demnach sind, wenn ax^2 in der Gleichung für y nicht fehlt, zwey Arten, die erste mit der Asymptote von der Form $zz = Ax$, und mit der von der Form $z = \frac{A}{y}$, die zweyte mit einer paraboliſchen Asymptote, wie jene, aber einer hyperbolischen von der Form $\frac{A}{yy}$. (Euleri Species VI. et VII. Newtoni 46—52; 53—56.)

Digitized by Google

74. Ist $a=0$, und c positiv, so hat die Curve für unendliche x keine Ordinaten, weil in der Gleichung, $y^2+\frac{by}{x}+c+\frac{d}{x}=0$, für ein unendlich großes x die beiden durch x dividirten Glieder verschwinden, und die beiden übrigen sich nicht heben. In diesem Falle ist die Curve selbst eine hyperbolische Linie mit zwey Schenkeln. Denn der Quotient $\frac{by+d}{yy+c}=-x$, giebt $-x=\frac{b}{y}+\frac{d}{y^2}-\frac{bc}{y^3}-\frac{cd}{y^4}+$ etc. Die Curve hat eine einzige Asymptote von der Form $\frac{b}{y}$, wenn b nicht Null ist, und von der Form $\frac{d}{y^2}$, wenn $b=0$ ist. (Euleri Sp. VIII. et IX. Newtoni 61. 62; 63.)

75. Es sey $a=0$, und c negativ, oder deutlicher, es sey die Gleichung,

$$xy^2+by-ccx+d=0,$$

so bleibt die Curve noch eine hyperbolische mit sechs Schenkeln oder mit drey Asymptoten. Es ist nämlich erstlich, wie vorher,

$$-x=\frac{b}{y}+\frac{d}{y^2}+\frac{bc^2}{y^3}+\frac{c^2d}{y^4}+\text{etc.}$$

Zweytens ist

$$y=c-\frac{d+bc}{2cx}-\frac{d^2-b^2c^2}{8c^3x^2}+\text{etc.}$$

wo c sowohl negativ als positiv zu nehmen ist.

Das letztere Paar Werthe erhält man durch die Methode in dem Art. Function. Man nehme nämlich

an: $y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \text{etc.}$ und setze diesen Werth von y in die Glieder der Gleichung, so giebt jeder Coefficient der Potenzen von x eine Gleichung zur Bestimmung der Coefficienten in der Reihe. Da $A^2 = c^2$, so ist $A = \pm c$. Daher erhält jeder Coefficient in der Reihe einen gedoppelten Werth. Eben die Reihe für y findet man auch, wenn man die Wurzelgröße in dem Werthe von y in eine Reihe verwandelt.

Die Curve hat zwey Asymptoten der Axe der Abscissen x parallel in dem Abstande c auf beiden Seiten, und eine in der Axe der Ordinaten y selbst. Es sind hier zwey Fälle möglich. Erstlich, wenn b nicht $= o$ ist, so sind alle drey Asymptoten von der Form $\frac{A}{t}$, wo t sowohl die x als y bedeutet. Ist $b = o$, so ist die Asymptote, die in der Axe der y liegt, von der Form $\frac{A}{t^2}$; die beiden andern sind von der Form $\frac{A}{t}$. (Euleri Sp. X. et XI. Newtoni 57. 58. 59; 60.)

76. Es fehle ccx, und die Gleichung sey, $xy^2 - by - d = o$, so ist

$$yy = \frac{d}{x} + \frac{by}{x}, \text{ und}$$

$$x = \frac{b}{y} + \frac{d}{yy}.$$

Hieraus erhellet gleich, daß die Curve zwey Asymptoten hat, die erstere von der Form $yy = \frac{d}{x}$, auf der Axe der Abscissen x, die andere von der Form $x = \frac{b}{y}$, auf der Axe der Ordinaten y, wenn nämlich nicht ist $b = o$. Ist $b = o$, so ist die erstere Asymptote wieder von der

Digitized by Google

Form $\frac{d}{x}$; die andere von der Form $\frac{d}{yy}$. (Euleri Spec. XII. et XIII. Newtoni 64; 65.)

Der Reihen-Ausdruck für y ist

$$y = \pm\sqrt{\frac{d}{x} + \frac{b}{2x} \pm \frac{bb}{8x\sqrt{dx}} \mp \text{etc.}}$$

77. Die Gleichungen für die vierte Gattung sind:

$$y^3 + ax^2 + hy + c = 0;$$
$$y^3 + axy + bx + c = 0.$$

Für die erste ist die Gränzgleichung $z^3 + ax^2 = 0$, und die einzige Asymptote ist eine parabolische von dieser Form. (Euleri Sp. XIV. Newtoni 67 — 71.)

Für die zweyte ist eine Gränzgleichung $z^2 + ax = 0$; und eine $z = -\frac{b}{a} + \frac{A}{x}$, wo $A = \frac{b^3}{a^4} - \frac{c}{a}$ ist.

Denn wenn man nimmt $ay + b = 0$, so bleibt $y^3 + c$ in der Gleichung übrig. Um diesen Theil zu heben, muß y haben die Form

$$y = -\frac{b}{a} + \frac{A}{x} + \frac{B}{xx} + \text{etc.}$$

Dieser Werth in die Gleichung gesetzt, wird $A = \frac{b^3}{a^4} - \frac{c}{a}$. Daher ist die Gränzgleichung die angegebene.

Die Curve hat zwey Asymptoten, eine parabolische und eine hyperbolische. Die gerade Asymptote der letztern ist der Axe der Curve parallel in dem Abstande $-\frac{b}{a}$. (Euleri Spec. XV. Newtoni 66.)

Ist $b^3 = a^3c$, so läßt sich die Gleichung durch

Digitized by Google

$y + \frac{b}{a}$ dividiren, und gilt für ein System einer geraden Linie und eines Kegelschnitts.

78. Für die Gleichung, $ay^5 + by^3 + cy + d = x$, ist die Gränze, $az^5 = x$. (Euleri Sp. XVI. Newtoni, 72.)

79. Cramer (Anal. des lignes courbes §. 155.) theilt die Gattungen auch nach der Beschaffenheit der Asymptoten in Arten ein, zählt aber nur vierzehn Arten der Linien der dritten Ordnung. Er zieht Eulers Species VIII. IX. in eine zusammen; ferner X. XI; so auch XII. XIII. Diese unterscheiden sich aber in der That durch die Beschaffenheit der Annäherung der hyperbolischen Zweige zu den geraden Asymptoten. Hingegen führt er in der zweyten Gattung noch eine vierte Art auf, nämlich diejenige, wo die drey Asymptoten sich in einem einzigen Puncte schneiden. Dieser Umstand hat aber mit dem Eintheilungsgrunde nichts zu thun. Er setzt auch wirklich hinzu, wenn man es für gut finde, diese Absonderung zu machen. In den andern Fällen unterscheidet er die hyperbolischen Zweige, die sich auf entgegengesetzten Seiten, oder auf derselben ihrer Asymptote nähern, das ist, diejenigen, wo sie von der Form $\frac{A}{x}$ oder $\frac{A}{xx}$ sind. D'Alembert (Dictionn. encycl. Art. Courbe) will aus der verschiedenen Aufzählung der Arten, die Cramer und Euler machen, die Folge ziehen, daß die Unterabtheilungen etwas willkürliches seyn. Freylich kann man den Eintheilungsgrund auf verschiedene Art wählen, wie es selbst bey den Gattungen nach Newton und Euler der Fall ist. Allein bey einem bestimmten Eintheilungsgrunde dürfen keine Unterschiede Statt haben. Cramer hat wirklich drey wesentliche Verschiedenheiten übersehen.

Krumme Linien der dritten Classe, oder Linien der vierten Ordnung, sind solche, worin die Anzahl

Digitized by Google

der Dimensionen in den Gliedern der Gleichung bis zu vier steigt, nämlich bloß in Rücksicht auf die veränderlichen Größen. (Krumme Linien u.s.) Der höchste Theil der Gleichung ist im Allgemeinen

$$ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4,$$

von welchen Gliedern wenigstens eines vorhanden seyn muß.

Die Mannichfaltigkeit der Formen in dieser Classe ist sehr groß. Euler zählt hundert sechs und vierzig Arten in acht Gattungen, worin aber meistens noch manche merklich verschiedene Abänderungen vorkommen.

Die Eintheilung macht Euler auch hier nach der Beschaffenheit der einfachen Factoren des obersten Gliedes.

I. Fall. Der höchste Theil (membrum supremum) enthält gar keine mögliche einfache Factoren. Die Curven sind auf einen endlichen Raum beschränkt. Ein einziges Geschlecht.

II. Fall. Zwey mögliche und ungleiche einfache Factoren. Sieben Geschlechter mit hyperbolischen Asymptoten.

III. Fall. Zwey mögliche und gleiche einfache Factoren. Sieben Geschlechter. Darunter zwey auf einen endlichen Raum eingeschränkte. Eines mit einer einzigen parabolischen Asymptote. Die übrigen mit hyperbolischen.

IV. Fall. Vier ungleiche mögliche einfache Factoren. Zehn Geschlechter, jedes mit vier hyperbolischen Asymptoten.

V. Fall. Zwey gleiche und zwey ungleiche Factoren. Vierzig Geschlechter, die Euler aber nicht alle näher untersucht hat, so daß vielleicht einige als unmögliche, wegen eines Widerspruches in den Annahmen, wegfallen müssen.

VI. Fall. Zwey Paare gleicher Factoren. Sieben und vierzig Geschlechter, die nicht insbesondere geprüft sind.

VII. Fall. Drey gleiche Factoren. Vier und zwanzig Geschlechter, die auch nicht einzeln untersucht sind,

Digitized by Google

VIII. Fall. Vier gleiche Factoren. Eilf Geschlechter. Jedes hat eine parabolische Asymptote, eines zwey solche. Neben jener ist noch eine hyperbolische, außer bey vier Geschlechtern.

Cramer macht neun Classen von den Linien der vierten Ordnung. I. Die auf einen endlichen Raum beschränkten. II. Mit zwey parabolischen Zweigen. III. Mit zwey hyperbolischen. IV. Mit vier parabolischen. V. Mit zwey parabolischen und zwey hyperbolischen. VI. Mit vier hyperbolischen. VII. Mit zwey parabolischen und vier hyperbolischen. VIII. Mit sechs hyperbolischen. IX. Mit acht solchen. Analyse des lignes courbes. §. 157.

Krumme Linien von gedoppelter Krümmung sind solche, von welchen kein Theil, so klein er auch seyn mag, in derselben Ebene liegt. Sie entstehen auf verschiedene Arten. Wenn zwey krumme Flächen einander schneiden, so ist am häufigsten ihre Durchschnittslinie eine gedoppelt krumme Linie. Dergleichen Fälle kommen in der Baukunst vor. Ferner, auf der krummen Oberfläche eines Körpers werde eine krumme Linie nach einem gewissen Gesetze beschrieben, so ist diese meistens eine gedoppelt krumme Linie, z. B. die Spiralen auf der Fläche eines Cylinders, Kegels oder einer Kugel, welche mit den Seitenlinien des Cylinders oder des Kegels, oder den großen Kreisen mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser (Meridianen) durchgehends gleiche Winkel machen. Wenn auf eine einfach krumme Linie gerade gesetzt werden, senkrecht auf ihre Ebene, und diese senkrechten nach einem gewissen Gesetze fortgehen, so entsteht eine gedoppelt krumme Linie. Auf diese Art lassen sich unendlich viele Curven dieser Art angeben. Die Gränze der Erleuchtung eines Körpers mit einer krummen Oberfläche kann doppelt gekrümmt seyn. Die Bewegung eines Körpers, der nach zwey oder mehrern Mittelpuncten der beschleunigenden Kräfte getrieben wird, geschieht nicht in derselben Ebene, es müßten denn diese Mittelpuncte der Kräfte

Digitized by Google

und die Richtung der Bewegung in derselben Ebene lie-
gen. Jenes ist der Fall bey den Bewegungen der Plane-
ten und ihrer Trabanten, für letztere auch bey ihren relati-
ven Bewegungen. Hieraus sieht man, daß die Untersu-
chung der Linien von gedoppelter Krümmung allerdings von
Wichtigkeit, auch wegen ihrer Anwendungen, ist.

1. So wie bey einer krummen Linie, deren Puncte
alle in einer Ebene liegen, die Lage jedes Punctes durch
den Abstand von zwey gegebenen geraden Linien in jener
Ebene, nach Richtungen, die denselben parallel sind, d. i.
durch zwey Coordinaten (x, y) mit einem gewissen Or-
dinatenwinkel bestimmt wird, so wird für eine Linie von
gedoppelter Krümmung die Lage jedes Punctes durch die
Abstände von drey gegebenen Ebenen (x, y, z) nach
Richtungen, die denselben parallel sind, bestimmt. Die
drey Ebenen setze man senkrecht auf einander, so daß die
Axen der Coordinaten durch den ihnen gemeinschaftlichen
Punct gehen, und senkrecht auf einander sind. Die Ab-
stände jedes Punctes von den Ebenen werden solchergestalt
nach geraden Linien, auf die Ebene senkrechten, genommen.

In Fig. 67. sind AX, AY, AZ die drey Axen
der Coordinaten. Je zwey bilden eine Ebene für zwey
Coordinaten, die Ebene XAY sind die x und y, die
Ebene YAZ für die y und z; die Ebene XAZ für die
x und z. Es sey QPR ein Bogen der Curve; P ein
Punct derselben. Von demselben lasse man auf die Ebene
XAY die senkrechte PN = z herab; von N ziehe man in
dieser Ebene die senkrechte NM = y auf AX. Diese
schneidet darauf die AM = x ab.

2. Zur Bestimmung einer krummen Linie von ge-
doppelter Krümmung sind zwey Gleichungen zwischen den
Coordinaten x, y, z nöthig. Schafft man aus denssel-
ben eine der veränderlichen Größen, z, heraus, so erhält
man eine Gleichung zwischen x und y, welche auch ursprüng-
lich gegeben seyn mag. Diese Gleichung ist für eine Curve
qNr, welche die Projection der QPR auf der Ebene der
x, y ist. Schafft man x heraus, so ist die Gleichung

Digitized by Google

zwischen y und z für die Curve q p r, welche auf der Ebene der y, z die Projection der Curve Q P R ist. Auf gleiche Weise ist die Gleichung zwischen x und z, nach weggeschaffter y, die Gleichung für die Projection auf die Ebene der x, z. Durch zwey dieser Projectionen wird die gedoppelt krumme Linie bestimmt. — Diese Projectionen bezeichne man durch ihre Coordinaten, so wie die gedoppelt krumme Linie selbst durch alle drey.

3. Die stetige Reihe der auf die Projection der Curve (x, y, z) in der Ebene der x, y senkrechten z bildet eine cylinderartige Fläche, auf welcher die Curve (x, y, z) eben so dargestellt wird, wie eine Curve von einfacher Krümmung auf einer ebenen Fläche. Nimmt man die Bogen (s) der Curve (x, y) als Abscissen an, so sind die z die Ordinaten zu denselben. Auf gleiche Weise läßt sich die Curve (x, y, z) auf der cylindrischen Fläche über einer der beiden andern Projectionen, den Curven (y, z) oder (x, z), beschreiben.

4. Exempel, 1. Die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie seyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$, jene für eine Parabel auf der Ebene der x, y, diese für einen Kreis, dessen Mittelpunct der Anfang der Coordinaten ist, in der Ebene der y, z. Da hier die veränderlichen Größen schon gesondert sind, so ergiebt sich sogleich die Beschaffenheit der Curve (x, y, z). Sie ist der Durchschnitt eines Cylinders über dem gedachten Kreise mit dem paraboliſchen Cylinder über der Curve (x, y). Für die Projection der Curve auf der Ebene (x, z) ist die Gleichung, $ax = aa - zz$, oder $zz = a(a - x)$. Sie ist ein paraboliſcher Bogen, mit dem Parameter a. Er bricht ab, wenn $x = a$ wird.

5. Exempel, 2. Die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie seyn I. $ax = yy$; II. $by = zz$. Sie ist der Durchschnitt zweyer paraboliſchen Cylinder. Für die Projection derselben auf der Ebene der x, z ist die Gleichung, $abbx = z^4$, eine höhere Parabel.

6. Exempel, 3. Es sey I. $xx + yy = aa$;

Digitized by Google

II. $bz = xy$, so ist $b^2z^2 = x^2y^2$, daher $y^4 - a^2y^2 + b^2z^2 = o$, die Gleichung für die Projection der Curve (x, y, z) auf die Ebene der y, z. Diese ist auf einen endlichen Raum beschränkt. Der größte Werth, den xy haben kann, ist der für $x = y$. Denn es ist $2xy$ der Sinus des doppelten Winkels, der zu x und y gehört. Dieser ist am größten, wenn der Winkel ein rechter ist, also wenn der Winkel zu x und y ein halber rechter ist.

7. Die Lage der berührenden geraden an irgend einem Puncte einer doppelt krummen Linie wird folgendergestalt bestimmt. Die Gleichung für ihre Projection auf die Ebene der x, y sey I. $y = ax + \alpha$; auf die Ebene der x, z sey sie II. $z = bx + \beta$, ihr Neigungswinkel gegen die Ebene x, y sey φ, spitz, wenn der Punct, wo sie die Ebene trifft, von dem Grundpuncte der positiven Ordinate z zu einer positiven y, nach der Axe der x oder jenseits derselben liegt, stumpf (negativ), wenn jener Punct jenseits des Grundpunctes der z fällt. Die Neigungsebene schneide die Axe der x unter dem Winkel η, der nach der Gegend der positiven x spitz sey. Es ist tang $\eta = a$, und tang $\varphi = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa)}}$, (Linie, 20.). An der berührenden sind die Differential-Verhältnisse $\partial y : \partial x$ und $\partial z : \partial x$ dieselben wie an der Curve, auf gleiche Art wie an den einfachen krummen Linien. Denn die gerade, an welcher die Verhältnisse der endlichen Differenzen, $\Delta y : \Delta x$ und $\Delta z : \Delta x$ mit denen an der Curve in einem Puncte übereinkommen, weicht von der Curve ab, desto mehr je größer die Differenzen sind. Nun ist an der geraden Linie $\frac{\partial y}{\partial x} = a$; $\frac{\partial z}{\partial x} = b$. Dadurch werden die Winkel η und φ für die gerade berührende bestimmt. Es ist, wenn nun die Differentiale zu der Curve gehören, tang $\eta = \frac{\partial y}{\partial x}$ und tang $\varphi = \frac{\partial z}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$. Die

Digitized by Google

unveränderlichen α und β werden durch die zu einem gegebenen Puncte der Curve gehörigen Coordinaten bestimmt, nachdem a und b gefunden sind.

Die Subtangente in der Ebene des Winkels ϑ ist $= z \cot \vartheta = \frac{z\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial z}$. Durch diese wird die Lage der berührenden völlig bestimmt.

8. Exempel. Die Gleichungen für eine gedoppelt krumme Linie seyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$. Hier ist $a\partial x = 2y\partial y$; und $z\partial z = -y\partial y = -\frac{1}{2}a\partial x$. Ferner ist $\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{aa + 4yy}{4yy}\partial x^2$. Folglich

$\text{tang } \varphi = \frac{a}{2y}$, und $\text{tang } \vartheta = -\frac{ay}{z\sqrt{(aa + 4yy)}}$.

Die Negation zeigt an, daß der Neigungswinkel der berührenden mit der Ebene der x, y stumpf ist, oder daß der Punct, wo sie die Ebene trifft, weiter von der Axe der x liegt, als der Grundpunct der Ordinate.

Die Subtangente ist $= -\frac{2z\sqrt{(aa + 4yy)}}{ay}$

$= -(a - x)\sqrt{\frac{a + 4x}{x}}$.

9. Das Differential eines Bogens einer gedoppelt krummen Linie ist $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$. Es sey nämlich (Fig. 68.) QNR ein Bogen der Projection auf die Ebene der x, y; PN die Ordinate z in dem Puncte N; QQ, RR ein paar andere Ordinaten z; QPR die gedoppelt krumme Linie auf der cylindrischen Fläche durch QNR. Neben der Ordinate NP ziehe man noch eine np, und lege durch P eine mit der Grundebene parallele Ebene, welche die cylindrische Fläche in $P\pi$ schneide. Die Chorde von $P\pi$ ist gleich der Chorde von Nn, das ist $= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, und die Chorde von Pp ist $= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$. Der von der Größe der Differenzen unabhängige Theil des Quotienten,

Digitized by Google

$\frac{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)}}{\Delta s}$ ist $=1$, wenn der endliche Bogen $=s$ ist. Das ist, es ist $\partial s = \sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)}$.

Aus den Gleichungen zwischen x, y und z verwandle man das Differential $\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)}$ in eine Differentialformel für x oder y oder z. Ist diese integrirbar, so ist die Curve rectificabel.

10. In N ziehe man die berührenden NT an die Projection QNR, und nehme PN : NT gleich dem Gränzverhältnisse von $p\pi : P\pi$, welches ist $\partial z : \sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, so ist NT die Subtangente, und PT die berührende in P.

11. Das Differential der cylindrischen Fläche ist $= z\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, auf ähnliche Art, wie an Curven in einer Ebene. Ein Beyspiel in dem Artikel, Florentinische Aufgabe, 15.

12. Von den doppelt gekrümmten Curven, die auf andere als die hier erklärte Art, durch den Durchschnitt zweyer krummen Flächen entstehen, wird besser in dem folgenden Artikel gehandelt werden können. Hier folgen einige Beyspiele von solchen krummen Linien, die nach einem bestimmten Gesetze auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet werden. An diesen zeigt sich zugleich eine andere Art, die Natur einer doppelt krummen Linie durch eine Gleichung darzustellen, und zwar bloß durch zwey Coordinaten, deren eine aber ein Kreisbogen, die andere eine gerade, oder auch ein Kreisbogen ist.

13. Der Körper sey ein senkrechter Cylinder, dessen Halbmesser a ist. Die krumme auf der Oberfläche gezeichnete Linie mache mit den Seitenlinien des Cylinders durchgehends denselben Winkel. Ein Bogen des Umfanges der Grundfläche sey $= s$; die Seite des Cylinders von dem veränderlichen Puncte desselben bis an den Punct der spiralischen Curve sey $= z$, der Bogen derselben $= S$, der Winkel mit der Seite $= \alpha$, so ist $\text{tang } \alpha = \frac{\partial z}{\partial s}$,

Digitized by Google

$V(\partial u^2 + \left(\frac{b-u}{b}\right)^2 a^2 \partial\varphi^2) = \frac{\partial u}{mb} V(m^2 b^2 + (b-u)^2)$, oder wenn $b - u = v$ gesetzt wird, $\partial s = -\frac{\partial v}{mb} V(m^2 b^2 + v^2)$; wovon das Integral nach Integralformel, 57 u. 50, gefunden wird.

17. Es sind AB, AP (Fig. 70.) zwey Quadranten auf einer Kugelfläche, so daß BP ein Bogen eines großen Kreises ist, dessen einer Pol in A liegt. Die Curve BM schneide alle Quadranten wie AP unter demselben Winkel BMP; es wird die Gleichung zwischen dem Bogen BP und PM gesucht.

Man ziehe neben AP noch einen Quadranten AQ, und durch M den Bogen Mm eines Parallelkreises; auch sey N auf AQ ein Punct der Curve. Es sey der Halbmesser der Kugel = 1; der Bogen $BP = \varphi$; $PM = \omega$, so ist $PQ = \Delta\varphi$, $Nm = \Delta\omega$; $Mm = \cos\omega . \Delta\varphi$. Also ist tang BNQ oder $\text{tang } BMP = \frac{\cos\omega . \partial\varphi}{\partial\omega}$.

Es sey $BMP = \alpha$, so ist $\text{tang } \alpha . \frac{\partial\omega}{\cos\omega} = \partial\varphi$. Die Integration giebt (Integralformel, 117.)

$$\text{tang } \alpha . \log. \text{nat. tang } (45° + \tfrac{1}{2}\omega) = \varphi,$$

wo φ und ω zugleich anfangen. — Diese krumme Linie kommt in der Schiffkunst vor, wo sie die loxodromische heißt. Wie auf einem elliptischen Sphäroid die Gleichung für eine solche Spirale, als hier auf einer Kugelfläche gezeichnet ist, gefunden werde, wird in dem Artikel, Sphäroid, gezeigt.

18. Man nehme den Bogen PM in einem bestimmten Verhältnisse zu BP, nämlich $m : 1$, so daß $PM = m \times BP$ oder $\omega = m\varphi$. Also ist tang BNQ oder $\text{tang } BMP = \frac{\cos\omega . \partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{\cos\omega}{m}$. Für $\omega = 0$ oder

Digitized by Google

in B ist diese Tangente $= \frac{1}{m}$; in A ist sie $= 0$. S.

Florentinische Aufgabe.

Nimmt man den Abstand von A dem Bogen BP proportional, so ist die Curve der archimedeischen Spirale analog.

19. Eine einfach krumme Linie liegt ganz in derselben Ebene. Die Lage ihrer nächsten Puncte gegen einander, in der stetigen Folge genommen, zu bestimmen, ist es nur nöthig, die Lage der berührenden geraden in jedem Puncte zu kennen, das ist derjenigen, welche unter allen durch einen Punct gezogenen geraden am wenigsten von der Curve abweicht, oder an welcher das Verhältniß der Unterschiede zweyer Abscissen und der zugehörigen Ordinaten dem Differentialverhältnisse derselben an der Curve gleich ist (berührende Linie, 12; Linie, 15.). Allein an einer gedoppelt krummen Linie ist die Lage der Ebene durch je drey Puncte der Curve veränderlich, so daß es nicht genug ist, die Lage der berührenden in jedem Puncte anzugeben, sondern es muß auch die Lage der Ebene bestimmt werden können, welche unter allen durch einen gegebenen Punct der Curve gelegten Ebenen sich am wenigsten von der Curve entfernt. Diese ist diejenige, an welcher die Verhältnisse der ersten und zweyten Unterschiede der Coordinaten den gleichnamigen Differentialverhältnissen an der Curve gleich sind, wobey noch, eben so wie an den einfachen Curven, die Coordinaten in dem gemeinschaftlichen Puncte der Ebene und der Curve gegeben oder angenommen werden. Jede andere Ebene, die durch drey Puncte der Curve gelegt wird, kommt dadurch zwar in den Verhältnissen der Unterschiede ihrer Coordinaten an diesen drey Puncten mit den endlichen Unterschieden der Coordinaten an der Curve überein, entfernt sich aber in den dazwischen liegenden. Je näher die drey Puncte einander liegen, desto mehr nähern sich die Verhältnisse an der Ebene den Differentialverhältnissen an der Curve. Setzt man jene diesen gleich, so hat die Ebene nicht mehr drey Puncte mit

Digitized by Google

der Curve gemein, so wenig als eine berührende gerade zwey Puncte, aber sie kommt unter allen Ebenen durch denselben Punct der Curve am nächsten. Will man sich zur Versinnlichung der Lage drey Puncte der Curve zugleich in der Ebene gedenken, so müssen es unendlich nahe Puncte seyn, wo durch den Zusatz, unendlich nahe, die Entfernung derselben wiederum aufgehoben wird.

20. Man nenne die nach (19.) bestimmte Ebene die Krümmungs-Ebene. Denn um die Krümmung zu messen oder zu vergleichen, müssen drey Puncte in stetiger Folge, oder zwey Elemente, gedacht werden, durch welche ein Kreisbogen gezogen wird. Der Mittelpunct desselben fällt also in die Ebene durch diese drey Puncte. Die französischen Analysten nennen diese Ebene Plan osculateur.

21. Es seyn AM, MN, NP (Fig. 71.) drey rechtwinklichte Coordinaten an eine Ebene, die durch die geraden BB, PO gelegt ist. Sie schneide die Ebene der AM, MN in BB, und sey gegen dieselbe unter dem Winkel $PON = \vartheta$ geneigt. Die Durchschnittslinie BB schneide die AM in C unter dem spitzen Winkel $BCM = \eta$, in dem Abstande h von dem Anfangspuncte A. Man setze $AM = x$; $MN = y$; $NP = z$, so ist (krumme Fläche, 4.) die Gleichung für die Ebene

$$x \sin\eta - y \cos\eta + z \cot\vartheta - h \sin\eta = 0.$$

22. Es seyn drey Folgen von Coordinaten an der Curve, x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'', so wird durch diese die Lage der Ebene, die durch die drey zugehörigen Puncte der Curve geht, bestimmt. Setzt man diese, als gegeben betrachtete, Coordinaten in die Gleichung für eine Ebene, so erhält man drey Gleichungen, woraus sich η, ϑ und h bestimmen lassen. Es sey $x' - x = \Delta x$; $x'' - x' = \Delta x'$, und $x'' - 2x' + x = \Delta^2 x$ (nämlich $x'' - x' - (x' - x)$), so ist, wenn Δy, $\Delta^2 y$; Δz, $\Delta^2 z$ ähnliche Bedeutungen für y und z haben,

$$\Delta x . \sin\eta - \Delta y . \cos\eta + \Delta z . \cot\vartheta = 0;$$

Digitized by Google

und

$$\Delta^2 x . \sin\gamma - \Delta^2 y . \cos\gamma + \Delta^2 z . \cot\vartheta = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, durch Wegschaffung von $\cot\vartheta$,

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\Delta y . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 y}{\Delta x . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 x}.$$

Aus der ersten derselben wird $\cot\vartheta$ durch den nun bestimmten Werth von γ hergeleitet.

Setzt man nun anstatt der Verhältnisse zwischen endlichen Unterschieden die Differentialverhältnisse an der Curve, so erhält man die Gleichungen für die Krümmungs-Ebene:

I. $\partial x . \sin\gamma - \partial y . \cos\gamma + \partial z . \cot\vartheta = 0.$

II. $\partial^2 x . \sin\gamma - \partial^2 y . \cos\gamma + \partial^2 z . \cot\vartheta = 0.$

Dazu kommt noch die Gleichung für die Coordinaten an die Ebene, welche ihr mit der Curve in einem Puncte gemeinschaftlich sind,

III. $x \sin\gamma - y \cos\gamma + z \cot\vartheta = h \sin\gamma.$

Daraus ist

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\partial y . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 y}{\partial x . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 x}.$$

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y}{\partial z}\cos\gamma - \frac{\partial x}{\partial z}\sin\gamma.$$

$$h = x - \frac{z\partial x}{\partial z} - \left(y - \frac{z\partial y}{\partial z}\right)\cot\gamma.$$

In der letzten Formel sind $\frac{z\partial x}{\partial z}$ und $\frac{z\partial y}{\partial z}$ die Subtangenten zweyer Projectionen der Curve.

Die Winkel γ und ϑ, und der Abstand h sind mit jedem Puncte der Curve veränderlich.

23. Um eine bestimmte Vergleichung der zweyten Differentiale machen zu können, (Differentio — Differentialrechnung, 15.) ist eines der ersten Differentiale

Digitized by Google

unveränderlich zu setzen, hier am füglichsten ∂z. Solchergestalt ist

$$\text{tang}\,\eta = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}.$$

Die Formeln für cot ϑ und h bleiben wie in (22.).

24. Exempel: Die Gleichungen für eine doppelt krumme Linie seyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$. Sie ist der Durchschnitt eines paraboliſchen und eines circularen Cylinders (4.). Hieraus sind die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2z}{a}$, und $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{y}$. Ferner $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{2}{a}$, und $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{a}{xy}$, wenn nämlich in dem Differential von $\frac{\partial y}{\partial z}$ für yy und ∂y ihre Werthe, von jenem durch $\dot{x}$, von diesem durch ∂z gesetzt werden. Folglich ist $\text{tang}\,\eta = \frac{aa}{2xy}$, also $\sin\eta = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + 4x^3}}$, und $\cos\eta = \sqrt{\frac{4x^3}{a^3 + 4x^3}}$. Ferner ist $\cot\vartheta = \frac{2z}{a}\sin\eta - \frac{z}{y}\cos\eta$, und $h = \frac{ax + zz}{a} - \frac{a^2}{y}\cot\eta$, oder $h = \frac{2z^2}{a} - x$.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, und $z = a$, also $\eta = 90°$. Daher $\cot\vartheta = +2$. Der zweyte Theil von $\cot\vartheta$ wird $\frac{0}{0}$, allein da $\frac{\partial . z\cos\eta}{\partial y} = 0$ ist, so ist dieser zweyte Theil $= 0$ (Function, 50.). Noch ist $h = 2a$. Die Krümmungs-Ebene in dem obersten Puncte der Curve schneidet die Axe der x unter einem rechten Winkel, in dem Abstande 2a von dem Anfangspuncte, und ist gegen die Ebene der x, y unter einem Winkel ϑ geneigt, dessen Tangente $= \frac{1}{2}$ ist, daher $\vartheta = 26° 34'$ ist, nach der Gegend des Anfangspunctes.

Digitized by Google

Für $x = a$ ist $y = a$, und $z = o$, also tang $\eta = \frac{1}{2}$, und cot $\vartheta = o$, oder $\vartheta = 90°$. Auch ist $h = -a$. Die Krümmungs-Ebene schneidet nun die Axe der x unter dem Winkel $\eta = 26° 34'$, in dem Abstande $-a$ von dem Anfangspuncte, und steht auf die Ebene der x, y senkrecht.

Wenn $3x = 2a$ genommen wird, so ist $h = o$, und die Krümmungs-Ebene geht durch den Anfang der Coordinaten. Es ist $y = a\sqrt{\frac{3}{4}}$; $z = a\sqrt{\frac{1}{4}}$;

tang $\eta = \sqrt{\frac{27}{32}}$; tang $\vartheta = \sqrt{\frac{59}{4}}$; $\eta = 42° 34'$;

$\vartheta = 75° 24'$.

25. Wenn die Gleichungen für die Curve aus einer Differentialgleichung hergeleitet werden, so ergeben sich die Werthe der Winkel η und ϑ aus der Differentialgleichung, eben so wie der Winkel der berührenden an einer einfach krummen Linie mit einer der Axen der Coordinaten durch eine Gleichung, $P\partial x - Q\partial y = o$, gegeben wird.

26. Die Differentialgleichung für eine gedoppelt krumme Linie sey

$$P\partial x - Q\partial y + R\partial z = o,$$

so ist tang $\eta = \frac{P}{Q}$, und $\frac{\cot \vartheta}{\cos \eta} = \frac{R}{Q}$, also

tang $\vartheta = \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{R}$, und cos $\vartheta = \frac{R}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}$.

Für den Durchschnittspunct der Krümmungs-Ebene mit der Axe der x ist $h = x - \frac{Q}{P}y + \frac{R}{P}z$.

Die letztere Formel ist der Gleichung für die Subtangente an einer einfach krummen Linie analog. Wenn die berührende die Axe der x zwischen dem Anfange der x und dem Grundpuncte der Ordinate schneidet, so ist der Abstand des Durchschnittspunctes von dem Anfange der

Digitized by Google

Abſciſſen $= x - \frac{y\partial x}{\partial y}$, da $\frac{y\partial x}{\partial y}$ die Subtangente iſt (berührende Linie, 13.).

27. Exempel. I. Für die logarithmiſche Spirale auf einer Kegelfläche iſt in (14.) die Differentialgleichung

$$\frac{a\partial\varphi}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{b\partial u}{b-u},$$

gefunden. Es ſoll hieraus nun die Differentialgleichung für drey auf einander rechtwinklichte Coordinaten x, y, z hergeleitet werden.

Man ziehe von einem Puncte M (Fig. 69.) der Spirale auf den Halbmeſſer CP der Grundfläche die ſenkrechte $ML = z$; von L auf den Halbmeſſer CB die ſenkrechte $LH = y$, welche darauf $CH = x$ abſchneide. Die Axen der Coordinaten ſind nun CB, eine durch C auf CB in der Grundfläche BCP ſenkrechte, und die Axe des Kegels. Es ſey $AC = c$, und der Winkel $BCP = \varphi$. Es iſt

$$\text{I. } y = x\,\text{tang}\,\varphi.$$

Ferner $CL = \frac{x}{\text{cof}\,\varphi}$; $PL = a - \frac{x}{\text{cof}\,\varphi}$; und $PC : AC = PL : LM$, daher

$$\text{II. } z = c - \frac{cx}{a\,\text{cof}\,\varphi}.$$

Auch iſt $AP : AC = MP : ML$, folglich $u = \frac{bz}{c}$, und daher

$$\text{III. } \frac{a\partial\varphi}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{b\partial z}{c-z}.$$

Aus I. iſt $\partial y = \text{tang}\,\varphi.\,\partial x + \frac{x\partial\varphi}{\text{cof}\,\varphi^2}$. Dieſe Gleichung wird durch die Subſtitutionen aus I. und II.

$$\partial y = \frac{y}{x}\,\partial x + \frac{a^2(c-z)^2}{c^2 x}\,\partial\varphi.$$

Digitized by Google

Die Substitution für $\partial\varphi$ aus III. giebt die gesuchte Differentialgleichung,

$$\frac{y}{x}\partial x - \partial y + \frac{ab(c-z)\tang\alpha}{c^2 x}\partial z = 0.$$

Für die Krümmungs-Ebene ergeben sich nun die Bestimmungen:

$$\tang\eta = \frac{y}{x}.$$

$$\tang\vartheta = \frac{c^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{ab(c-z)\tang\alpha} = \frac{c}{b\tang\alpha}$$

$$h = \frac{abz(c-z)\tang\alpha}{c^2 y}.$$

Der zweyte Ausdruck für $\tang\vartheta$ folgt aus den beiden Gleichungen, I. und II. Es ist nämlich $x^2 + y^2 = x^2(1+\tang\varphi^2) = \frac{x^2}{\cos\varphi^2}$, und $c - z = \frac{cx}{a\cos\varphi}$.

Wenn der Winkel φ zu diesen Bestimmungen mitgenommen wird, so ist

$$\eta = \varphi;\ h = \frac{b\tang\alpha}{c\sin\varphi}z.$$

Die Krümmungs-Ebene an der koniſchen Spirale dreht sich auf der Axe der Abscissen x, auf welcher der Anfangs-Radius CB liegt, völlig so, wie das Dreyeck ACP um AC, ist gegen die Ebene der x und y unter einem unveränderlichen Winkel geneigt, und schneidet die Axe der x in dem Abstande $h = \frac{b\tang\alpha}{c\sin\varphi}z$. Die Tangente des Neigungswinkels dieser Ebene gegen die Ebene der x, y ist nicht der Neigung der Spirale gegen die Grundebene oder eine ihr parallele gleich, weil es auch auf den Winkel der Seitenlinie des Kegels gegen die Grundfläche ankommt. Es ist $\frac{c}{b}$ der Sinus dieses Winkels.

In dem Anfangspuncte ist $\sin\varphi = 0$, und auch

Digitized by Google

$z = o$, daher $h = \frac{o}{o}$. Für dieſen Punct wird $\frac{z}{\sin \varphi}$ $= \frac{\partial z}{\text{col}\varphi . \partial \varphi}$ (Function, 50.) Da $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{a(c - z)}{b \tang \alpha}$ iſt, ſo iſt, für $z = o$, der Werth dieſes Bruchs $=$ $\frac{ac}{b \tang \alpha}$, und in dem Anfangspuncte $h = a$, wie es leicht begreiflich iſt.

28. Wenn $c = b$ genommen wird, ſo verwandelt ſich der ſenkrechte Kegel in einen ſolchen Cylinder. Hier iſt $\tang \gamma = \tang \varphi$, wie an dem Kegel, aber $\tang \vartheta = \cot \alpha$; $h = \frac{\tang \alpha}{\sin \varphi} z$.

29. Exempel. II. Für die ſphäriſche Spirale iſt die Differentialgleichung, $\partial \varphi = \tang \alpha . \frac{\partial \omega}{\text{col}\,\omega}$, gefunden (17.). Man laſſe von dem Puncte M der Oberfläche (Fig. 70.) eine ſenkrechte z auf die Ebene des Kreisbogens BP, ziehe von dem Grundpuncte derſelben eine ſenkrechte y auf den Radius durch den Anfangspunct B, welche auf demſelben von dem Mittelpuncte aus das Stück x abſchneide. Da $BP = \varphi$ iſt, ſo iſt

I. $y = x \tang \varphi$.

Da $PM = \omega$, und der Halbmeſſer $= 1$ geſetzt iſt, ſo iſt

II. $z = \sin \omega$.

Die ſenkrechte z ſchneidet auf dem Halbmeſſer durch P vom Mittelpuncte aus das Stück $\text{col}\,\omega$ ab. Eben dieſes iſt auch $= \frac{x}{\text{col}\varphi}$. Alſo iſt

III. $\text{col}\,\omega = \frac{x}{\text{col}\varphi}$.

Dazu die angeführte Differentialgleichung

IV. $\partial \varphi = \tang \alpha . \frac{\partial \omega}{\cos \omega}$.

Digitized by Google

Hier sind vier Gleichungen, weil zwey Winkel zu den Coordinaten, x, y, z, hinzukommen. Zuerst schaffe man ω und ∂ω weg. Es ist $\partial z = \cos\omega . \partial\omega$, also $\frac{\partial\omega}{\cos\omega} = \frac{\partial z}{\cos\omega^2} = \frac{\cos\varphi^2}{x^2}\partial z$. Daraus ist $\partial\varphi = \tang\alpha . \frac{\cos\varphi^2}{x^2}\partial z$. Ferner ist

$$\partial y = \tang\varphi . \partial x + \frac{x\partial\varphi}{\cos\varphi^2}, \text{ das ist,}$$

$$\partial y = \frac{y}{x}\partial x + \frac{\tang\alpha}{x}\partial z, \text{ die gesuchte Differentialgleichung zwischen } x, y, z. \text{ Geordnet ist sie}$$

$$\frac{y}{x}\partial x - \partial y + \frac{\tang\alpha}{x}\partial z = 0.$$

Für die Krümmungs-Ebene sind nun die Bestimmungen folgende:

$$\tang\eta = \frac{y}{x}, \text{ also } \eta = \varphi.$$

$$\tang\vartheta = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\tang\alpha} = \frac{\cos\omega}{\tang\alpha}.$$

$$h = \tang\alpha . \frac{z}{y} = \frac{\tang\alpha . \tang\omega}{\sin\varphi}.$$

Für $\varphi = 0$, und $\omega = 0$ wird $\frac{\tang\omega}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tang\alpha}$, und daher $h = 1 =$ dem Halbmesser. Nämlich, wenn M sehr nahe bey B genommen wird, so ist der Bogen BM nahe ein Kreisbogen, und daher nahe $\frac{\tang\omega}{\sin\varphi} = \cot\alpha$. In dem Puncte B selbst erreicht der Quotient die Gränze $\cot\alpha$.

Man bemerke die Übereinstimmung dieser Formeln mit denen für eine Kegelfläche. Die gerade berührende an der Kugel in der Ebene des Quadranten AF in dem Puncte M der Spirale ist als die Seite eines Kegels zu betrachten, welche unter einem gegebenen Winkel geschnit-

Digitized by Google

ten wird. Daher ist hier ebenfalls $\gamma = \varphi$. Aber die Neigung dieser berührenden gegen die Grundfläche oder die Ebene des Kreisbogens BP ist veränderlich. Dieser Winkel ist $90° - \omega$, wenn der Bogen $PM = \omega$ ist. Also ist der Sinus desselben $= \cos\omega$. Für die konische Spirale ist $\tang\vartheta = \frac{c}{b \tang\alpha}$. Hier ist $\frac{c}{b}$ der Sinus des Neigungswinkels der Seitenlinie gegen die Grundfläche, statt dessen für die sphärische Spirale $\cos\omega$ kommt. — Für die konische Spirale ist ferner $h = \frac{b \tang\alpha}{c \sin\varphi} z$. Hier ist $\frac{bz}{c}$ der Theil der Seitenlinie des Kegels von der Grundebene bis an den Punct der Spirale. Für diese ist an der sphärischen Spirale die berührende von M bis an die Grundebene zu setzen. Diese ist $= \tang\omega$. So verwandelt sich jener Werth von h in den von h für die Kugel.

30. Das Verfahren, die Krümmungs-Ebene für eine gedoppelt krumme Linie zu finden, hat viel ähnliches mit dem Verfahren für die berührenden an einfach krummen Linien. Für diese ist entweder eine endliche Gleichung gegeben, und man bestimmt daraus die Lage der berührenden; oder es ist die Differentialgleichung, $P\partial x = Q\partial y$, gegeben, und man sucht daraus die endliche Gleichung für die Curve. So sind für eine gedoppelt krumme Linie auch entweder zwey endliche Gleichungen vorhanden, woraus die Lage der Krümmungs-Ebene für jeden Punct bestimmt wird, oder es ist eine Differentialgleichung für die drey Coordinaten gegeben, woraus die beiden endlichen Gleichungen zu suchen sind. Dieses wird aber viel öfterer nicht zu bewerkstelligen seyn, als bey den Gleichungen für zwey veränderliche Größen.

31. Man kann zuerst untersuchen, ob sich die Gleichung nicht in zwey, besonders integrirbare, Theile zerlegen lasse. Z. B. es sey gegeben die Gleichung,

$$aa\partial x - 2xy\partial x + (2az - 2xz)\,dz = 0.$$

Digitized by Google

Diese zerlege man in die Theile,

$$aa\partial x + 2az\partial z = o,$$
$$2xy\partial y + 2xz\partial z = o.$$

Daraus ist I. $ax + zz = \text{const.}$
II. $yy + zz = \text{const.}$

Nimmt man die Constanten jede $= aa$, so ist I. $ax + zz = aa$; II. $yy + zz = aa$; und daraus III. $ax = yy$. Die beiden letztern sind die Gleichungen in (4).

Es sey gegeben die Gleichung,

$$(4xz+2by)dx - abdy + \left(2az - \frac{4yz(4zz+2by)}{ab}\right)dz = o.$$

Setzt man hier $-ab\partial y + 2az\partial z = o$, so bleibt übrig $\partial x - \frac{4yz}{ab}\partial z = o$. Jene Gleichung giebt I. $by = zz$. Daher ist $\partial x = \frac{4z^5\partial z}{ab^3}$, und II. $ab^2x = z^4$, auch III. $ax = yy$. Dieses sind die Gleichungen in (5.). Constanten sind hier nicht zugesetzt.

32. Ist eine solche Zerlegung nicht möglich, so suche man die Gleichung für diejenige krumme Fläche zu entdecken, auf welcher die gedoppelt krumme Linie beschrieben werden mag. Diese verbinde man mit der gegebenen Differentialgleichung, und untersuche, ob sie dadurch integrirbar gemacht werden könne. Die Integralgleichung und die Gleichung für die krumme Fläche sind dann die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie. Z. B. es sey gegeben die Gleichung,

$$x\partial y - y\partial x = \frac{mab}{cc}(c-z)\partial z.$$

Man untersuche, ob sich die gedoppelt krumme Linie, für welche sie gehört, auf einer Kegelfläche beschreiben lasse. Der Mittelpunct der Grundfläche sey der Anfang der rechtwinklichten Coordinaten, und die senkrechte Axe des Kegels falle in die Axe der z. Der Halbmesser der Grundfläche

Digitized by Google

sey a, die Seite b, die Höhe c, so ist die Gleichung für die Kegelfläche,

$$c^2 (x^2 + y^2) = a^2 (c - z)^2,$$

wie man leicht finden wird. Diese mit jener durch Division verbunden verwandelt sie in die Gleichung,

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \frac{mb}{a} \cdot \frac{\partial z}{c - z}.$$

Man setze zur Abkürzung, $\frac{y}{x} = u$, so ist $\frac{x\partial y - y\partial x}{xx} = \partial u$.

Auch ist $\frac{xx + yy}{xx} = 1 + uu$. Also ist $\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \frac{\partial u}{1 + uu}$, und $\frac{\partial u}{1 + uu} = \frac{mb}{a} \cdot \frac{\partial z}{c - z}$.

Die Integration giebt (Integralformel, 15. 5.).

$$\text{Ang. tang } u = \frac{mb}{a} \log. \frac{\text{const}}{c - z},$$

das ist, $\text{Ang. tang } \frac{y}{x} = \frac{mb}{a} \log. \frac{\text{const}}{c - z}$.

Dieses ist eine der Gleichungen für die krumme Linie, die andere ist für die krumme Fläche, nämlich $cc(xx + yy) = aa(c - z)^2$.

33. Es wird gegeben die Gleichung,

$$x\partial y - y\partial x = m\partial z.$$

Man nehme die Gleichung für die Coordinaten einer Kegelfläche, deren Anfang in dem Mittelpuncte der Kugel sey, so ist diese,

$$xx + yy + zz = aa,$$

wenn a der Halbmesser der Kugel ist. Vermittelst dieser wird jene verwandelt in folgende,

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \frac{m\partial z}{aa - zz}.$$

Die Integration giebt

Digitized by Google

$$\text{Ang. tang } \frac{y}{x} = \frac{m}{2a} \log. \frac{a+z}{a-z} + \text{Conſt.}$$

Dieſe Gleichung und die angenommene beſtimmen die Curve.

34. Die Kugelfläche iſt ſehr geſchickt, um darauf jede gedoppelt krumme Linie zu entwerfen. Man gedenke ſich nach jedem Puncte der Curve von dem Mittelpuncte der Kugel her gerade Linien, welche durch ihre Durchſchnitte mit der Kugelfläche die Projection der Curve geben. Die Projection auf der Kugelfläche gewährt eine deutlichere Vorſtellung von dem Laufe der Curve, als die gedoppelte auf zwey abgeſonderten Ebenen. Die Projectionslinie iſt ſelbſt eine gedoppelt krumme, wenn ſie nicht etwa ein Kreis iſt. Die Darſtellung des Laufs der Weltkörper nach Länge und Breite iſt nichts anders als eine Projection der Bahn auf eine Kugelfläche von einem unbeſtimmten Halbmeſſer.

35. Es ſeyn (Fig. 72.) AM, MN, NP (x, y, z) drey rechtwinklichte Coordinaten zu dem Puncte P einer gedoppelt krummen Linie. Man ziehe von dem Anfangspuncte A nach P die gerade AP = u, ſetze die Winkel MAN = φ; PAN = ω, ſo iſt NP = u sin ω; AN = u cos ω; MN = u cos ω. sin φ; AM = u cos ω. cos φ, oder

$$x = u \cos\omega . \cos\varphi; \quad y = u \cos\omega . \sin\varphi;$$

$$z = u \sin\omega.$$

Die zu einem Puncte gehörigen Coordinaten behalten ihre Verhältniſſe, wie groß oder klein auch u gegen den Halbmeſſer der Kugel ſeyn mag. Haben alle Glieder einer Gleichung gleich viele Dimenſionen nach den veränderlichen x, y, z, ſo geht u heraus, und die Gleichung wird eine zwiſchen zwey veränderlichen Winkeln φ und ω.

36. Man ziehe an einem Puncte P der doppelt gekrümmten QPR (Fig. 72.) eine berührende PS (7.), welche die Ebene AMN (der x, y) in S treffe, verbinden AS, ſo iſt dieſe der Durchſchnitt der Ebene APS mit der AMN. Von dem Grundpuncte N der Ordinate PN

Digitized by Google

ziehe man NO senkrecht auf AS, so ist AS senkrecht auf die Ebene PNO, und daher senkrecht auf die gerade PO; folglich PON der Neigungswinkel der Ebene APS gegen die AMN.

Es bleibe $MAN = \varphi$; $PAN = \omega$; und es sey $MAS = \gamma$; $PON = \vartheta$, so ist $ON = PN \cdot \cot \vartheta = z \cot \vartheta$. Ferner $LN = \frac{ON}{\cos LNO} = \frac{z \cot \vartheta}{\cos \gamma}$, und $ML = AM \cdot \tang \gamma = x \tang \gamma$. Da $y = ML + LN$ ist, so ist $y = x \tang \gamma + \frac{z \cot \vartheta}{\cos \gamma}$,

oder

$$x \sin \gamma - y \cos \gamma + z \cot \vartheta = 0.$$

Dieses ist dieselbe Gleichung, wie in (21.) für die Coordinaten irgend einer Ebene gefunden ist, nur daß das h dort hier wegfällt, weil die Ebene APS durch den Anfang der Coordinaten geht.

37. Man setze für x, y, z ihre Werthe aus (35.), so ist nach der Division durch u,

$$\cos \varphi \cdot \cos \omega \cdot \sin \gamma - \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \cos \gamma + \sin \omega \cdot \cot \vartheta = 0.$$

Da $\sin \varphi \cdot \cos \gamma - \cos \varphi \cdot \sin \gamma = \sin (\varphi - \gamma)$ ist, so ist

$$\tang \omega = \sin (\varphi - \gamma) \cdot \tang \vartheta.$$

Diese Gleichung wird auch durch die sphärische Trigonometrie gefunden, da die Bogen zu $\varphi - \gamma$ und ω die Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreyecks sind, in welchem der Winkel ϑ an der Seite liegt, welche der Bogen zu $\varphi - \gamma$ ist.

38. Bey der stetigen Veränderung oder Bewegung des Punctes P verändert sich die Lage der AP entweder so, daß sie in derselben Ebene APS bleibt, oder die Richtung PS und die Ebene APS ändern mit der AP zugleich ihre Lage. So fern die Veränderungen stetig oder unendlich klein gedacht werden, kann in jedem Puncte die eine oder die andere Statt haben. Die Differentialgleichung zwischen den vier Winkeln φ, ω, γ, ϑ,

Digitized by Google

muß also in zwey Theile zerfallen, die jeder für sich bestehen. Sie ist

$$\frac{\partial \omega}{\cos \omega^2} = \cos(\varphi - \eta).\ \text{tang}\,\vartheta\ (\partial\varphi - \partial\eta)$$

$$+ \sin(\varphi - \eta).\ \frac{\partial \vartheta}{\cos \vartheta^2}$$

Wenn P S eine berührende ist, so bleiben η und ϑ unverändert. Alsdann ist $\frac{\partial \omega}{\cos \omega^2} = \cos(\varphi - \eta).\tang \vartheta.\partial\varphi$.

Das Differentialverhältniß $\partial\omega : \partial\varphi$ wird durch unendlich kleine Veränderungen von η und ϑ nicht geändert, da es, wie jedes Differentialverhältniß bloß durch die zugehörigen endlichen Größen bestimmt wird. Es besteht also jener Theil der Differentialgleichung für sich, so wie der andere Theil, nämlich

$$\sin(\varphi - \eta).\frac{\partial \vartheta}{\cos \vartheta^2} = \cos(\varphi - \eta).\tang \vartheta.\partial\eta.$$

Man dividire jene erstere Gleichung durch die ursprüngliche, so ist

$$\frac{\partial \omega}{\sin \omega.\cos \omega} = \cot(\varphi - \eta).\partial\varphi,$$

$$\text{oder}\ \frac{2\partial\omega}{\sin 2\omega} = \frac{\partial\varphi}{\text{tang}(\varphi - \eta)}.$$

Die zweyte Gleichung wird durch eine leichte Abänderung diese:

$$\frac{2\partial\vartheta}{\sin 2\vartheta} = \frac{\partial\eta}{\text{tang}(\varphi - \eta)}.$$

In der Astronomie ist φ die Länge, ω die Breite, η die Länge der Knotenlinie, und ϑ die Neigung der Bahn eines Weltkörpers in Beziehung auf eine Ebene durch den Centralkörper A.

39. Man verlege den Anfang der Coordinaten in einen Punct, dessen Coordinaten in Beziehung auf die zuerst genommenen Axen sind, $+ a$, $+ b$, $+ c$, setze die neuen Coordinaten $= x'$, y', z', der vorigen parallel,

Digitized by Google

so ist $x = a + x'$; $y = b + y'$; $z = c + z'$. Diese Verlegung ist in der Astronomie brauchbar, wenn man die von der Erde aus beobachteten Örter eines Weltkörpers auf ihre Lage gegen den Mittelpunct der Sonne bringen will. Die Ebenen der Coordinaten können hier seyn, die Ebene der Ekliptik, diejenige der Nachtgleichen und des Colurs der Sonnenstillstände. Diesen drey Ebenen lege man drey parallele durch den Mittelpunct der Sonne, und gebrauche die hier angezeigten Substitutionen. Durch die drey Coordinaten für den Ort der Erde in Absicht auf die Sonne sind die Abstände, a, b, c, für den Augenblick der Beobachtung bekannt. Durch die beobachtete Länge und Breite werden die Abstände, x, y, z, vermittelst der Entfernung u des Körpers von der Erde gegeben, dadurch die x', y', z', in Beziehung auf die Sonne, und aus diesen wiederum die Entfernungen u' von der Sonne, mit der heliocentrischen Länge und Breite, alles mittelst der Entfernungen u von der Erde zur Zeit jeder Beobachtung. Für die Lage der Bahn in jedem Augenblick dient die Gleichung (36.). Ist jene gar nicht, oder wenig veränderlich, so dient sie bey verschiedenen Werthen der Abstände oder Coordinaten die Lage der Bahn zu finden. Zu allem muß man aber noch die bekannten Gesetze elliptischer oder parabolischer Laufbahnen und ihrer geometrischen Eigenschaften nehmen. Man sehe von dieser Methode eine Abhandlung von la Grange in dem astronom. Jahrbuche für das J. 1783. Berlin 1780.

40. Zur Übertragung der Projectionen von einer Ebene auf eine andere, zur Verwandlung der Gleichungen für krumme Flächen, und besonders in der höhern Mechanik, ist es nöthig, die Axen der Coordinaten zu verändern, auf ähnliche Art wie es bey einfach krummen Linien geschieht. Die Axen der Coordinaten kann man füglich auf einander senkrecht seyn lassen. Auch lasse man sie zuerst durch denselben Anfangspunct der Coordinaten gehen. Verbindet man hernach damit die Verlegung des Anfangspunctes (39.), so kann man den unter sich rechtwinklichten Coordinaten jede beliebige Lage geben. Die

Digitized by Google

Formeln für die Verlegung der Axen werden am Schlusse dieses Artikels eine bequeme Stelle finden, wo durch sie keine Untersuchung unterbrochen wird. Sie werden am leichtesten und deutlichsten durch Hülfe der sphärischen Trigonometrie gefunden.

41. Es stellt Fig. 73. die Projectionen einiger größten Kreise und Kreisbogen stereographisch vor, auf dem Kreise BCDE, als der Ebene der Projection, worauf A der Mittelpunct ist; BD ist die Axe der x, CE der y, und der in A auf die Ebene der Projection senkrechte Durchmesser die Axe der z. Die geraden BD, CE sind die Projectionen zweyer aufeinander und auf den Kreis BCDE senkrechten Kreise. Der Punct P auf der Kugelfläche sey durch die geradlinichten Abstände von den Ebenen dieser Kreise gegeben. Man ziehe durch P die Kreisbogen PM, PN senkrecht auf CE, BD, so ist sin PM der Abstand von der Ebene CE (der y, z); sin PN der Abstand von der Ebene BD (der x, z). Auch ziehe man den Bogen PA, dessen Ergänzung zum Quadranten PQ ist, so ist sin PQ, das ist cos PA, der Abstand von der Ebene BCDE (der x, y), wenn der Halbmesser = 1 ist. Es ist nun

$$x = \sin PM; \quad y = \sin PN; \quad z = \cos PA.$$

42. Anstatt des Kreises BCDE nehme man den Kreis fFHGg zur Ebene der Coordinaten X, Y; setze auf diesen und auf BCDE den Kreis KHAL senkrecht, auf welchem Z der Pol von FHG sey. Durch Z, F, G ziehe man den Kreis FZG, so stehen die Ebenen der Kreise FHG, FZG, HAZ senkrecht auf einander. Die Axe der + X gehe durch F, der + Y durch H, der + Z durch Z, und zugleich jede durch den Mittelpunct der Kugel. So sind die Kreise FHG, FZG, HAZ die Ebenen der Coordinaten X, Y; X, Z; Y, Z. Die Axen der X, Y können auch durch andere Puncte des Kreises FHG, als F und H, gelegt werden; allein um die Rechnung zu erleichtern geschieht diese Annahme. Aus dieser können hernach die Formeln für eine andere Lage der X und Y her-

Digitized by Google

geleitet werden, wobey die Rechnung einfacher wird, weil die Axe der Z alsdann ungeändert bleibt.

Man ziehe von P auf HAZ den senkrechten Bogen PX, auf FZG den senkrechten Bogen PY, und verbinde P, Z durch den Bogen PZ, welcher verlängert den Kreis FHG in R schneide. Nun ist sin PX der Abstand des Punctes von der Ebene der Y, Z; ferner PY den Abstand von der Ebene der X, Z; und sin PR oder cos PZ der Abstand von der Ebene der X, Y. Demnach ist

$$\sin PX = X;\ \sin PY = Y;\ \cos PZ = Z.$$

Es sey der W. BAF $= \eta$; und der Winkel der Ebenen BCDE, FHG $= \vartheta$, so ist der Bogen AZ $= \vartheta$. Dieser Bogen ist positiv, wenn er, wie in der Figur von A aus nach der Gegend der negativen Y genommen wird, oder wenn die Ebene FHG von K an nach der Gegend der positiven Z über der Ebene BCD liegt.

43. Es sind nun so wohl X, Y, Z durch x, y, z, als diese durch jene auszudrucken, das letztere insbesondere in der Absicht, jene erstern in die Gleichung für eine Fläche einführen zu können. Es kommt hier auf die Verbindung des schiefwinkligen Dreyecks PAZ mit den rechtwinkligen Dreyecken PMA, PNA, PXZ, PYZ und dieser unter sich an.

I. $\cos PA = \cos PZ . \cos AZ + \sin PZ . \sin AZ . \cos AZP.$

$\cos AZP = \sin PZY$, und $\sin PZ . \sin PZY = \sin PY.$

Daraus

$$z = Z . \cos\vartheta + Y . \sin\vartheta.$$

II. $\sin PX = \sin PA . \sin PAX.$

$\sin PAX = \sin PAM . \cos CAK + \cos PAM . \sin CAK.$

und $\cos PAM = \sin PAN.$

Daher

$$X = x\cos\eta + y\sin\eta.$$

Diese Formel ist der in I. analog. Die Axen x, y, X liegen in einer Ebene, wie die Axen Y, Z, z.

III. $\cos PZ = \cos AP . \cos AZ + \sin AP . \sin AZ . \cos PAZ.$

$$\cos PAZ = -\cos PAX.$$

Digitized by Google

$\cos PAX = \cos PAM . \cos CAK - \sin PAM . \sin CAK .$

$Z = z \cos\vartheta + x \sin\eta . \sin\vartheta - y \cos\eta \sin\vartheta .$

Aus diesen drey, durch Hülfe der Trigonometrie gefundenen, Gleichungen werden die Werthe von Y, z und y durch gehörige Verbindung derselben hergeleitet. Es ist aus I. und III, wenn z weggeschafft wird,

IV. $Y = y \cos\eta . \cos\vartheta - x \sin\eta . \cos\vartheta + z \sin\vartheta .$

Ferner, wenn aus II. und III. y weggeschafft, und aus I. der Werth von x gesetzt wird.

V. $x = X \cos\eta + Z \sin\eta . \sin\vartheta - Y \sin\eta . \cos\vartheta .$

Auf ähnliche Art, durch Wegschaffung von x,

VI. $y = Y \cos\eta . \cos\vartheta + X \sin\eta - Z \cos\eta . \sin\vartheta .$

Die Formeln entstehen paarweise aus einander, wenn x, y, z, η, ϑ mit Z, Y, X, ϑ, η vertauscht werden.

44. In den Dreyecken BAZ, CAZ, worin eine Seite ein Quadrant ist, ist $\cos BZ = \sin AZ . \cos . BAZ . = \sin\vartheta . \sin\eta$; und $\cos CZ = \sin AZ . \cos CAZ = -\sin\vartheta . \cos\eta$, negativ, da CZ größer als ein Quadrant ist. Eben so ist in den Dreyecken DAH, EAH, worin AH das Complement von AZ zum Quadranten ist, $\cos DH = \sin AH . \cos DAH = \cos\vartheta . \sin\eta$, und $\cos EH = \sin AH . \cos EAH = -\cos\vartheta . \cos\eta$. Oder wenn man für DH und EH ihre Ergänzungen zum Halbkreise, BH und CH, nimmt, $\cos BH = -\cos\vartheta . \sin\eta$, $\cos CH = \cos\vartheta . \cos\eta$. Der Bogen BH ist, um Verwirrung zu vermeiden, nicht ausgezogen. Auch ist $\cos\eta = \cos BF$ und $\sin\eta = \cos FC$. Setzt man diese Ausdrücke in die Formeln für X, Y, Z, so ist

$X = x . \cos BF + y . \cos CF + z . \cos AF .$

$Y = x \cos BH + y \cos CH + z \cos AH ,$

$Z = x \cos BZ + y \cos CZ + z \cos AZ .$

Die Bogen BF, CF, AF gehören zu den Winkeln, welche die Axen der x, y, z nach ihren positiven Richtungen mit der Axe der positiven X machen. Das Glied, $z \cos AF$, ist der Gleichförmigkeit wegen zugesetzt, welches geschehen durfte, da AF ein Quadrant, also $\cos AF = 0$ ist. Die

Digitized by Google

Bogen BH, CH, AH gehören auf gleiche Art zu den Winkeln derselben Axen mit der Axe der + Y, und die Bogen BZ, CZ, AZ zu den Winkeln derselben mit der Axe der + Z.

45. In der sphärischen Trigonometrie wird gezeigt, daß $\cos AZ^2 + \cos BZ^2 + \cos CZ^2 = 1$ ist; auch, daß bey jeder Lage zweyer Puncte H, Z, ist

$$\cos HZ = \cos AH.\cos AZ + \cos BH.\cos BZ + \cos CH.\cos CZ.$$

Nur müssen die Bogen AB, AC, BC, wie hier, Quadranten seyn. Für den gegenwärtigen Fall kann man es aus den vorher gefundenen Werthen der Bogen herleiten. Da die Bogen HZ, FZ, FH Quadranten sind, so sind ihre Cosinus $= 0$, und es ist für die drey Paare von Puncten, H und Z; F und Z; F und H,

$$0 = \cos AH.\cos AZ + \cos BH.\cos BZ + \cos CH.\cos CZ.$$
$$0 = \cos AF.\cos AZ + \cos BF.\cos BZ + \cos CF.\cos CZ.$$
$$0 = \cos AF.\cos AH + \cos BF.\cos BH + \cos CF.\cos CH.$$

46. Man verändere nun die Lage der Axen der Coordinaten X, Y, ohne die Lage der Axe der Z, das ist, die Lage der Ebene FHG zu ändern. Man nehme nämlich auf dem Kreise fFGg zwey Puncte, S, T, die um 90 Gr. von einander abstehen, lege durch sie und den Pol Z zwey Kreise, und lasse diese nebst dem FHG die drey Ebenen der Coordinaten seyn. Die neuen Coordinaten seyn p, q, r, und zwar gehe die Axe der p durch S, der q durch T, der r durch Z. Der Bogen FS sey $= \zeta$. Man setze nun in den Formeln (43.)

statt x, y, z, X, Y, Z, η, ϑ,
hier X, Y, Z, p, q, r, ζ, 0,

so ist

I. $X = p\cos\zeta - q\sin\zeta$.
II. $Y = q\cos\zeta + p\sin\zeta$.
III. $Z = r$.

Digitized by Google

Setzt man diese Werthe in die Werthe von x, y, z, so ist

IV. $x = p(\cos\eta.\cos\zeta - \sin\eta.\sin\zeta.\cos\vartheta) - q(\cos\eta.\sin\zeta + \sin\eta.\cos\zeta.\cos\vartheta) + r\sin\eta.\sin\vartheta.$

IV. $y = p(\sin\eta.\cos\zeta + \cos\eta.\sin\zeta.\cos\vartheta) - q(\sin\eta.\sin\zeta - \cos\eta.\cos\zeta.\cos\vartheta) - r\cos\eta.\sin\vartheta.$

V. $z = p\sin\zeta.\sin\vartheta + q\cos\zeta.\sin\vartheta + r\cos\vartheta.$

Man bemerkt hier leicht die Symmetrie in den Coefficienten von p, q, r. Der Coefficient von p in IV. ist der Cosinus der einen Seite eines schiefwinkligen sphärischen Dreyecks, dessen zwey andern Seiten die Bogen zu den Winkeln η und ζ sind, und den Winkel $2R - \vartheta$ einschließen. Auf ähnliche Art sind die drey andern zweytheiligen Coefficienten beschaffen. Auch ist $\sin\eta.\sin\vartheta$ der Cosinus der Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreyecks, dessen Katheten die Bogen zu den Winkeln $R - \eta$ und $R - \vartheta$ sind. So auch die drey andern Coefficienten dieser Art.

Die Formel für y entsteht aus der für x, wenn p, q, r mit $-q$, $-p$, $-r$, und dabey η mit $90° - \eta$; ζ mit $90° - \zeta$ vertauscht werden. — Die Formel für z entsteht aus der für x, wenn statt p, q, r ihre entgegengesetzten genommen, $\eta = 90°$, und $90° - \vartheta$ statt ϑ gesetzt werden.

47. In Eulers Analysis des Unendlichen, Anhang, §. 88—92 sind diese Formeln ohne Hülfe der sphärischen Trigonometrie, durch eigene geometrische Zusammensetzungen gefunden. Zur Vergleichung der Rechnung bemerke man, daß die dortigen x, y, z, t, u, v, p, q, r, ζ, ϑ, η hier sind x, $-y$, $-z$, X, $-Y$, $-Z$, p, $-q$, $-r$, η, ζ, ϑ. Auch in der Mécanique celeste von la Place (deutsche Übers. S. 76.) sind diese Formeln entwickelt. Für x, y, z, φ, Ψ, ϑ daselbst stehen hier $-p$, $-q$, $-r$, $2R - \eta$, ζ, ϑ.

48. Zu den Werthen von x, y, z in (46.) kann

Digitized by Google

man noch drey beliebige Constanten, als f, g, h, als Coordinaten zu einem andern Anfangspuncte, zufügen, so daß in allem sechs Größen, drey Winkel und drey Linien, zur Veränderung der Axen angenommen werden können. Um den Coefficienten einer Gleichung für drey veränderliche Größen bestimmte Werthe zu geben, besonders sie wegzuschaffen, ist dieses nützlich. Doch müssen die Werthe der Sinus und Cosinus eigentliche Brüche werden.

Krumme Fläche ist eine solche, auf welcher nicht zwischen irgend zwey Puncten eine gerade Linie gezogen werden kann, die ganz in die Fläche falle. Auf den cylindrischen und konischen Flächen, welche durch die Drehung einer geraden Linie beschrieben werden, fällt diese erzeugende gerade Linie zwar ganz in die krumme Fläche, aber zwischen je zwey Puncten, die nicht auf jener liegen, ist auch auf solchen Flächen keine gerade Linie zu ziehen möglich. So auch auf andern krummen Flächen, die durch Bewegungen einer geraden Linie erzeugt werden.

Euler erklärt (Introd. in Anal. Inf. T. II. App. Cap. 1.) die krumme Fläche für diejenige, auf welcher nicht irgend vier Puncte in derselben Ebene liegen. Dieses ist zweydeutig. Denn auf dem Durchschnitte einer krummen Fläche mit einer Ebene liegen alle beiden gemeinschaftlichen Puncte in derselben Ebene. Was E. hier zugleich von der ebenen Oberfläche bemerkt, daß sie diejenige sey, auf welcher irgend vier Puncte in derselben Ebene liegen, möchte eine Erklärung durch gleiche Ausdrücke seyn.

1. Die Beschaffenheit einer krummen Fläche wird zunächst aus ihrer Entstehungsart erkannt, wobey man entweder, wenn es thunlich ist, blos geometrische Hülfsmittel gebraucht, oder sich der allgemeinen analytischen Rechnung bedient, durch Anwendung einer ähnlichen Methode, wie bey krummen Linien, besonders denen mit doppelter Krümmung. Man kann auch von den Gleichungen zwischen den Coordinaten ausgehen, und daraus die Ge-

Digitized by Google

stelle und die Eigenschaften der krummen Fläche herleiten, eben so wie bey krummen Linien. — Die Untersuchungen über die Beschaffenheit der krummen Fläche betreffen ferner die berührenden Ebenen, die Normalen, die Krümmung, die Durchschnitte einer krummen Fläche mit einer Ebene oder einer andern krummen Fläche; dann auch noch die Complanationen, Rektifikationen und Abwickelungen.

2. Die analytische Behandlung verfährt eben so mit den krummen Flächen als mit den krummen Linien von doppelter Krümmung. Drey Ebenen werden senkrecht auf einander gesetzt; ihre drey Durchschnittslinien sind die Axen der drey Folgen von Coordinaten; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct ist der Anfang der Coordinaten. Diese sind die Abstände irgend eines Punctes der krummen Fläche von jeder der drey Coordinaten-Ebenen. Die Natur der krummen Fläche wird ausgedruckt durch eine Gleichung zwischen allen drey Coordinaten, x, y, z. In dieser kann man zwey nach Belieben annehmen, so fern man dadurch nicht über die Gränze der körperlichen Oberfläche hinausgeht, und die dritte ergiebt sich durch die Auflösung der Gleichung. Wird eine der Ordinaten bestimmt, z. B. z, so ist die Gleichung zwischen den veränderlichen x und y, die Gleichung für den Schnitt der Fläche durch eine Ebene, die mit der Ebene der x und y in dem Abstande z parallel gelegt wird. Die Kurven, welche durch die parallelen Schnitte gebildet werden, sind alle von gleicher Natur, weil ihre Gleichungen nur durch die Größe einer gegebenen Linie, des Abstandes von der Coordinaten-Ebene, sich unterscheiden.

Darstellung der Ebenen durch Gleichungen.

3. Im bessern Verständniß dieser Methode für krumme Flächen ist es dienlich, sie auf ebene Flächen anzuwenden, welche in dem Artikel, Ebene, bloß rein geometrisch betrachtet wird. Hier lassen sich beide Arten von Flächen bequem zusammen abhandeln. Die Sätze für die Ebenen finden hier unmittelbar ihre Anwendung. Man vergleiche mit diesem Artikel den Art. Linie.

Digitized by Google

4. Die Ebene der AM, MN (x, y) (Fig. 72.) werde von einer Ebene in der Linie BB geschnitten. Die Durchschnittslinie mache mit AX, der Axe der x, den spitzen Winkel ACB oder MCO = γ. Sie stehe gegen jene unter dem Winkel φ geneigt. Ein Punct derselben sey P. Von diesem werde auf die Ebene (x, y) die senkrechte PN gelassen. Man ziehe NO senkrecht auf BB, und verbinde PO. Die Ebene PON steht senkrecht auf die Ebene der x, y (Ebene, 21.), und BB ist senkrecht auf PON (das. 25.); also ist PON der Neigungswinkel φ. Dieser ist für alle Puncte P unveränderlich, als welches der Charakter der Ebene ist. Es seyn die rechtwinklichten Coordinaten, AM = x; MN = y; NP = z; so ist $NO = \frac{z}{\tang \varphi}$; ferner $NQ = \frac{NO}{\sin NQO} = \frac{z}{\cos \gamma . \tang \varphi}$. Noch sey AC = h, so ist CM = x − h, und MQ = (x − h) tang γ; also $MN = y = (x - h) \tang \gamma + \frac{z}{\cos \gamma . \tang \varphi}$. Folglich ist die Gleichung für die Ebene,

$$x . \sin \gamma - y . \cos \gamma + z . \cot \varphi - h . \sin \gamma = 0.$$

Diese Gleichung ist vom ersten Grade, eben so wie eine Gleichung für eine gerade Linie.

5. Die Gleichung für eine Ebene mit irgend welchen Coefficienten sey

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind denen der Gleichung (4.) proportional. Dadurch ergeben sich die Functionen von γ und φ, nebst h. Oder man dividire beide Gleichungen durch einen der gleichnamigen Coefficienten, so kann man die Coefficienten gerade zu gleich setzen. Es ist also $\tang \gamma = \frac{A}{B}$; $\sin \gamma = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $\cos \gamma = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Der Sinus von γ bleibt positiv,

Digitized by Google

weil γ immer einen Winkel unter zwey rechten bedeutet; aber $\cos\gamma$ wird negativ für ungleichnamige A und B, das ist, für gleichnamige Coefficienten von x und y.

Ferner ist $\frac{\cot\vartheta}{\sin\gamma} = \frac{C}{A}$, und $\tang\vartheta = \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{C}$;

oder $\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$. Drittens ist $h = \frac{D}{A}$.

Einer der Coefficienten ist willkührlich, da es bey der Bestimmung der Winkel und der Länge h nur auf Verhältnisse ankommt. Auch wird eine Ebene durch drey Puncte bestimmt. Dieses giebt nur drey Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten.

Zu bemerken ist noch, daß die positive Beschaffenheit der Winkel und der Linie h eine Lage wie in der Figur anzeigt. Die mit BB durch A parallele geht zwischen den Axen der gleichnamigen Coordinaten, x, y, durch; die mit NO, der Richtung der Neigungs-Ebene, durch A gezogene liegt zwischen den Axen der ungleichnamigen Coordinaten x, y. Daher sind γ und ϑ spitze Winkel. — Die Vorzeichen der Coefficienten sind so angenommen, daß die absoluten Werthe von A, B, C zu spitzen Winkeln γ, ϑ gehören, so wie auch $\frac{D}{A}$ ein positives h giebt.

6. Der Winkel der Ebene mit der Ebene der x, z sey $= \vartheta'$, und der Winkel derselben mit der Ebene der y, z sey ϑ'', so ist, auf gleiche Weise, wie $\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ ist, auch

$$\cos\vartheta' = \frac{-B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}, \quad \cos\vartheta'' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Folglich ist

$$(\cos\vartheta)^2 + (\cos\vartheta')^2 + (\cos\vartheta'')^2 = 1.$$

Der Satz läßt sich auch sehr leicht daher erweisen, weil das Quadrat des Abstandes irgend eines Punctes von dem Anfange der drey rechtwinklichten Coordinaten gleich ist

Digitized by Google

der Summe von den Quadraten der Abstände desselben Punctes von den drey Coordinaten-Ebenen.

7. Da eine Ebene durch drey Puncte bestimmt wird, so ist ihre Gleichung durch drey Folgen von Coordinaten gegeben. Diese seyn x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'', ihre ersten und zweyten Unterschiede Δx, $\Delta^2 x$; Δy, $\Delta^2 y$; Δz, $\Delta^2 z$, d. i. $\Delta x = x' - x$; $\Delta^2 x = x'' - x' - (x' - x)$, und so bey den andern Unterschieden). Es ist, wie in dem vorherg. Art. 22.

$$\Delta x . \sin\eta - \Delta y . \cos\eta + \Delta z . \cot\vartheta = 0.$$

$$\Delta^2 x . \sin\eta - \Delta^2 y . \cos\eta + \Delta^2 z . \cot\vartheta = 0.$$

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{\Delta y . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 y}{\Delta x . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 x}.$$

Aus einer jener beiden Gleichungen wird nun $\cot\vartheta$ oder $\operatorname{tang}\vartheta$ gefunden, und dann noch aus den Gleichungen zwischen x, y, z in (4.) selbst der Abstand h.

8. Alle Ebenen, deren Gleichungen in den Coefficienten von x, y, z übereinstimmen, sind sich parallel, und umgekehrt. Das gegebene Glied bestimmt nur den Punct, in welchem die Ebene eine der Axen trifft.

9. Einer Ebene eine andere durch einen gegebenen Punct parallel zu legen, muß nur das unveränderliche Glied aus den zu dem gegebenen Puncte gehörigen Coordinaten bestimmt werden. Diese seyn p, q, r; das unveränderliche Glied in der Gleichung für die verlangte Ebene sey $= D'$, so ist $Ap - Bq + Cr - D' = 0$, wenn die Gleichung für die gegebene ist

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

Für die parallel gelegte ist die Gleichung

$$Ax - By + Cz - D' = 0,$$

oder $A(x - p) - B(y - q) + C(z - r) = 0.$

10. Setzt man in der Gleichung,

$$Ax - By + Cz - D = 0,$$

die Ordinate $z = 0$, so ist die Gleichung,

$$Ax - By - D = 0,$$

die Gleichung für den Durchschnitt der Ebene mit der

Digitized by Google

Ebene der x, y, und es ist $\frac{A}{B}$ die Tangente des Durchschnittswinkels mit der Axe der x nach der Gegend der gleichnamigen Coordinaten, da der Abstand des Durchschnittspunctes von dem Anfange der Abscissen $= \frac{D}{A}$ ist.

Auf ähnliche Art entstehen, wenn $x = o$, oder $y = o$ gesetzt wird, Gleichungen für die Durchschnitte mit der Ebene der y, z, oder x, z.

11. Zwey Ebenen seyn durch die Gleichungen,

I. $Ax - By + Cz - D = o$,

II. $A'x - B'y + C'z - D' = o$,

gegeben, so ist die Gleichung für die Projection ihrer Durchschnittslinie auf die Ebene der x, y diese,

$(AC' - A'C)x - (BC' - B'C)y - D + D' = o$.

In der Durchschnittslinie haben nämlich beide Ebenen dieselben Ordinaten z. Durch Elimination derselben wird nun die Gleichung zwischen denjenigen x und y erhalten, die zu diesen gemeinschaftlichen z gehören.

Die Gleichung für die Projectionen auf die Ebene der x, z oder der y, z wird erhalten, wenn y, oder wenn x weggeschafft wird.

12. Den gemeinschaftlichen Punct dreyer sich schneidenden Ebenen zu finden, setzt man in ihre Gleichungen die unbekannten Coordinaten dieses Punctes, p, q, r, so erhält man drey Gleichungen vom ersten Grade für diese drey Größen, aus welchen die drey unbekannten p, q, r gefunden werden, (Elimination, 6.).

13. Durch die sphärische Trigonometrie läßt sich die Aufgabe (11.) auch auflösen. Es wird ein sphärisches Dreyeck durch eine Seite und zwey anliegende Winkel gegeben. Daraus wird durch eine der trigonometrischen Proportionen und ein paar Hülfssätze der Goniometrie die Lage und Größe des auf jene Seite senkrechten Bogens gefunden.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und dem

Digitized by Google

Winkel zweyer durch ihre Gleichungen bestimmten Ebenen, s. den Artikel, Linie.

14. Ist eine Gleichung für eine Oberfläche durch die rechtwinklichten Coordinaten, x, y, z, gegeben, und verlangt man die Figur des Schnittes durch eine gegebene Ebene, so verbinde man die Gleichungen für die Oberfläche und die Ebene mit einander, um daraus eine Gleichung für zwey der drey, x, y, z, zu erhalten, also die Projection des Schnittes.

15. Es seyn nun AM, MN, NP (Fig. 71.) die gemeinschaftlichen Coordinaten einer Oberfläche und einer Ebene in dem Puncte P des Schnittes. Die Gleichung für die Ebene ist die in (5.) gesetzte, mit den daraus bestimmten Winkeln η, ϑ, und dem Abstande h. Es ist

$QO = NO.\tang QNO = \frac{z.\tang\eta}{\tang\vartheta}$, und $CQ = \frac{CM}{\cos\eta} = \frac{x-h}{\cos\eta}$, also $CO = \frac{z.\tang\eta}{\tang\vartheta} + \frac{x-h}{\cos\eta}$.

Man nehme CO und OP zu Coordinaten an dem Schnitte in der Ebene BCOPOB, und setze $CO = t$, $PO = u$, so sind nun x, y, z durch t und u auszudrücken. Zuerst ist

$$z = u\sin\vartheta.$$

Ferner ist $t = \frac{z.\tang\eta}{\tang\vartheta} + \frac{x-h}{\cos\eta}$; also ist

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h.$$

Drittens, da $y = (x-h).\tang\eta + \frac{z}{\cos\eta.\tang\vartheta}$ ist, (4.), so ist

$$y = t.\sin\eta + u.\cos\eta.\cos\vartheta.$$

16. Hieraus erhellt, daß der Schnitt eine Gleichung von demselben Grade erhält, auf welchen die Gleichung für die Fläche steigt. Ist die letztere vom zweyten Grade, das ist, wenn die höchste Anzahl der Dimensionen nach den unveränderlichen Größen der Gleichung zwey ist, so ist der Schnitt eine Linie des zweyten Grades oder ein Kegelschnitt.

Digitized by Google

17. Die Fläche, welche von einer Ebene geschnitten wird, sey selbst eine Ebene, deren Gleichung ist, $ax - by + cz - d = o$. Sie sey gegen die Ebene der x, y unter dem Winkel ϑ' geneigt, und ihre Durchschnittslinie schneide die Axe der x unter dem Winkel η', in dem Abstande h' von dem Anfangspuncte. Für die schneidende Ebene gehören die Winkel η, ϑ, und der Abstand h. Die Gleichung für die Durchschnittslinie beider Ebenen auf der jene schneidenden ist aus (15.)

$(a.\cos\eta - b.\sin\eta)\,t - (a.\sin\eta.\cos\vartheta + b.\cos\eta.\cos\vartheta - c.\sin\vartheta)\,u + ah - d = o.$

Da a, b, c, d sich verhalten wie $\sin\eta'$, $\cos\eta'$, $\cot\vartheta'$, $h'.\sin\eta'$, so kann man diese Größen für jene substituiren, und es ist dadurch

$(\sin\eta'.\cos\eta - \cos\eta'.\sin\eta)\,t$
$- (\sin\eta'.\sin\eta.\cos\vartheta + \cos\eta'.\cos\eta.\cos\vartheta - \cot\vartheta'.\sin\vartheta)\,u$
$+ h.\sin\eta' - h'\sin\eta' = o$, das ist

$\sin(\eta' - \eta)\,t - (\cos(\eta' - \eta)\cos\vartheta - \cot\vartheta'.\sin\vartheta)\,u + (h - h')\sin\eta' = o.$

Hieraus ergiebt sich die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abscissen t, (nämlich in C), und der Punct, wo die Durchschnittslinie beider Ebenen die BB trifft. Die Gleichung für die Projection der Durchschnittslinie ist in (11.) gefunden.

18. Durch die sphärische Trigonometrie wird diese Aufgabe bequem aufgelöset. Denn durch die Neigung zweyer Ebenen gegen eine dritte, die Grundebene, und durch die Winkel ihrer Durchschnittslinien auf dieser werden in einem sphärischen Dreyeck zwey Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben, daher die Lage der Durchschnittslinie beider Ebenen selbst, und die Winkel dieser Linie mit den Durchschnittslinien beider Ebenen und der Grundebene durch trigonometrische Formeln gefunden werden.

Digitized by Google

Gleichungen für krumme Flächen aus ihrer Entstehungsart hergeleitet.

19. Durch Bewegungen von Linien, geraden oder krummen, werden krumme Flächen erzeugt. Da diese häufig vorkommen, so ist es nöthig, die Gleichungen für sie zu suchen, um sie daran gleich erkennen zu können.

Cylindrische Flächen.

20. Auf einer Ebene sey eine krummlinichte Figur beschrieben, eine geschlossene oder nicht geschlossene. An dieser bewege sich eine gerade Linie, einer gegebenen geraden beständig parallel, so beschreibt sie eine cylindrische Oberfläche. Ist die Figur der Grundfläche nicht geschlossen, so mag man zwey Endpuncte durch eine gerade verbinden, und die ganze Fläche wird dann auf einer Seite durch einen ebenen Theil begränzt. Ist die Figur in der Grundfläche ein Kreis, so ist die Fläche eine cylindrische im eigentlichen Verstande. Die verschiedenen Arten der cylindrischen Oberfläche lassen sich durch einen von der Grundfläche hergenommenen Zusatz unterscheiden: circular-cylindrische, elliptisch-(parabolisch-hyperbolisch-) cylindrische, u. dgl.

21. Eine cylindrische Fläche entsteht auch durch die Einwickelung einer andern krummen Fläche, wenn an diese nach parallelen Richtungen berührende in stetiger Folge gezogen werden. Die Berührungspuncte können eine gedoppelt krumme Linie bilden.

22. Eine charakteristische Eigenschaft der cylindrischen Oberflächen ist, daß die Schnitte, die der Grundfläche parallel geführt werden, ihr gleich sind.

23. Es sey FUG (Fig. 74.) ein Bogen der Figur der Grundfläche, U ein Punct desselben, UP eine gerade auf der cylindrischen Fläche; A der Anfangspunct der Abscissen für die Figur und die Oberfläche; AT = t, und TU = u seyn Coordinaten an der Figur der Grundfläche; AM, MN, NP (x, y, z) seyn Coordinaten an der cylindrischen Fläche, jene wie diese rechtwinklichte. Die PU und jede ihr parallele seyn gegen die Ebene der x, y

Digitized by Google

unter dem Winkel $PUN = \varphi$ geneigt; ihre Neigungsebene, wie PUN, schneide die Axe der x unter dem unveränderlichen Winkel $ASN = \eta$. Es ist

$$u + y = (t + x) \cdot \operatorname{tang} \eta.$$

Da ferner $NU = \frac{t+x}{\operatorname{col} \eta}$ ist, so ist

$$z = \frac{t+x}{\operatorname{col} \eta} \cdot \operatorname{tang} \varphi.$$

Die Ordinate u ist eine Function der Abscisse t (oder t von u). Setzt man in jenen beiden Gleichungen für die Ordinate u ihren Werth durch die Abscisse t, oder umgekehrt, und schafft t (oder u) heraus, so erhält man die Gleichung für die cylindrische Oberfläche.

Da u eine Function von t ist, so bezeichne man diese durch φt, und die beiden allgemeinen Gleichungen für eine cylindrische Fläche haben die Form

$$y + \varphi t = mz; \quad x + t = nz,$$

wo $m = \frac{\sin \eta}{\operatorname{tang} \varphi}$; $n = \frac{\operatorname{col} \eta}{\operatorname{tang} \varphi}$ sind.

24. Exempel. Die Grundfläche sey eine Ellipse, deren Mittelpunct A ist. Die Gleichung für dieselbe sey

$$a^2 u^2 + b^2 t^2 = a^2 b^2 = 0.$$

Man setze für u und t ihre Werthe, $u = mz - y$; $t = nz - x$, so erhält man die Gleichung für die elliptische cylindrische Fläche, den Anfangspunct der Coordinaten in ihren Mittelpunct gesetzt,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + (m^2 a^2 + n^2 b^2) z^2 - 2nb^2 xz - 2ma^2 yz - a^2 b^2 = 0.$$

25. Wenn der Punct N in dem Umfange der Grundfigur genommen wird, so ist für die Coordinaten x, y die Gleichung,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

und es bleibe die Gleichung,

$$(m^2 a^2 + n^2 b^2) z = 2nb^2 x + 2ma^2 y.$$

In diesem Falle nämlich ist

$$a^2 (y^2 - u^2) + b^2 (x^2 - t^2) = 0,$$

Digitized by Google

oder

$$a^2(y+u)(y-u)+b^2(x+t)(x-t)=0.$$

Da $y+u=mz$; $x+t=nz$; $y-u=zy-mz$; $x-t=2x-nz$, so folgt hieraus eben dieselbe Gleichung. — Die Ordinate z trifft die Fläche in zwey Puncten. In dem gegenwärtigen Falle ist der eine Punct in der Ebene der x, z selbst, daher für diesen $z=0$ ist.

Ist die Seite der cylindrischen Fläche senkrecht auf die Ebene der x, y, so ist tang φ unendlich groß, daher $m=0$, $n=0$, und z bleibt unbestimmt.

Konische Flächen.

26. Es sey wie vorher in einer Ebene eine krummlinichte Figur beschrieben. An dieser bewege sich eine gerade, die durch einen fixen Punct gelegt ist, so beschreibt dieselbe eine konische Fläche, welche, wenn die Figur der Grundfläche ein Kreis ist, die Fläche des Kegels in der Elementar-Geometrie ist.

Wie bey der cylindrischen Fläche entsteht auch eine Kegelfläche durch eine stetige Folge berührender gerader an einer andern krummen Fläche, wenn dieselben immer durch einen fixen Punct gehen.

27. Es ist P (Fig. 73.) ein Punct der konischen Fläche, D der Scheitelpunct, AM, AN, AP (x, y, z) sind die Coordinaten zu dem Puncte P; AB, BC, CD (a, b, c) die Coordinaten zu dem Scheitelpuncte D. Ferner sey U ein Punct der Grundfigur, $AT=t$, und $Tu=u$ seyn die zu diesem Puncte gehörigen Coordinaten. Die Neigung der PU und der Winkel der Neigungsebene PUN mit der Axe der x sind veränderlich, nur daß jene bey einer Kreisfigur und senkrechter Axe eines Kegels dieselbe bleibt.

Die Neigungsebene PUN schneide die AM in S. Es ist $CD:NP=CU:NU=BT:MT$, das ist

$$c:z=a+t:x+t,$$

oder

$$c-z:z=a-x:x+t,$$

und

$$x+t=\frac{a-x}{c-z}z.$$

Digitized by Google

Gleichfalls ist $CD : NP = CU : NU = BC + TU : MN + TU$, das ist

$$c : z = b + u : y + u,$$

oder $c - z : z = b - y : y + u$,

und $y + u = \frac{b-y}{c-y} z$.

28. Da u eine Function von t, oder $= \varphi t$ ist, so sind die beiden allgemeinen Gleichungen für die konische Fläche:

$$x + t = \frac{a-x}{c-z} z;$$

$$y + \varphi t = \frac{b-y}{c-z} z.$$

29. Hieraus ist

$$t = \frac{az - cx}{c-z}; \quad u = \frac{bz - cy}{c-z}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung zwischen t und u, so erhält man die Gleichung für die konische Fläche.

30. Exempel. Die Grundfläche sey ein Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist. Die Gleichung für den Kreis ist $t^2 + u^2 = r^2$, daher die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (c - z)^2 r^2.$$

31. Es seyn die veränderlichen Winkel $MSN = \eta$; $PUN = \vartheta$, so ist $x + t = NU . \cos\eta = z . \cot\vartheta . \cos\eta$, und $y + u = NU . \sin\eta = z . \cot\vartheta . \sin\eta$. Daher ist

$$\frac{a-x}{c-z} = \cot\vartheta . \cos\eta; \quad \frac{b-y}{c-z} = \cot\vartheta . \sin\eta.$$

Also ist $\frac{a-x}{c-z} : \frac{b-y}{c-z} = \cos\eta : \sin\eta = 1 : \tang\eta$.

Das Verhältniß der beiden Bruchgrößen ist nach einem Gesetze veränderlich, welches von einer gegebenen Relation zwischen t und u, und von der Lage des Scheitelpunctes der konischen Fläche abhängt; das ist, die eine Bruchgröße ist eine Function der andern. Denn wenn eine ver-

Digitized by Google

änderliche Größe irgend eine Function einer andern veränderlichen ist, so ist ihr Verhältniß nach einem bestimmten Gesetze veränderlich. Dieses druckt man so aus: es ist $\frac{a-x}{c-z} = \varphi\frac{b-y}{c-z}$, oder auch $\frac{b-y}{c-z} = \varphi\frac{a-x}{c-z}$, wo φ die Beschaffenheit der Function anzeigt.

32. Man nehme den Scheitelpunct zum Anfang der Coordinaten, und lasse die Ebenen derselben den vorigen parallel seyn. Die Abstände des Punctes P von den drey Ebenen sind nun $a-x$; $b-y$; $c-z$. Wenn man nämlich in der Ebene der Grundfigur durch C, wo die senkrechte DC sie trifft, EE parallel mit AM zieht, so sind die drey neuen Ebenen, die BCD, die DCE und die hier nicht erscheinende, durch D mit ABC parallele. Der Abstand eines Punctes P von der ersten ist $a-x$; von der zweyten $b-y$; von der dritten $c-z$. Man nenne die neuen Coordinaten x', y', z', so ist $x = a-x'$; $y = b-y'$; $z = c-z'$. Setzt man diese in die Werthe von t und u (28.), so ist

$$t = \frac{cx'-az'}{z'}; \quad u = \frac{cy'-bz'}{z'}.$$

Oder, wenn man nun wieder die ungestrichelten Buchstaben gebraucht,

$$t = \frac{cx-az}{z}; \quad u = \frac{cy-bz}{z}.$$

33. Setzt man diese Werthe in die Gleichung zwischen t und u, so entsteht eine homogene Gleichung zwischen x, y, z, das ist, eine solche, worin alle Glieder gleich viele Dimensionen nach x, y, z haben. Denn durch diese Substitutionen haben alle Glieder gar keine Dimension in Absicht auf die veränderlichen Größen. Die höchsten Glieder der Gleichung zwischen t und u seyn von dem Grade m, oder enthalten m Factoren t oder u allein, oder von beiden. Durch die Substitution ihrer Werthe bekommen diese im Nenner die Potenz z^m; die nächstfolgenden die Potenz z^{m-1}, u. s. f. dagegen in den Zähler

die Anzahl der Dimensionen ist m, $m-1$, etc. Multiplicirt man alle Glieder durch z^m, so wird in dem höchsten Theile keine Dimension zugesetzt; in dem zweyten eine, welche an m fehlt; in dem dritten werden zwey zugefügt, welche an $m-2$ fehlen, u. s. f. Daher bekommen alle Glieder m Dimensionen.

Dieses ist eine charakteristische Eigenschaft der konischen Flächen, wenn die Coordinaten von Scheitelpuncte aus genommen werden.

34. Die Gleichung für eine konische Fläche läßt sich noch auf eine andere Art finden. Es sey A (Fig. 76.) der Scheitelpunct, BQRB ein Theil der Grundfigur, in welcher BQ die Abscisse, QR die zugehörige senkrechte Ordinate, BR ein Bogen des Umfanges ist. Die Ebene BQR stehe senkrecht auf die ABQ, und die Abscisse BQ mache mit der AB einen spitzen Winkel $ABQ = \alpha$. Auf der Linie AR, von A nach einem Puncte des Umfanges R, nehme man einen Punct P, ziehe von demselben die senkrechte PN auf AQ, und von N die senkrechte AM auf AB. Die PN steht wie RQ senkrecht auf die Ebene ABQ, also auf MN, und AM, MN, NP (x, y, z) sind rechtwinklichte Coordinaten an die konische Fläche in P. Man setze $AB = h$; $BQ = t$; $QR = u$. Von Q ziehe man QS senkrecht auf AB, so ist $QS = t \sin\alpha$; $BS = t\cos\alpha$. Nun ist $x : y = h - t\cos\alpha : t\sin\alpha$. Auch ist $y : z = t\sin\alpha : u$. Hieraus ist

$$t = \frac{hy}{x\sin\alpha + y\cos\alpha};$$

$$u = \frac{hz\sin\alpha}{x\sin\alpha + y\cos\alpha}.$$

Die Coordinaten x, y, z haben hier andere Bedeutungen und andere Lagen gegen die Coordinaten t, u der Grundfigur als vorher. Aber die Werthe von t und u sind eben so wie vorher Größen von keiner Dimension. Setzt man dieselben in die Gleichung zwischen t und u, so ist,

Digitized by Google

nach weggeschafften Nennern der Glieder, die Gleichung zwischen x, y, z eine homogene.

Dieses Verfahren ist von Clairaut in seinen Recherches sur les courbes à double courbure, Art. 27. Er gebraucht anstatt der trigonometrischen Größen die Verhältnißzahlen m, n, welches die Rechnung weniger deutlich macht, da er nicht zugleich $m^2 + n^2 = 1$ annimmt.

35. Exempel. Die Grundfigur sey ein Kreis, dessen Gleichung ist $2at - tt = uu$, so ist die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(2a\cos\alpha - h)\,y^2 + 2a\sin\alpha.xy = h\sin\alpha^2.z^2.$$

Hier ist die Axe der x eine Seitenlinie des Kegels.

Nimmt man die Axe des Kegels zur Axe der x (da bloß in dem Falle der Figur die Curve der Grundfläche durch den Punct B der Axe der x gelegt ist), so ist $tt + uu = aa$, und die Gleichung für die Kegelfläche, wenn die Axe des Kegels zur Axe der x genommen wird, ist

$$a^2\sin\alpha^2.x^2 + (a^2\cos\alpha^2 - h^2)\,y^2 + a^2\sin 2\alpha.xy = h^2\sin\alpha^2.z^2.$$

Für den senkrechten Kegel ist die Gleichung,

$$a^2x^2 = h^2y^2 + h^2z^2.$$

36. Die Gleichungen in (35.) sind Kegelschnitte, worin für jedes gegebene x die Coordinaten y und z sind. Zur Abkürzung setze man $\sin\alpha = m$; $\cos\alpha = n$, so ist die erstere Gleichung,

$$2maxy - (h - 2na)\,y^2 = m^2hz^2.$$

Dieses ist eine Gleichung für eine Ellipse, wenn h größer als 2na, eine Hyperbel, wenn h kleiner als 2na, und eine Parabel, wenn $h = 2na$ ist.

Denn es sey A die große Axe einer Ellipse, oder die Hauptaxe einer Hyperbel, und B der Parameter, so ist die Gleichung für die Ellipse, wenn die Abscissen y vom Scheitel an genommen werden, $By - \frac{B}{A}yy = zz$,

Digitized by Google

und für die Hyperbel, $By + \frac{B}{A}yy = zz$. (Ellipse, 7; und Hyperbel, 3.). Für die Parabel ist A unendlich groß, daher die Gleichung für dieselbe ist $By = zz$.

Vergleicht man diese Gleichungen mit der für den Schnitt, so ist $B = \frac{2ax}{mh}$; $\frac{B}{A} = \pm\frac{h-2na}{mmh}$; also $A = \frac{2max}{h-2na}$.

Ist $h - 2na = m^2h$, so ist $B = A$, und der Schnitt ein Kreis, dessen Durchmesser $= \frac{2ax}{mh}$. Dieser ist der Wechselschnitt, oder die sectio subcontraria. Da $1 - m^2 = n^2$ ist, so ist in diesem Falle $nh = 2a$. Dieses findet Statt, wenn die gerade von A nach dem Endpuncte des durch B gezogenen Durchmessers auf denselben senkrecht ist. S. Kegel, 9.

In der zweyten Gleichung (35.) ist der Anfang der Abscissen y auf einem Puncte der Axe außerhalb des Scheitels und des Mittelpuncts. Man erhält eine Gleichung von dieser Form, wenn in den Gleichungen $By \mp \frac{B}{A}yy = zz$ für y gesetzt wird $y + h$. Die Axe des Kegels halbirt die Axe des Schnittes nicht, wenn dieser nicht mit der Grundfläche parallel ist.

36. Man ziehe NL parallel mit QB, so ist der Schnitt des Körpers durch PNL parallel mit der Grundfigur (Ebene, 18.). Da $LN : NP = BQ : QR$ ist, so ist der Schnitt durch PNL der Grundfigur ähnlich. In dem Schnitte durch PNM hingegen ist MN der SQ proportional.

Sucht man die Gleichung für den Schnitt PNL, der mit BQR parallel ist, so setze man für denselben $AL = x'$, $LN = y'$, da $PN = z$ bleibt. Es ist $y = my'$; $x' = x' - ny'$. Diese Werthe setze man in die Gleichung für den Schnitt durch MNP, so ist

Digitized by Google

$$\frac{2ax'}{h}y' - y'y' = zz,$$

eine Gleichung für einen Kreis, dessen Durchmesser $= \frac{2ax'}{h}$ ist.

Durch Drehung einer Curve um eine Axe entstehende Fläche.

38. Die Curve DPE (Fig. 77.) drehe sich um die Axe BC, so beschreibt jede rechtwinklichte Coordinate QP mit ihrem Endpuncte P eine Kreislinie. Von P falle man auf die gegebene Ordinate CE die senkrechte PN, so ist CN eine Function von PN. Wenn nämlich eine Gleichung zwischen den Coordinaten DQ, QP gegeben wird, wie es am gewöhnlichsten ist, so ist auch eine Gleichung zwischen CQ (=CD—DQ) und QP (=CN) gegeben.

39. Nun soll eine Gleichung für einen Punct P der beschriebenen Fläche in Beziehung auf drey Ebenen durch drey Coordinaten x, y, z gefunden werden. Die Ebene der Fig. 77* sey die Ebene der x, y. Die Axe der DC treffe sie in C, und sey senkrecht auf dieselbe; auch sey der Punct C in der Ebene derselbe mit dem Puncte C der Axe CD. Mit dem Halbmesser CF = CN beschreibe man um C den Kreis FNf. Die Ordinate CE (Fig. 77) liege auf CE (Fig 77*), so liegt der Punct P in der auf die Ebene AMN senkrechten, in der Höhe PN=z. Es sey AX die Axe der x, und die auf AX senkrechte NM =y; AM=x; ferner CB senkrecht auf AM in B, und CLF parallel mit AM; AB=a; BC=b; so ist CL =x—a; NL=y—b, und

$$CN^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Da CN eine Function von PN oder z ist, so ist die Gleichung für jede durch Drehung um eine Axe entstandene Fläche,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (\varphi z)^2.$$

Digitized by Google

40. Exempel. Es sey DPE ein Kreisbogen, dessen Mittelpunct G ist, in dem Abstande GC = c von C, und der Halbmesser GD = g. Nun ist $QP^2 = CN^2 = g^2 - (z-c)^2$, also ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2,$$

die allgemeine Gleichung für die Kugelfläche. Diese ist überhaupt die Gleichung für den Abstand, g, zweyer Puncte, deren respective Coordinaten sind a, b, c und x, y, z.

Fällt der Mittelpunct in den Anfang der Coordinaten, so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

41. Exempel. Die Curve DPE sey eine Parabel, so ist, wenn der Parameter p heißt, $p \times DQ = QP^2$, oder $p(CD - CQ) = CN^2$. Es sey CD = f, so ist $CN^2 = pf - pz$; also ist die Gleichung für die paraboliſch-konoidaliſche Fläche,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = pf - pz.$$

Auf dieſelbe Art werden die Gleichungen für eine hyperboliſch-konoidaliſche und ſphäroidiſche Fläche gefunden, welche durch Drehung einer Hyperbel und Ellipſe um eine ihrer Axe entſtehen.

42. Wenn die Axe der Parabel durch den Anfangspunct A geht, das iſt, wenn ſie in die Axe der z fällt, ſo iſt

$$x^2 + y^2 = pf - pz.$$

43. Die Gleichung für den Schnitt der paraboliſch-konoidaliſchen Fläche bey der in (42.) angenommenen Lage der Axe zu finden. — Man ſetze die in (15.) gefundenen Werthe der Coordinaten x, y, z durch die Coordinaten des Schnittes, t, u in die Gleichung (42.) Die Ebene ſchneide die Axe der x in dem Abſtande h von dem Anfangspuncte der Coordinaten, unter dem Winkel η mit dem Neigungswinkel ϑ, ſo iſt

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h;$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta;$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Digitized by Google

Daraus ist

$$x^2 + y^2 = t^2 + u^2 . \cos\vartheta^2 + h^2 + 2ht\cos\eta - 2hu\sin\eta . \cos\vartheta.$$

oder, weil $h^2 = h^2\cos\vartheta^2 + h^2\sin\eta^2$ ist,

$$x^2 + y^2 = (t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta)^2.$$

Die Gleichung für den Schnitt des Konoids ist also

$$(t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta)^2 + pu\sin\vartheta = pf.$$

Es ist pf dem Quadrate der Ordinate CE an der Parabel (Fig. 77.) gleich.

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der allgemeinen für eine Ellipse (Krumme Linien der ersten Classe, 29.) ergiebt, daß a daselbst unendlich groß ist, weil das Glied tu fehlt. Daher fällt die Abscissenlinie AP (Fig. 54.) in AR. Wegen des einem rechten gleichen Ordinatenwinkels für t und u ist der Quotient $\frac{c}{a} = 1$; daher ist das dortige m hier $= \cos\vartheta$, das ist, die große Axe verhält sich zur kleinen wie $1 : \cos\vartheta$. Die Ordinaten u sind der großen Axe, die t der kleinen parallel. Da das Glied tu fehlt, und die Quadrate von t und u gleichnamige Vorzeichen haben, so ist der Schnitt eine Ellipse (a. a. O. 30.), oder eine Parabel, wenn u^2 fehlt, das ist, wenn $\vartheta = 90°$ ist. Die Bestimmungen der Ellipse oder Parabel selbst wird man in jedem Falle nach der Methode (a. a. O. 29.) zu suchen haben.

44. In dem gegenwärtigen Falle läßt es sich auch bequem genug folgendergestalt bewerkstelligen.

Man addire auf beiden Seiten der obigen Gleichung die Größe, $\frac{1}{4}p^2\tan\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tan\vartheta$, so wird sie diese:

$$(t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta + \tfrac{1}{2}p\tan\vartheta)^2 = pf + \tfrac{1}{4}p^2\tan\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tan\vartheta.$$

oder,

$$(t + h\cos\eta)^2 + \cos\vartheta^2\left(u - \frac{2h\sin\eta - p\tan\vartheta}{2\cos\vartheta}\right)^2 = pf + \tfrac{1}{4}p^2\tan\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tan\vartheta.$$

Digitized by Google

Vergleicht man diese Gleichung mit der für eine Ellipse, $y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2$, worin a die halbe große, b die halbe kleine Axe, der Anfangspunct im Mittelpuncte ist, und die Ordinaten y der kleinen Axe parallel sind, so erhellt, daß die Ordinaten y um die Größe $h \cos\eta$ vermindert, die Abscissen x aber um die Größe $\frac{2h\sin\eta - p\tang\vartheta}{2\cos\vartheta}$ vergrößert sind, daß $\frac{b}{a} = \cos\vartheta$, und das gegebene Glied $= bb$ ist.

45. Wenn die Drehungsaxe gegen die Ebene der x, y geneigt ist, so ist die Projection des von einer Ordinate beschriebenen Kreises eine Ellipse, deren Mittelpunct auf der Projection der Axe liegt. Die große Axe ist die Projection desjenigen Durchmessers, welcher der Ebene der x, y parallel ist, und demselben gleich. Die kleine Axe verhält sich zu der großen wie der Sinus des Neigungswinkels der Drehungsaxe zum Sinuskotus.

In diesem Falle wird es am leichtesten seyn, zuerst die Gleichung für die Fläche in Beziehung auf drey rechtwinklichte Ebenen zu suchen, deren eine senkrecht auf die Drehungsaxe ist, und dann die Coordinaten nach den Formeln (krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 43. oder 46.) zu vertauschen, daß die Coordinaten-Ebenen die gegebenen werden.

Oder man mag die Gleichung auch unmittelbar durch Hülfe der folgenden Aufgaben erhalten.

46. Die Gleichungen für den Umfang eines gegebenen Kreises zu finden, dessen Mittelpunct und Ebene durch Coordinaten in Beziehung auf drey rechtwinklichten Ebenen bestimmt werden.

Der Halbmesser des Kreises sey g, die Coordinaten zu seinem Mittelpuncte seyn p, q, r; die Gleichung für dessen Ebene sey $Ax - By + Cz - D = 0$. Da der Mittelpunct in derselben liegt, so ist auch $Ap - Bq + Cr - D = 0$. Daher ist

Digitized by Google

$$A(x-p)-B(y-q)+C(z-r)=0.$$

Die Gleichung für die Kugelfläche mit dem Halbmesser g ist (39.)

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=g^2.$$

Der Durchschnitt der Ebene und der Kugelfläche ist der Umfang des gegebenen Kreises, der durch diese beiden Gleichungen eben so bestimmt wird, wie eine gedoppelt krumme Linie durch zwey Gleichungen zwischen drey Coordinaten. Schafft man eine derselben weg, welches ganz leicht ist, so erhält man eine Gleichung für die beiden andern, oder für die Projection auf einer der Coordinaten-Ebenen.

47. Da die Gleichung für eine Fläche gesucht wird, die durch Umdrehung einer Curve um eine Axe entsteht, so wird hier die Ebene jedes der veränderlichen Kreise durch die darauf in dem Mittelpuncte senkrechte gerade, und den Abstand des Mittelpuncts von einer Coordinaten-Ebene nach der Richtung dieser senkrechten gegeben. Darum müssen nun die Größen eingeführt werden, durch welche die Lage dieser geraden gegeben wird. Auch müssen die Coordinaten, p, q, r, die nun veränderlich sind, weggeschafft werden, zugleich mit dem veränderlichen Halbmesser, und dem auf jener senkrechten genommenen Abstande des Mittelpunctes.

Die Gleichungen für die senkrechte auf die Ebenen der Kreise seyn

$$\text{I. } y=ax+\alpha;\quad \text{II. } z=bx+\beta.$$

Die Gleichung für die auf diese Linie senkrechte Ebene ist nun (Linie, 43.)

$$x+ay+bz=h,$$

wo h den Durchschnittspunct der Ebene mit der Axe der x angiebt.

Da der Mittelpunct jedes Kreises in dieser Ebene liegt, so ist auch

$$p+aq+br=h.$$

Digitized by Google

Folglich ist

III. $x - p + a(y - q) + b(z - r) = o$.

Die Coordinaten für den Punct, worin die auf die Ebenen der Kreise durch die Mittelpuncte senkrechte die Ebene der x, y trifft, seyn γ, δ, so ist, wenn diese für x und y gesetzt werden,

IV. $\xi = a\gamma + \alpha$; V. $o = b\gamma + \beta$.

Der veränderliche Abstand der Mittelpuncte von der Ebene der x, y nach der auf die Ebene der Kreise senkrechten, sey $= t$, und der veränderliche Halbmesser der Kreise $= u$, so ist

VI. $(p - \gamma)^2 + (q - \delta)^2 + r^2 = t^2$.

VII. $(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = u^2$.

Zu diesen Gleichungen kommt noch die zwischen den Coordinaten an der beschreibenden Curve, t und u, da u eine Function von t ist. Aus den acht Gleichungen lassen sich die sieben Größen, p, q, r, γ, δ, t, u wegschaffen, so daß alsdann eine Gleichung zwischen x, y, z, a, α, b, β, und den in der Gleichung zwischen t und u befindlichen gegebenen Größen erhalted wird. Diese gilt für die Puncte des Umfanges irgend eines der Kreise, deren Ebenen senkrecht auf eine der Lage nach gegebene gerade, als den Ort ihrer Mittelpuncte sind, und deren Halbmesser zu den Abschnitten dieser geraden eine bestimmte Relation haben, das ist, es ist eine Gleichung für eine durch Umdrehung einer gegebenen Curve um ihre Axe erzeugte Fläche.

Die ganze Rechnung wird sehr abgekürzt, wenn die auf die Ebenen der Kreise senkrechte durch den Anfang der Coordinaten geht, wodurch α β, γ, δ jede $= o$ werden.

48. Diese Methode ist deutlicher, als die von Monge in den Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, Nr. 6 vorgetragene. Er legt, wie hier geschehen ist, die Gleichungen, $y = ax + \alpha$; $z = bx + \beta$; und $x + ay + bz = h$, zum Grunde, und findet, daß die Functio-

Digitized by Google

nen, $x + ay + bz$ und $(x - \gamma)^2 + (y - \delta)^2 + z^2$, für irgend welche Werthe von x, y, z zugleich constant und veränderlich sind. Daher sey $(x-\gamma)^2 + (y-\delta)^2 + z^2$ eine Function von $x + ay + bz$, deren Beschaffenheit von der Natur der erzeugenden Curve abhängt. Allein, wie diese Function bestimmt werden möge, zeigt Monge nicht.

Krumme Flächen, welche von einer geraden Linie, die einer gegebenen Ebene parallel bleibt, und zugleich durch eine gegebene Linie, ebene oder krumme, geht, beschrieben werden.

49. Eine gerade Linie bewege sich an einer andern geraden hin, indem sie zugleich durch die Axe der x geht, und einer gegebenen Ebene parallel bleibt; sie beschreibt alsdann eine gekrümmte Keilfläche. Diese verwandelt sich in eine ebene Fläche, wenn die gerade Linie, an welcher sich die beschreibende bewegt, der Axe der x parallel ist.

50. Es seyn AX, AY (Fig. 78.) die Axen der x, y; BB sey die Projection der gegebenen geraden; LR die Projection der beschreibenden auf die Ebene der x, y. Da die letztere Linie einer gegebenen Ebene parallel bleibt, so bleibt auch die RL in jeder Lage sich parallel, oder der W. RLX ist constant.

Die Coordinaten an die krumme Fläche seyn $AM = x$, $MN = y$, und die in N auf die Ebene AMN senkrechte, z. An die gegebene gerade seyn die Coordinaten, $AQ = p$; $QR = q$, und die in R auf die Ebene AQR senkrechte, r. Die Gleichungen für diese gerade seyn

$$q = ap + \alpha; \quad r = bp + \beta.$$

Da der Durchschnitt der Fläche in der Richtung LR eine gerade ist, so ist

$$r : z = LR : LN = QR : MN = q : y$$

$$\text{also, } bp + \beta : ap + \alpha = z : y,$$

$$\text{und } (az - by)\,p = \beta y - \alpha z.$$

Digitized by Google

Ferner ist $1 : \text{tang} NLM = LQ : QR = MQ : QR - MN = p - x : q - y$. Man setze $\text{tang} NLM = \lambda$, so ist $\lambda(p - x) = ap + \alpha - y$, und

$$p = \frac{\lambda x - y + \alpha}{\lambda - a}.$$

Dadurch wird aus der vorher gefundenen Gleichung nunmehr diese:

$$(az - by)(\lambda x - y + \alpha) = (\lambda - a)(\beta y - \alpha z),$$

welche die gesuchte Gleichung für die gekrümmte Keilfläche ist.

51. Man lasse die Projection BB der gegebenen geraden Linie parallel mit AX seyn, so wird q eine unveränderliche Größe, α, und $a = o$, da a die Tangente des Winkels der BB mit AX ist. Die gegebene gerade gehe durch C, so ist für $p = o$ auch $x = o$, also $\beta = o$. Dann sey noch NLM ein rechter Winkel, so ist λ unendlich groß. Nun ist die Gleichung für die gekrümmte Keilfläche,

$$bxy = \alpha z,$$

wo α der Abstand der nun parallelen AX, BB, und b die Tangente des Neigungswinkels der gegebenen geraden gegen die Ebene der x, y ist.

52. Die Figur des Durchschnitts der krummen Fläche (51.) mit einer auf die Ebene der x, y senkrechten Ebene zu finden.

Die schneidende Ebene gehe durch AN, und schneide die Axe der x unter dem Winkel MAN, so sind die Verhältnisse AM : AN und MN : AN gegeben. Man setze $AN = t$. Die Ordinate z an die Fläche ist nun auch Ordinate an die Durchschnittslinie. Es sey $x = mt$; $y = nt$, so ist die Gleichung für die Durchschnittslinie, $mnbt^2 = \alpha z$. Diese gehört für eine Parabel, deren Axe in der Axe der z liegt, und deren Anfangspunct in A ist. Die Curve ist nach der Gegend der positiven z concav.

Wird der Schnitt parallel mit der Ebene der x, z geführt, so daß AN parallel mit AX ist, so ist y für alle Puncte der Durchschnittslinie dieselbe. Es ist also, wenn

Digitized by Google

für y eine constante h gesetzt wird, $\frac{bh}{a}x = z$, und die Durchschnittslinie eine gerade, deren Neigungswinkel gegen die Ebene der x, y ist Ang. tang $\frac{bh}{a}$.

53. Eine gerade Linie, die einer gegebenen Ebene parallel bleibt, bewege sich an einer krummen Linie, und gehe zugleich durch die Axe der x oder eine andere gegebene gerade. So beschreibt sie eine krumme Fläche, welche eine kegelförmige Keilfläche genannt werden mag, weil sie die Beschaffenheit eines Kegels und eines Keils mit einander vereinigt. Wenn die krumme Linie ein Kreis ist, so wird der von Wallis umständlich behandelte Körper, den er Cono-Cuneus nennt, erhalten. S. Cono-Cuneus, Th. I. S. 546.

54. Es sey die Curve BQB (Fig. 79.) in einer auf die Ebene der x, y senkrechten Ebene; ihr Durchschnitt mit derselben sey parallel mit der Axe AX; die beschreibende gerade MQ sey die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks MRQ, auf welches die Axe AX senkrecht ist. Die Durchschnittslinie BB sey die Abscissenlinie für die Curve, und BR = t; QR = u. Der Abstand AB oder MR der parallelen AX, BB sey = h. Wie bisher sey AM = x; MN = y; NP = z, wenn P ein Punct der krummen Fläche ist. Es ist $u = \frac{hz}{y}$. Da u eine Function von t (= x) ist, so ist $\frac{hz}{y}$ eine Function von x.

55. Exempel. Die Curve sey ein Kreis, dessen Halbmesser = a ist, so ist $u^2 = (2a - t)t$, und $\frac{hz}{y} = \sqrt{(2a - t)t}$; also $h^2z^2 = (2a - x)xy^2$.

Für einen mit der Ebene BQR parallelen Durchschnitt ist y^2 constant, und die Gleichung ist $\frac{2ay^2}{h^2}x - \frac{y}{n^2}x^2$

Digitized by Google

$= z^2$. Die Durchschnittslinie ist eine Ellipse, deren Parameter $\frac{2ay^2}{h^2}$, und große Axe $2a$ ist, (Ellipse, 7.).

Wird der Schnitt nach der AN durch A geführt, so seyn $AM = m \times AN$; $MN = n \times AN$, und $AN = v$. Die Gleichung für die Durchschnittslinie ist

$$h^2 z^2 = mn^2 (2a - mv) v^3.$$

Die Curve ist vom vierten Grade, und kann als eine Ellipse von einer höhern Art angesehen werden.

Diese krumme Fläche wird bisweilen zur Wölbung über einem Thore angewandt. Die französischen Baumeister nennen sie Arrière voussure de St. Antoine, von dem Hauptthore der Pariser Vorstadt dieses Namens. Montucla Hist. des Mathém. T. III. p. 95. Daviler Cours d'Architecture, p. 276. Planche 66. A.

56. Ist die Curve eine Parabel, deren Parameter $= a$, so ist $u^2 = at$, und $h^2 z^2 = axy^2$. Die Schnitte parallel mit der Ebene BQB sind Parabeln mit den Parametern $\frac{ayy}{hh}$. Schnitte nach der Richtung AN haben die Gleichung, $h^2 z^2 = mn^2 at^3$, und sind Linien vom dritten Grade, und zwar Reilische Parabeln, s. Krumme Linien der zweyten Classe, 63.

57. Die an der Curve BQB herum geführte gerade Linie QM kann auch, anstatt nach der geraden AMX gerichtet zu seyn, nach einer in der Ebene der x, y beschriebenen Curve gezogen werden, so daß RM eine Ordinate an derselben, für BR als Abscisse ist. Es seyn nun $BR = x$; $RN = y$; $NP = z$; $RQ = u$; $RM = v$, so ist

$$v : u = v - y : z.$$

Hier sind v und u jede eine Function von x. Jene sey φx, diese sey ψx, so ist $\frac{y}{\varphi x} + \frac{z}{\psi x} = 1$, oder eine Constante.

Digitized by Google

58. Die zweyte Curve mag auch irgend eine andere Lage haben als in (57.), wenn nur die gerade von einem Puncte der einen nach einem Puncte der andern einer gegebenen Ebene parallel bleibt. Beide Curven können auch von gedoppelter Krümmung seyn.

59. Oder eine gerade bewegt sich an zwey krümmen Linien, die auch gedoppelt krumm seyn mögen, so, daß sie zugleich durch eine gegebene gerade geht. Eine solche krumme Fläche hat die Wölbung, welche im Französischen Arrière-voussure de Marseille genannt wird. Davi-ler, wie oben. — Anstatt der geraden Linie kann man auch eine krumme nehmen. (Monge Feuilles d'Ana-lyse. Nr. 29.)

60. Die beschreibende gerade bleibe einer gegebenen Ebene parallel, indem sie an einer darauf senkrechten sich drehend fortrückt, so entsteht eine krumme Fläche, dergleichen an einer Art von Schraubengängen, an Windeltrep-pen, undurchsichtigen oder durchsichtigen, an Windmühlenflügeln vorkommt.

Krumme Flächen des zweyten Grades.

61. Die zweyte Methode zur Untersuchung krummer Flächen ist, daß aus den Gleichungen für dieselben die Gestalt und die Eigenschaften hergeleitet werden. Der Grad der Gleichung wird aus der höchsten Summe der Exponenten der veränderlichen Größen in den Gliedern der Gleichung bestimmt, eben so wie bey krummen Linien. Die Gleichungen für eine Ebene enthalten die veränderlichen x, y, z nur einzeln und einfach in ihren Gliedern. Die allgemeine Form derselben ist

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Die krummen Flächen von der einfachsten Beschaffenheit sind diejenigen, welche unter der allgemeinen Gleichung,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

begriffen sind. Sie heißen Flächen der zweyten Ordnung in Beziehung auf die Ebene, als Fläche der

ersten Ordnung. In Beziehung auf die höchste Summe der Exponenten in den Gliedern der Gleichung heißen sie krumme Flächen des zweyten Grades.

Die Untersuchung der krummen Flächen des dritten Grades, oder gar noch höherer Grade, hat man noch nicht vorgenommen, weil sie zu schwierig ist.

62. Nimmt man von den drey mit einander veränderlichen Größen zwey nach Willkür, so wird die dritte durch eine quadratische Gleichung gegeben, es müßte denn ihr Quadrat fehlen. Diese hat daher entweder zwey mögliche, ungleiche oder gleiche, Werthe, oder keine mögliche. Sind für unendlich große x, und endliche oder unendliche y, keine mögliche Werthe von z, so ist die Oberfläche eine im endlichen Raume begränzte.

63. Jede krumme Fläche des zweyten Grades von einer Ebene geschnitten, giebt einen Kegelschnitt (16.). Hieraus kann man sich eine Vorstellung von der Gestalt der Flächen des zweyten Grades machen. Man nehme die drey Ebenen der Coordinaten zu den Ebenen der Schnitte, so daß diese durch den Anfang der Coordinaten gehen, und auf einander senkrecht seyn. Die drey Schnitte können eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel seyn, nur daß nicht alle Combinationen dieser Linien Statt haben. Diese Schnitte heißen die Hauptschnitte des Körpers oder der Fläche (Sectiones principales).

64. Die drey Hauptschnitte seyn Ellipsen, so ist der Körper ein Ellipsoid. Zweytens, zwey der drey Hauptschnitte sind Hyperbeln, und der dritte ist eine Ellipse, an welcher die Scheitelpuncte aller hyperbolischen Schnitte herum liegen, und eine rings um die eine Axe herumlaufende doppelte trichterförmige Vertiefung bilden. Oder der eine Hauptschnitt ist etwas unmögliches, und die hyperbolischen Schnitte bilden zwey rundliche, ganz gesonderte Körper. Diese beiden Gattungen heißen Hyperboloiden. Drittens, zwey Hauptschnitte sind Parabeln, deren Ebenen sich rechtwinklicht durchschneiden, und der dritte Hauptschnitt ist Null; die mit der dritten Coordinaten-Ebene parallelen Ebenen sind entweder Ellipsen,

Digitized by Google

oder Hyperbeln. In dem erstern Falle liegen die beiden paraboliſchen Hauptſchnitte nach derſelben Gegend hin, in dem andern nach entgegengeſetzten, wie es ſich unten zeigen wird. Dieſe beiden Gattungen heißen Paraboloiden.

Dieſes ſind, nebſt den cylindriſchen und koniſchen Körpern, deren Grundflächen Kegelſchnitte ſind, alle Gattungen von Körpern mit Oberflächen vom zweyten Grade. Unter Ellipſen wird der Kreis mit begriffen, um deſto mehr, da die Erklärung einer Ellipſe zufolge ihrer Gleichung auch auf den Kreis paſſet. Die Erörterung dieſer vorläufigen Ueberſicht der drey Arten von Körpern und Oberflächen des zweyten Grades geben die folgenden Unterſuchungen.

65. Alle parallelen Schnitte der Oberflächen des zweyten Grades ſind gleichnamige Kegelſchnitte, nämlich entweder alle Ellipſen, oder Parabeln oder Hyperbeln.

Denn die Ebene des Schnittes ſchneide die Axe der x' in dem Abſtande h von dem Anfangspuncte, unter dem Winkel η mit dem Neigungswinkel ϑ gegen die Ebene der x, y, ſo wird die Gleichung zwiſchen den Coordinaten t und u für den Schnitt nach (15.) erhalten, wenn geſetzt wird

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h.$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta.$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Die Coefficienten von t^2, u^2, tu ſind von dem Abſtande h ganz frey, alſo für alle parallelen Schnitte dieſelben. Nun wird die Gattung des Schnittes bloß durch dieſe Coefficienten beſtimmt, (krumme Linien der erſten Claſſe, 29. 31. 34.), alſo ſind alle parallelen Schnitte gleichnamig.

66. Man führe mit der Ebene der x, y einen parallelen Schnitt, in dem Abſtande k, ſo wird die Gleichung für die Projection des Schnittes gefunden, wenn in der allgemeinen Gleichung für die Oberflächen des zweyten Grades $z = k$ geſetzt wird, da für alle Puncte des Schnittes $z = k$ iſt. Demnach iſt

Digitized by Google

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Kk + L = 0.$$

Um die Glieder, welche die ersten Potenzen der veränderlichen Größen enthalten, wegzuschaffen, setze man $x = t + a$; $y = u + b$, und bestimme a und b aus den Gleichungen,

$$2Aa + Db + Ek + G = 0,$$
$$2Bb + Da + Fk + H = 0.$$

Dadurch wird erhalten

$$At^2 + Bu^2 + Dtu = M,$$

wo M aus den gegebenen Coefficienten nebst a und b und k zusammengesetzt ist.

Man nehme einen andern Abstand des Schnittes, k', so verändern sich auch die Werthe von a und b, und anstatt M tritt ein anderer Werth ein, der N sey. Die Gleichung für diesen Schnitt ist, wenn die Coordinaten statt t und u durch s und v bezeichnet werden,

$$As^2 + Bv^2 + Dsv = N.$$

Es sey $M : N = m^2 : n^2$, so ist

$$As^2 + Bv^2 + Dsv = \frac{n^2}{m^2} M.$$

Folglich

$$An^2t^2 + Bn^2u^2 + Dn^2tu =$$
$$Am^2s^2 + Bm^2v^2 + Dm^2sv.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn zugleich ist $m : n = t : s$ und $m : n = u : v$, so daß $t : s = u : v$, oder $t : u = s : v$ ist. Auf eine andere Art kann sie nicht erfüllt werden. Denn wenn $m : n = t : s$ genommen wird, welches, wegen der Unabhängigkeit beider veränderlichen, t, s, geschehen darf, so bleibt

$$Bn^2u^2 + Dn^2tu = Bm^2v^2 + Dn^2sv.$$

Dieser Gleichung kann nicht für jedes willkürliche t und s ein Genüge geschehen, da u und v schon, jenes durch t, dieses durch s, bestimmt sind, wenn nicht $m : n = t : s$

Digitized by Google

= u : v genommen wird. In der Application de l'Algèbre à la Géometrie par M. M. Monge et Hachette, à Paris, 1805. p. 29. ist der umgekehrte Satz, daß aus der Gleichung die Proportion t : s = u : v folgt, nicht erwiesen.

Alle mit der einen Ebene der Coordinaten parallelen Schnitte sind daher ähnliche Figuren.

Da man durch Vertauschung der Coordinaten-Ebenen mit andern jede Durchschnitts-Ebene zu einer Coordinaten-Ebene machen kann, so ist der Satz allgemein.

67. Es stelle Fig. 80. ein Stück einer Oberfläche vom zweyten Grade vor, worin die beiden Schnitte durch die Axe der z oder AZ, in den Ebenen der z, x; z, y Ellipsen sind, nämlich EBC BAD. Der Schnitt in der Ebene der x, y kann weder eine Parabel noch Hyperbel seyn, denn bey einer solchen Gestalt des Schnittes gäbe es auch ins Unendliche hinaus parallele Ellipsen mit BAD, da doch über C und E hinaus keine mehr Statt finden.

68. Der Körper, worin die drey Hauptdurchschnitte Ellipsen sind, heißt, wie schon bemerkt ist, ein Ellipsoid. Es sey der Anfangspunct der Coordinaten an der Fläche zugleich der gemeinschaftliche Mittelpunct der drey Ellipsen, so wird der Körper durch jede der drey Coordinaten-Ebenen in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilet. Auch sind die beiden Theile jeder durch den Mittelpunct an die Oberflächen gezogenen geraden von diesem Puncte angenommen, einander gleich. Der Punct A ist auf gleiche Art der Mittelpunct des Körpers und der Oberfläche, wie für die elliptischen Schnitte.

69. Sind die beiden Halbmesser AB, AD ungleich, so sind auch die Halbmesser jedes Schnittes, der mit BAD parallel ist, ungleich. Durch einen Punct P auf AC ziehe man PM, PN senkrecht auf AC, jene in der Ebene BAC, diese in der Ebene CAD. Diese sind zwey Coordinaten des parallelen Schnittes. Nun ist (Ellipse, 4.) $AB^2 : PM^2 = AC^2 : AC^2 - AP^2$, und $AD^2 : PN^2 = AC^2 : AC^2 - AP^2$, also ist AB : PM = AD : PN,

Digitized by Google

oder AB : AD = PM : PN. Nun verhalten sich in ähnlichen Ellipsen, wie es die durch BAD, MPN sind, die correspondirenden Abscissen wie die zugehörigen Ordinaten (66, und Artik. Ähnlichkeit, Th. I. S. 19.). Also sind PM, PN Halbmesser des Schnittes, und P ist der Mittelpunct. Die beiden Halbmesser sind ungleich.

70. Ist AB = AD, also der Schnitt ein Kreis, so ist PM = PN, und der Schnitt MPN ist ein Kreis. Daher sind alle durch CE gelegten Schnitte dem EBC oder EDC und einander gleich. Das Ellipsoid ist ein durch Drehung der Ellipse CBE um CE beschriebenes, ein Solide de revolution.

Die Halbaxe AC mag grösser oder kleiner seyn als die Halbaxe AB.

Sind alle drey Halbaxen einander gleich, so ist der Körper eine Kugel.

71. Die Gleichung für die Fläche des Ellipsoids zu finden. — Es sey MRN (Fig. 80.) der elliptische Quadrant in dem Schnitte durch MPN. Man nehme auf PN die Abscisse PQ, und ziehe auf diese die Ordinate QR. In den ähnlichen Ellipsen BAD, MPN ist

$$AB : AD = PM : PN.$$

In den Ellipsen MPN, CAD ist (Ellipse, 4),

$$PM^2 (PN^2 - PQ^2) = PN^2 . QR^2;$$
$$AD^2 (AC^2 - AP^2) = AC^2 . PN^2.$$

Die erstere Gleichung verwandelt sich wegen der angeführten Proportion in diese:

$$AB^2 (PN^2 - PQ^2) = AD^2 . QR^2.$$

Setzt man für PN^2 seinen Werth aus der zweyten Gleichung, so ist

$$AB^2 . AD^2 (AC^2 - AP^2) - AB^2 . AC^2 . PQ^2 = AC^2 . AD^2 . QR^2.$$

Man setze AC = a; AD = b; AB = c; AP = x; PQ = y; QR = z, so ist die Gleichung für das Sphäroid,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Digitized by Google

72. Ist $a = b = c$, so wird die Gleichung für die Kugel erhalten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

73. Die beiden Schnitte durch die Axe der z seyn Hyperbeln, nämlich (Fig. 81.) in der Ebene der z, x die Hyperbel ECF, in der Ebene der z, y die GH, deren entgegengesetzte in der Zeichnung weggelassen sind. Der Schnitt durch die vier Scheitelpuncte dieser Hyperbeln, in der Ebene der x, y, ist eine geschlossene Figur, also eine Ellipse, von welcher der Bogen DC gezeichnet ist. Alle Schnitte, die den Ebenen ZAX, ZAY parallel sind, sind Hyperbeln, denen ECF und GDH ähnlich. Die auf die Axe AZ senkrechten Schnitte sind Ellipsen. Alle Schnitte, die außer den beiden durch die Axe AZ auf AX und AY geführten Schnitten durch dieselbe gehen, sind Hyperbeln, weil ein Schnitt auf einer Seite von AZ auch einen Schnitt in derselben Ebene auf der andern Seite mit sich bringt, eine Parabel aber nur auf einer Seite der AZ vorhanden seyn kann. Solchergestalt ist die Fläche wie ein doppelter Trichter gestaltet, dessen Axe AZ ist, und worin die gemeinschaftliche Mündung beider Theile durch CD geht. Euler nennt sie eine elliptisch-hyperbolische. Der Körper, der davon begränzt wird, ist ein hohles Hyperboloid. Für x und y, deren jenes kleiner als AC, und dieses zugleich kleiner als AD ist, sind keine Puncte einer Oberfläche vorhanden.

74. Der Anfangspunct A sey der Mittelpunct der Hyperbeln und der Ellipse, so wird die Oberfläche, so wie der Körper, durch jede der Ebenen der Coordinaten in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt. Der Punct A ist der Mittelpunct, welcher alle durch denselben an die Fläche gezogenen geraden halbirt.

75. Ist $AC = AD$, so wird das Hyperboloid durch die Umdrehung einer Hyperbel um die conjugirte Axe AZ erzeugt.

76. Wenn AC und $AD = a$ sind, so verwandelt sich das Hyperboloid in einen Kegel, dessen Scheitel A, und Axe AZ ist.

Digitized by Google

77. Die Hauptaxe der mit der Ebene ZAY parallelen Schnitte, die zwischen A und C geführt werden, liegt in der Ebene XAY, und der Mittelpunct der Hyperbeln liegt auf AC. Die Axe wird Null, wenn der Schnitt durch C geht, wobey die Hyperbel sich in zwey gerade, in C sich schneidende, verwandelt. Weiterhin schneidet die sich parallel bleibende Ebene die Hyperbel CEF in einer geraden Linie, und die beiden Scheitelpuncte der Hyperbel liegen auf der Hyperbel ECF, eben so wie an dem Ellipsoid die Scheitelpuncte der mit ZAY (Fig. 80.) parallelen Ellipse auf den beiden Ellipsen durch AX, nur daß an diesen vier Scheitelpuncte Statt haben, an dem Hyperboloid nur zwey. Die Mittelpuncte der Hyperbeln liegen auf CX; die halbe Hauptaxe der durch M und m gelegten Hyperbel ist PM. Von C nach X hin giebt es keine mögliche auf CX senkrechte Ordinaten, so wie von A bis nach C keine auf AC mögliche.

78. Die Gleichung für die elliptisch-hyperbolische Fläche zu finden. — Man führe parallel mit der Ebene XAY einen Schnitt durch M, so ist dieser eine Ellipse, deren mit AC, AD parallele Axen sich wie AC : AD verhalten. Ein Quadrant derselben ist in Fig. 81* besonders vorgestellt, wo die halbe Axe KM der Abscisse AP (Fig. 81.) gleich, und KM : KL = AC : AD ist. Es sey R irgend ein Punct des Umfanges von dem Schnitte und desselben Coordinaten KQ, QR. Es sey AB (Fig. 81.) die halbe Nebenaxe der Hyperbel ECF, so ist an der Hyperbel

$$AB^2 (AP^2 - AC^2) = AC^2 . PM^2,$$

und an der Ellipse

$$KL^2 (KM^2 - KQ^2) = KM^2 . QR^2.$$

Die letztere Gleichung verwandelt sich, wegen der obigen Proportion, und wegen KM = AP, in diese,

$$AD^2 (AP^2 - KQ^2) = AC^2 . QR^2.$$

Setzt man für AP^2 seinen Werth aus der erstern Gleichung, so entsteht hieraus:

Digitized by Google

$$AD^2.AC^2.PM^2 + AD^2.AB^2.AC^2 - AB^2.AD^2.KQ^2 = AB^2.AC^2.QR^2.$$

Man setze $KQ = x$, $QR = y$, $PM = z$; auch $AC = a$, $AD = b$, $AB = c$, so ist

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

die Gleichung für das hohle Hyperboloid. Sie folgt aus der für das Ellipsoid, wenn die Axe 2c, die in die Axe der z fällt, unmöglich, oder ihr Quadrat negativ genommen wird.

Die Nebenaxe, 2AB oder 2c, ist beiden Hyperbeln, ECF und GDH, gemein. Denn man setze in der Gleichung für die Fläche $y = 0$, so erhält man die Gleichung für die Hyperbel ECF, $c^2(x^2 - a^2) = a^2z^2$, worin a die halbe Hauptaxe und c die halbe Nebenaxe ist. Setzt man in jener Gleichung $x = 0$, so erhält man die Gleichung für die Hyperbel GDH, $c^2(y^2 - b^2) = b^2z^2$, worin c auch die halbe Nebenaxe ist.

In einem hyperbolischen Schnitte durch einen Punct der CX senkrecht auf dieselbe verhält sich die Hauptaxe zur Nebenaxe, wie an der Hyperbel GDH die Nebenaxe zur Hauptaxe, mit denen sie parallel sind, wenn nämlich die Nebenaxe senkrecht auf die Hauptaxe im Mittelpuncte gesetzt wird.

79. Ist $a = b = c$, so ist die Gleichung,

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Dieses Hyperboloid ist in Beziehung auf die Kugel das, was die gleichseitige Hyperbel in Beziehung auf den Kreis ist. Wenn man die Halbkreise einer Kugel von den gemeinschaftlichen Polen an zurückbiegt, und die Figur gehörig ändert, so entsteht das hohle Hyperboloid.

80. Man lasse die Scheitelpuncte zweyer hyperbolischen Hauptschnitte beide in eins fallen, wie in Fig. 82. wo die Hyperbel ECF in der Ebene XAY gedacht werden muß, und die Hyperbel GCH in der Ebene XAZ, senkrecht auf jene durch AX, und eben so auf der andern Seite von A die entgegengesetzten Hyperbeln ecf, gch.

Digitized by Google

Zwischen diesen Hauptschnitten liegt eine stetige Folge von Schnitten, welchen eine eben solche Folge jenseits A zugeordnet ist. Diese sind daher Hyperbeln. Die mit der Ebene YAZ parallelen Schnitte, welche diese Hyperbeln quer schneiden, sind also geschlossene Figuren, daher Ellipsen. Die Oberfläche, welche solchergestalt entsteht, nennt Euler eine hyperbolisch-hyperbolische; deutlicher möchte es seyn, sie eine konoidisch-hyperbolische zu benamen. Der Körper ist ein hyperbolisches Konoid.

81. Wenn die Hauptaxen, so wie die Nebenaxen einander gleich sind, so entsteht der Körper durch Drehung, und alle auf AX senkrechte Schnitte sind Kreise.

Wenn AC = 0 ist, so verwandelt sich der Körper in einen Kegel. Dieser macht den Übergang von dem Hyperboloid der einen Gattung zu dem der andern.

82. Die Gleichung für das hyperbolische Konoid zu finden. — Man führe (Fig. 82.) einen Schnitt senkrecht auf CX; dieser ist einer Ellipse EGFH, welche zur Hälfte in Fig. 82.* besonders vorgestellt ist. Die halben Nebenaxen der beiden Hyperbeln ECF, GCH sind AD, AB; die gemeinschaftliche halbe Hauptaxe ist AC. An den beiden Hyperbeln ist

$$AD^2 (AK^2 - AC^2) = AC^2 . KC^2,$$
$$AB^2 (AK^2 - AC^2) = AC^2 . KG^2.$$

Daher ist $AD : AB = KC : KG$.

In der Ellipse ist

$$KG^2 (KE^2 - KQ^2) = KE^2 . QR^2,$$
oder $$AB^2 (KE^2 - KQ^2) = AD^2 . QR^2.$$

Für KE^2 werde aus der Gleichung für die Hyperbel ECF der Werth gesetzt, so ist

$$AB^2 . AD^2 . AK^2 - AB^2 . AD^2 . AC^2 - AB^2 . AC^2 . KQ^2 = AC^2 . AD^2 . QR^2.$$

Man setze $AK = x$, $KQ = y$, $QR = z$; auch $AC = a$, $AD = b$, $AB = c$, so ist

Digitized by Google

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Diese Gleichung geht aus der für das Ellipsoid hervor, wenn die beiden Halbaxen, b, c, unmöglich oder ihre Quadrate negativ gesetzt werden.

83. Für das hyperbolische Konoid, das durch Umdrehung entsteht, ist $b = c$, und die Gleichung für dasselbe ist

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2z^2 = a^2b^2.$$

84. Durch die Umdrehung einer gleichseitigen Hyperbel um ihre Hauptaxe entsteht ein Körper, dessen Gleichung ist

$$x^2 - y^2 - z^2 = a^2.$$

85. Zwey Parabeln schneiden sich in ihren Axen mit gemeinschaftlichem Scheitelpuncte, welcher der Anfang der Coordinaten, x, y, z ist. Die Parabel AB (Fig. 83.) liege in der Ebene XAZ, die AC in der Ebene XAY. Zwischen diesen liegt eine stetige Folge von Parabeln, mit ungleichen Parametern, wenn die Parameter der Hauptschnitte ungleich sind. Es ist aus der Natur der Parabel offenbar, daß nur auf der einen Seite der Ebene YAZ die Fläche des Körpers sich erstrecken kann. Ein Schnitt wie MPN senkrecht auf AX ist eine geschlossene Figur, und daher eine Ellipse. Dieser Körper ist ein Paraboloid, und zum Unterschiede von der folgenden Art, das elliptische. Wenn die Parameter der Parabeln sich gleich sind, so sind die auf AX senkrechten Schnitte Kreise, und der Körper ist ein paraboliſches Konoid.

86. Die Gleichung für die Oberfläche des Paraboloids zu finden. — Es sey MPN (Fig. 83.) ein Schnitt senkrecht auf AX, und in demselben RQ senkrecht auf PN, den Durchschnitt des Schnittes mit der Ebene CAX. Der Parameter der Parabel AB sey $= a$; der Parabel $AC = b$, so ist $PM^2 = a \times AP$, und $PN^2 = b \times AP$. In der Ellipse MPN ist $PM^2 (PN^2 - PQ^2) = PN^2 . QR^2$. Da $PM^2 : PN^2 = a : b$ ist, so ist

$$a(b \times AP - PQ^2) = b \times QR^2.$$

Digitized by Google

Es sey $AP = x$, $PQ = y$, $QR = z$, so ist die Gleichung für das elliptische Paraboloid,

$$ay^2 + bz^2 = abx.$$

87. Für das parabolische Konoid ist

$$y^2 + z^2 = ax.$$

88. Die beiden durch den Anfang der Coordinaten der Fläche gelegten Parabeln können auch ihre Axen in entgegengesetzter Richtung haben, müssen aber alsdann ebenfalls in zwey verschiedenen Ebenen liegen, da jeder Schnitt einer Fläche vom zweyten Grade nur einen einzigen Kegelschnitt giebt, nicht zwey. — Es sey nämlich (Fig. 84.) BAb eine Parabel in der Ebene ZAX, und CAc eine Parabel in der Ebene X'AY. In der Ebene XAY (in der Figur rechter Hand) ist keine Begränzung der Fläche, wie in dem Falle, Fig. 83. durch die Parabel ANC. Denn da auf der andern Seite der Ebene YAZ in dem Theile X'AY derselben Ebene für den Schnitt eine Parabel genommen ist, so ist nach der entgegengesetzten Gegend keine Durchschnittslinie vorhanden. Man nehme nun einen Punct M der Parabel BA, ziehe MPm senkrecht auf AX, und setze durch MPm eine Ebene senkrecht auf AX oder parallel mit YAZ, welche die Ebene XAY in PN schneide, so ist PN unbegränzt, da PMm hingegen in M und m begränzt wird. Folglich ist der Schnitt eine Hyperbel, deren Scheitelpuncte in M, m liegen. Die Schnitte in dem andern Theile der krummen Fläche sind nun ebenfalls Hyperbeln, deren Scheitelpuncte, wie M, m, auf der Parabel CAc liegen. Die stetige Folge der Hyperbeln auf BAb bildet eine nach der Axe AX hin gerundete, ins Unendliche fortlaufende krumme Fläche. Eben so bildet die Folge der Hyperbeln auf CAc eine Fläche, die nach AX' hin gerundet ist. Schneidet man die Fläche durch eine Ebene parallel mit der Ebene der Parabel BAb, so trifft diese alle Hyperbeln, die auf dem Umfange der Parabel BAb senkrecht auf ihre Ebene gestellt sind; allein von den Hyperbeln auf dem Umfange der Parabel CAc nur die Reihe derer von A bis an den

Digitized by Google

jenigen Punct M oder m, deſſen Abſtand von AX' dem Abſtande der ſchneidenden Ebene von der Ebene der Parabel BAb gleich iſt. Dieſer Punct iſt daher der Scheitelpunct des paraboliſchen Schnittes. Eben ſo verhält es ſich mit den Schnitten, die der Ebene der Parabel CAc parallel geführt werden. Sie treffen alle Hyperbeln von A an bis an die durch einen Scheitelpunct M oder m, deſſen Abſtand von der Axe AX dem Abſtande der ſchneidenden Ebene von der Ebene CAc oder XAY gleich iſt. Wenn man ſich die Ebene XAY als horizontal, die Ebene XAZ als vertical vorſtellt, ſo ſind die Ebenen der hyperboliſchen Schnitte zwar alle vertical, aber nur die Axen der Hyperbeln über AX ſind vertical, die Axen derer über AX' ſind horizontal. — Dieſer Körper heißt das hyperboliſche Paraboloid.

89. Die Gleichung für dieſen Körper zu finden. — Es ſey (Fig. 84.) R ein Punct der Hyperbel RMr auf dem paraboliſchen Bogen AMB; die halbe Hauptaxe derſelben MP iſt eine Ordinate der Parabel. Auf die Axe AX in der Ebene XAY ſey durch P die ſenkrechte NP gezogen, und auf dieſe von R die ſenkrechte RQ. Die Hyperbel liegt nämlich in der Ebene MPN. Die halbe Nebenaxe der Hyperbel ſey $= a$, ſo iſt $a^2 (QR^2 - PM^2) = PM^2 . PQ^2$, da QR der Abſciſſe auf der Axe, und PQ der Ordinate auf ihren Endpunct gleich iſt. In dem andern Theile des Paraboloids ſey R ein Punct der Hyperbel RMr auf dem paraboliſchen Bogen CMA. Ihre halbe Hauptaxe PM iſt eine Ordinate dieſes Bogens. Auf die Axe AX' ſey in der Ebene ZAX' (einer verticalen) die NP ſenkrecht geſetzt, welche eben ſo wie die NP in dem Theile rechter Hand unbegränzt iſt. Auf dieſe ſey von R in der Ebene MPQ die ſenkrechte RQ gezogen. Die halbe Nebenaxe der Hyperbel RMr ſey $= \beta$, ſo iſt $\beta^2 (QR^2 - PM^2) = PM^2 . PQ^2$.

Der Parameter zu der Parabel BAb ſey $= a$; zu der Parabel CAc $= b$. In jener iſt $PM^2 = a \times AP$; in dieſer iſt $PM^2 = b \times AP$. Ferner ſind alle parallelen Schnitte ſich ähnlich, das iſt ihre Haupt- und Ne-

Digitized by Google

benaxen haben einerley Verhältniß; also ist für die Hyperbeln auf BAb, $\alpha : PM = m : 1$, und für die auf CAc, $\beta : PM = n : 1$, wo m und n unveränderliche Größen sind. In dem Theile des Paraboloids über AX, sey $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$; in dem Theile über AX' sey $AP = -x$, wegen der entgegengesetzten Lage; $PQ = z$; $QR = y$, weil hier PQ auf die Ebene XAY senkrecht, und QR derselben parallel ist. So wird die Richtung der Coordinaten zugleich durch die Buchstabenzeichen angegeben. Bey den beiden y, z, ist es gleichgültig, ob sie positiv oder negativ sind. Für den ersten Theil des Paraboloids ist nun die Gleichung,

$$m^2(z^2 - ax) = y^2,$$

für den andern Theil ist sie

$$n^2(y^2 + bx) = z^2.$$

Damit das ganze Paraboloid durch eine einzige Gleichung dargestellt werde, muß genommen werden, $m^2 = \frac{b}{a}$, und $n^2 = \frac{a}{b}$. Dadurch wird aus beiden Gleichungen diese einzige:

$$bz^2 - ay^2 = abx,$$

Die Gleichung für das hyperbolische Paraboloid. Sie entsteht aus der Gleichung für das elliptische dadurch, daß der Parameter b der Parabel in der Ebene XAY hier negativ genommen ist, wegen der entgegengesetzten Lage der Parabel in dieser Ebene.

90. Die Paraboloiden haben keinen Mittelpunct. Sie verhalten sich in dieser Rücksicht zu den beiden erstern Gattungen von Körpern oder Flächen, wie die Parabel zu den beiden andern Kegelschnitten.

91. Noch eine Gattung von Oberflächen des zweyten Grades sind die cylindrischen, die Grundfläche mag eine elliptische, oder hyperbolische, oder parabolische

Digitized by Google

seyn. Die Gleichungen für die der Grundfläche parallelen Schnitte sind die für jene selbst.

92. Daß die bisher abgehandelten Gattungen von krummen Flächen des zweyten Grades vollzählig sind, läßt sich leicht darthun. Es sind überhaupt nur dreyerley Schnitte möglich. Diese seyn durch E, P, H bezeichnet. Von diesen lassen sich in den drey Coordinaten-Ebenen zehn Combinationen machen. Die Combinationen, EEP, EEH, PPP, HHH, HHP, EHP, sind, wie aus den vorhergehenden Bemerkungen erhellt, nicht möglich, und so bleiben die Combinationen, EEE, HHE, PPE, PPH übrig, von welchen die zweyte zwey Gattungen liefert.

93. Aus den Gleichungen für die fünf Gattungen läßt sich die allgemeinste Gleichung für jede derselben herleiten, auf eine ähnliche Art, wie die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt aus den einfachsten Gleichungen für die besondern Gattungen hergeleitet ist. (Krumme Linien der ersten Classe, 29—34.). Dieses geschieht mittelst der Substitutionen in dem Artikel, krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 43—46. Die drey Coefficienten in den einfachsten Gleichungen, die drey Winkel für die neuen Coordinaten-Ebenen, und die drey Coordinaten zu dem neuen Anfangspuncte (daf. 48.) machen neun, von einander ganz unabhängige Größen aus, wodurch in der neuen vollzähligen Gleichung neun Coefficienten bestimmt werden. Diese hat zehn Glieder; aber die absolute Größe der Coefficienten ist willkürlich, da es dabey nur auf die Verhältnisse derselben ankommt. Aus den Formen einiger Coefficienten wird sich erkennen lassen, zu welcher Gattung von Flächen eine gegebene Gleichung gehöre, auf ähnliche Art wie bey den Gleichungen für Linien vom zweyten Grade.

94. Diese Methode ist bequemer, als die entgegengesetzte, von der allgemeinen Gleichung auf die Formen der einfachen zu kommen. Dieser bedienen sich Euler, la Croix, Biot und Monge. Aber die verwickelte und weitläuftige Rechnung gewährt keine deutliche Ueber-

Digitized by Google

sicht des Ganges vom Allgemeinen zum Einfachsten. Es entstehen auch Schwierigkeiten wegen des Falles, worin die Coordinaten des neuen Anfangspunctes unendlich groß werden, und wegen der Möglichkeit aller der constanten Größen, die zur Reduction einer gegebenen Gleichung auf die einfachste Form bestimmt werden müssen.

95. Die allgemeinste Gleichung ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Aus dieser lassen sich die Glieder, welche bloß die ersten Potenzen der Coordinaten enthalten, wegschaffen, unter einer gewissen Bedingung. Man setze nämlich

$$x = x' + a; \quad y = y' + b; \quad z = z' + c.$$

Ist nun

$$2Aa + Db + Ec + G = 0,$$
$$2Bb + Da + Fc + H = 0,$$
$$2Cc + Ea + Fb + K = 0,$$

so erhält die Gleichung die Form,

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + L' = 0,$$

wo die Symbole x', y', z', mit x, y, z vertauscht sind.

Aus diesen drey Gleichungen werden die Werthe von a, b, c hergeleitet, nach der Formel, Elimination, 6.

96. Der Anfangspunct der Coordinaten in der transformirten Gleichung ist der Mittelpunct des Körpers, weil derselbe alle gerade Linien, die dadurch bis an die Fläche gezogen werden, halbirt. Denn wenn man $+x$, $+y$, $+z$ mit $-x$, $-y$, $-z$ vertauscht, so bleibt die Gleichung unverändert, also auch die geraden, die von dem Anfangspuncte nach dem Puncte der Fläche, welcher durch die Coordinaten bestimmt wird, gezogen werden.

97. Ist aber der Nenner des Werthes von a Null, so ist auch der Nenner des Werthes von b und c Null,

Digitized by Google

und der Mittelpunct der Fläche, das ist, des Körpers, ist unendlich weit entfernt. Es giebt in diesem Falle eigentlich gar keinen Mittelpunct. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$4ABC + DEF = AFF + BEE + CDD.$$

98. Es ist zweytens die Frage, ob die Glieder mit xy, xz, yz alle drey weggeschafft werden können. Zu diesem Ende müssen die Formeln in dem Art. krumme Linien von gedopp. Krümmung, 46. angewandt werden, wodurch die drey Axen der Coordinaten eine veränderte Lage erhalten. Allein man möchte bezweifeln, ob in allen Fällen die drey Winkel ζ, η, ϑ, mögliche Werthe erhalten, wenn die Coefficienten D, E, F von xy, xz, yz gleich Null gesetzt werden. Euler und nach ihm la Croix helfen sich hier so: man könne immer zwey dieser Coefficienten $= 0$ setzen, wenn der dritte willkürlich genommen wird, und darauf könne man durch Veränderung der dritten Axe auch den dritten Coefficienten verschwinden machen. Allein man sieht nicht, warum es nicht einerley sey, die Substitutionen oder die Veränderungen in der Lage der Axen auf einmahl als nach einander vorzunehmen. Die unbekannte Größe, welche Euler für die Lage der dritten Axe zu suchen nöthig findet, ist ein Winkel, der durch seinen Sinus und Cosinus bestimmt wird. Diese können als bloße Größen möglich, und doch als Functionen eines Winkels unmöglich seyn.

Inzwischen läßt sich das Verfahren aus folgendem Grunde rechtfertigen. Die Winkel ζ, η, ϑ, welche zur Erfüllung der Gleichungen, $D' = 0$; $E' = 0$, $F' = 0$, in der neuen Gleichung für die Fläche bestimmt werden sollen, haben in der That drey Werthe, weil sie für je zwey der drey Coordinaten-Ebenen genommen werden können. Daher müssen ihre Functionen durch Gleichungen vom dritten Grade gefunden werden. Sind zwey Wurzeln einer solchen Gleichung möglich, so ist es auch die dritte.

Die ausgeführte Rechnung findet man in dem Essai de Géométrie analytique par Biot, 2de édit. §. 261;

Digitized by Google

und auf eine andere Art in der Application de l'Algebre à la Géometrie, par Monge et Hachette, à Paris 1805. p. 46. ff. In der letzten Schrift wird der darin geführte Beweis als der erste strenge, den man gefunden habe, angegeben.

99. Lassen sich die Glieder, welche x, y, z enthalten, sowohl als diejenigen, worin xy, xz, yz sind, wegschaffen, so hat die Fläche drey auf einander senkrechte Diametral-Ebenen, deren jede die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Hälften theilet, wie aus der Form der Gleichung, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$, erhellet. Der gemeinschaftliche Punct aller drey Ebenen ist der Mittelpunct der Fläche oder des davon begränzten Körpers. Die drey Durchschnittslinien dieser Ebenen sind die Hauptaxen der Fläche und des Körpers. Da die Paraboloiden vermöge ihrer Construction keinen Mittelpunct nach drey Diametral-Ebenen haben (91.), so erhellt, daß die ersten Potenzen und die Producte zweyer Coordinaten nicht immer zugleich weggeschafft werden können. In der vorher angeführten zweyten Schrift wird dieses als allgemein thunlich angegeben, und daraus gefolgert, daß alle Flächen des zweyten Grades drey gegen einander senkrechte Diametral-Ebenen haben.

100. In den cylindrischen Körpern, deren Grundfläche eine Ellipse oder Hyperbel ist, ist der Ort der Mittelpuncte die Axe derselben, nämlich die gerade, die durch die Mittelpuncte der parallelen und gleichen Schnitte geht. In den Ellipsoiden und Hyperboloiden ist nur ein Mittelpunct, der zugleich der gemeinschaftliche Punct der drey Diametralflächen ist. In den Gleichungen für diese beiden Gattungen müssen also die Coefficienten von xy, xz, yz zugleich mit denen von x, y, z Null werden.

101. Eine merkwürdige Eigenschaft der Flächen des zweyten Grades, (das hyperbolische Paraboloid ausgenommen) ist, daß durch jeden Punct derselben zwey Schnitte gelegt werden können, welche Kreise sind, nur daß diese bey den durch Drehung entstandenen Flächen in eins fallen, außer bey der Kugel, an welcher alle durch einen

Digitized by Google

Punct der Oberfläche geführten Schnitte Kreise sind. An dem schiefen Kegel hat man ein leichtes Beyspiel (Kegel, 8.9.); an dem senkrechten ist durch jeden Punct der Oberfläche nur ein einziger Schnitt ein Kreis. Zum Erweise jenes Satzes ist es vorher nöthig, die allgemeine Gleichung für den Kreis zu suchen. Sie folgt aus der allgemeinen Gleichung für die Ellipse (Krumme Linien der ersten Classe, 29.), doch wird es zur Deutlichkeit dienen, sie besonders zu entwickeln.

102. Es ist AMBm (Fig. 85.) ein Kreis, dessen Mittelpunct C. Auf dem Durchmesser AB = 2a sey AP = x; die senkrechte Ordinate PM = y. Mit AB sey eine neue Abscissenlinie TT parallel, auf dieser der Anfang der Abscissen in D, und E der Punct, wo die gerade PM sie trifft. Die senkrechte von D auf die gerade AB treffe sie in F, und es sey AF = b, DF = c. Nun ist x = t − b, und y = u − c. Durch die Substitution dieser Werthe in die Gleichung, $2ax - xx = yy$, wird die zwischen t und u erhalten, nämlich

$$t^2 + u^2 - 2(a+b)t - 2cu + bb + 2ab + cc = 0.$$

Hieraus erhellt sogleich, daß in der Gleichung für einen Kreis die Coefficienten von den Quadraten der Coordinaten sich gleich seyn müssen, wenn sie gleich nicht = 1 zu seyn brauchen, und daß das Glied mit ihrem Producte nicht vorhanden seyn darf. Es bleibt dabey noch eine Bedingung wegen der Möglichkeit des Halbmessers zu finden.

103. Eine gegebene Gleichung, worin jene beiden Bedingungen erfüllt sind, sey

$$t^2 + u^2 - 2At - 2Bu + C = 0,$$

so ist $a + b = A$; $c = B$;

$$bb + 2ab + cc = C.$$

Die letzte Gleichung verwandelt sich in diese:

$$A^2 + B^2 = C + aa.$$

Daher ist das Quadrat des Halbmessers

$$aa = A^2 + B^2 - C,$$

Digitized by Google

und die dritte Bedingung ist, daß $A^2 + B^2$ größer als C sey.

104. Ein Ellipsoid soll so geschnitten werden, daß der Schnitt ein Kreis ist. — Die Gleichung für dasselbe ist (71.)

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Man setze $m^2a^2 = f^2$; $n^2b^2 = f^2$; $p^2c^2 = f^2$; so wird die Gleichung

$$m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 = f^2.$$

In dieser setze man zufolge (15.),

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h;$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta;$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Es ist ϑ der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Ebene der x, y, und η der Winkel, welchen die Durchschnittslinie beider mit der Axe der x macht. Die Gleichung zwischen t und u ist nun

$$(m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2)\,t^2 - 2(m^2 - n^2)\sin\eta.\cos\eta.\cos\vartheta.\,tu$$
$$+ (m^2\sin\eta^2.\cos\vartheta^2 + n^2\cos\eta^2.\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2)u^2$$
$$+ 2m^2h\cos\eta.\,t - 2m^2h\sin\eta.\cos\vartheta.\,u$$
$$+ m^2h^2 - f^2 = 0.$$

Die beiden ersten Bedingungen für einen Kreisschnitt sind:

I. $(m^2 - n^2)\sin\eta.\cos\eta.\cos\vartheta = 0.$

II. $m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2 = m^2\sin\eta^2\cos\vartheta^2 + n^2\cos\eta^2.\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2.$

Um die dritte Bedingung darzustellen ist es nöthig, die Gleichung auf die Form in (103.) zu bringen. Zu dem Ende setze man zur Abkürzung $m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2 = q$, so sind die Werthe von A, B, C daselbst,

$$A = -\frac{m^2h\cos\eta}{q};\qquad B = \frac{m^2h\sin\eta.\cos\vartheta}{q};$$

Digitized by Google

$c = \frac{m^2 h^2 - f^2}{q}$, und es ist die dritte Bedingung,

$$m^4 h^2 \cos\eta^2 + m^4 h^2 \sin\eta^2 . \cos\vartheta^2 > (m^2 h^2 - f^2)(m^2 \cos\eta^2 + n^2 \sin\eta^2),$$

das ist, wenn man das auf beiden Seiten vorhandene Glied $m^4 h^2 \cos\eta^2$ wegläßt, und für f^2 den Werth, $m^2 a^2$, setzt, auch mit m^2 alles dividirt,

$$\text{III.} \quad m^2 h^2 \sin\eta^2 . \cos\vartheta^2 + m^2 a^2 \cos\eta^2 + n^2 a^2 \sin\eta^2 > n^2 h^2 \sin\eta^2.$$

Die erste Bedingung zu erfüllen, muß entweder seyn $m = n$; oder $\eta = 0$, oder $\eta = 90°$, oder $\vartheta = 90°$. Die erste Annahme würde die Auflösung einschränken; auch müßte zugleich wegen II. $p = n$ seyn, das ist, der Körper wäre eine Kugel, welcher Fall hier nicht in Betracht kommt.

Nimmt man $\eta = 0$, so ist $m^2 = n^2 \cos\vartheta^2 + p^2 \sin\vartheta^2$. Da $\frac{1}{\cos\vartheta^2} = 1 + \tang\vartheta^2$ ist, so ist $\tang\vartheta^2 = \frac{m^2 - n^2}{p^2 - m^2}$.

Nimmt man $\eta = 90°$, so ist $n^2 = m^2 \cos\vartheta^2 + p^2 \sin\vartheta^2$, und $\tang\vartheta^2 = \frac{n^2 - m^2}{p^2 - n^2}$.

Nimmt man $\vartheta = 90°$, so ist $m^2 \cos\eta^2 + n^2 \sin\eta^2 = p^2$, und $\tang\eta^2 = \frac{m^2 - p^2}{p^2 - n^2}$.

Eine von diesen Annahmen findet immer Statt. Denn die Ordnung, in welcher die Größen m, n, p aufeinander der Größe nach folgen, ist eine der folgenden, vorwärts oder rückwärts genommen, 1) n, m, p; 2) m, n, p; 3) m, p, n.

Die dritte Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn h kleiner oder = a ist; dann aber auch für größere Werthe, bis daß die beiden Theile auf jeder Seite des Zeichens der Ungleichheit sich gleich sind.

Digitized by Google

105. Der Halbmesser des Kreisschnittes sey = R, so ist

$$\frac{q^2}{m^2} R^2 = m^2 h^2 \sin\gamma^2 . \cos\vartheta^2 + m^2 a^2 \cos\gamma^2 + n^2 (a^2 - h^2) \sin\gamma^2 .$$

wo $q = m^2 \cos\gamma^2 + n^2 \sin\gamma^2$ ist.

106. Ein durch den Mittelpunct des Ellipsoids gelegter Kreisschnitt geht immer durch eine der drey Axen. Für diesen Fall ist h = o. Z. B. wenn in Fig. 80. AC der Größe nach zwischen die beiden, AB, AD fällt, so giebt es auf der Ellipse BD einen Halbmesser, der AC gleich ist, daher der durch denselben und durch AC geführte Schnitt ein Kreis ist.

107. In der Ellipse, wovon BD ein Quadrant ist, giebt es auf beiden Seiten von AD zwey Halbmesser, die der AC gleich sind; also gehen durch AC zwey Kreisschnitte, deren Winkel ϑ mit der Ebene CAD zusammen zwey rechte ausmachen. Eben so verhält es sich mit den ihnen parallelen Schnitten, die durch einen Punct der Oberfläche geführt werden. Daher rührt es, daß der Winkel ϑ durch das Quadrat der Tangente gegeben wird, wodurch ϑ zwey Werthe erhält, welche Nebenwinkel sind. Eben so mit dem Winkel γ. Denn γ ist in Absicht auf die Ebene CAB dasselbe, was ϑ in Absicht auf die Ebene CAD ist.

108. Für das Hyperboloid ist die Rechnung nur in den Vorzeichen von p^2, oder von p^2 und n^2, von der für das Ellipsoid verschieden. In der Gleichung für die erste Art ist p^2 negativ. Hier kann ϑ nicht = 90° gesetzt werden, weil diese Annahme für tang γ^2 einen negativen Werth giebt. Auch erhellt aus der Construction dieses Hyperboloids, daß die auf die Ebene der x, y senkrechten Ebenen alle Hyperbeln sind. Sie gehen entweder durch die Axe AZ, oder sind ihr parallel. Ist $m^2 > n^2$, so muß $\gamma = 90^\circ$ genommen werden, und es ist alsdann tang $\vartheta^2 = \frac{m^2 - n^2}{n^2 + p^2}$; ist aber $m^2 < n^2$, so ist $\gamma =$ o

zu nehmen, wodurch $\tang \vartheta^2 = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + p^2}$ ist. Die dritte Bedingung erhält dieselbe Formel wie für das Ellipsoid.

109. In der Gleichung für das Hyperboloid der zweyten Art sind n^2 und p^2 negativ. Es kann daher nicht $\psi = 0$ seyn, als welches einen negativen Werth für $\tang \vartheta^2$ gäbe. Ist $p > n$, so muß $\eta = 90°$ seyn, wodurch $\tang \vartheta^2 = \frac{m^2 + n^2}{p^2 - n^2}$ wird. Ist $p < n$, so ist $\vartheta = 90°$, und $\tang \eta^2 = \frac{m^2 + p^2}{n^2 - p^2}$. Die dritte Bedingung ist nun enthalten in der Formel,

$$m^2 h^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 + m^2 a^2 \cos \eta^2 + n^2 h^2 \sin \eta^2 > n^2 a^2 \sin \eta^2,$$

Diese wird erfüllt, wenn h größer oder gleich a ist, auch für kleinere Werthe, bis zu demjenigen, wodurch beide Theile der Formel sich gleich werden.

110. Für das Paraboloid der ersten Art ist die Gleichung, (86.)

$$a y^2 + b z^2 - a b x = 0.$$

Durch die vorigen Substitutionen entsteht hieraus die Gleichung,

$$a \sin \eta^2 . t^2 + 2 a \sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta . t u + (a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 + b \sin \vartheta^2) u^2 - a b \cos \eta . t + a b \sin \eta . \cos \vartheta . u - a b h = 0.$$

Damit diese Gleichung für eine Kreislinie gehöre, muß seyn

I. $\sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta = 0.$

II. $a \sin \eta^2 = a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 + b \sin \vartheta^2.$

III. $b^2 \cos \eta^2 + b^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 + 4 a b h \sin \eta^2 > 0.$

Die letztere Formel zu erhalten, muß die Gleichung vorher durch $a \sin \eta^2$ dividirt werden, um die Coefficienten von t^2 und u^2 jeden $= 1$ zu machen.

Digitized by Google

Es kann η nicht $= 0$ seyn, weil dieses für lang ϑ einen negativen Werth geben würde; auch erhellt aus der Construction, daß die Schnitte dieser Art Parabeln sind.

Nimmt man $\eta = 90^0$, so ist $\frac{a}{b} = \sin \vartheta^2$, wo $b < a$ seyn muß. In dem gegenseitigen Falle ist $\vartheta = 90^0$ zu setzen, wodurch $\sin \eta^2 = \frac{b}{a}$ wird.

Für positive h ist die Formel III. immer erfüllbar; für negative h, so lange $4h < b \cot \eta^2 + b \cos \vartheta^2$ ist. Ist a kleiner als b, also $\eta = 90^0$, so ist ein Kreisschnitt für negative h möglich, wenn $4h < b - a$. Ist b größer als a, also $\vartheta = 90^0$, so ist ein Kreisschnitt für negative h möglich, wenn $4h < a - b$ ist. Ist ein solches $h = \frac{1}{4}(b-a)$ oder $\frac{1}{4}(a-b)$, so berührt die Ebene die krumme Fläche.

Das Quadrat des Halbmessers des Kreisschnittes ist in dem Falle, da $\eta = 90^0$ gesetzt werden muß, $= \frac{1}{4} b (b-a) + bh$; und in dem Falle, da $\vartheta = 90^0$ zu nehmen ist, $= \frac{1}{4} a(a-b) + ah$.

III. Für das Paraboloid der zweyten Art (89.) ist die Gleichung,

$$ay^2 - bz^2 + abx = 0;$$

und die transformirte,

$$a \sin \eta^2 . t^2 + 2a \sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta . tu + (a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 - b \sin \vartheta^2) u^2 + ab \cos \eta . t - ab \sin \eta . \cos \vartheta . u + abh = 0.$$

Es muß also seyn

I. $\sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta = 0$,

II. $a \sin \eta^2 = a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 - b \sin \vartheta^2$.

III. $b^2 \cos \eta^2 + b^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 - 4bh . \sin \eta^2 > 0$.

Nimmt man $\eta = 0$, so ist der Coefficient von $t^2 = 0$; setzt man nun den von u^2 auch $= 0$, so bleiben von der ganzen Gleichung nur die Glieder $ab \cos \eta . t + abh = 0$.

Digitized by Google

Nimmt man $\gamma = 90°$, so wird der Werth von $\sin \beta^2$ negativ. Nimmt man $\beta = 90°$, so wird der Werth von $\sin \gamma^2$ negativ. Folglich ist es bey diesem Körper nicht möglich einen Kreisschnitt zu führen. Auch zeigt die Construction des Körpers, daß kein solcher Schnitt daran möglich ist. Es sind hier keine elliptischen Schnitte möglich, daher auch keine Kreisschnitte. Biot und Monge haben an diese Ausnahme nicht gedacht. —

Berührende Ebene an einer krummen Fläche.

112. Eine berührende Ebene an einer krummen Fläche ist diejenige, für welche die partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$, an einem gemeinschaftlichen Puncte beider dieselben sind wie an der krummen Fläche. Unter z wird diejenige der Coordinaten verstanden, die sich an die krumme Fläche endigt, welches aber auch jede der übrigen seyn kann. Sie hat bisher eine solche bezeichnet. Bey dieser Annahme fallen in dem Schnitte, der durch diesen Punct parallel mit der Ebene der x, z, und an dem Schnitte, welcher der Ebene der y, z parallel ist, die berührenden geraden in die Ebene, welche für den gemeinschaftlichen Punct jene Differentialquotienten mit der krummen Fläche gemein hat. Es ist nämlich $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ die Tangente des Winkels, welchen die berührende an der krummen Fläche in einer, der Ebene der x und z parallelen Durchschnitts-Ebene, mit der Ordinate z macht. Eben so ist $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ die Tangente des Winkels, welchen die berührende an der krummen Fläche in einer, der Ebene der y und z parallelen Durchschnitts-Ebene, mit der Ordinate z macht. Durch diese beide berührenden geraden wird die berührende Ebene bestimmt, die weniger von der krummen Fläche abweicht, als jede andere, an welcher die endlichen Unterschiede der Coordinaten mit denen an der krummen Fläche übereinkommen, als welches nur bey schnei-

Digitized by Google

beyden Ebenen Statt hat, eben so wie bey der berührenden an einfach krummen Linien.

113. Die Gleichung für die krumme Fläche gebe die Differentialgleichung,

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0,$$

wo P, Q, R, Functionen von x, y, z, es sey von allen oder von zweyen oder von einer derselben, sind, zum Theil auch eine gegebene Größe seyn können. Die Gleichung für die gesuchte berührende Ebene sey (5.)

$$Ax - By + Cz - D = 0,$$

oder durch die zu ihr gehörigen Winkel η, ϑ und den Abstand h,

$$x \sin\eta - y\cos\eta + z\cot\vartheta. - h\sin\eta = 0.$$

Es ist nun für diese Ebene,

$$A\partial x - B\partial y + C\partial z = 0.$$

Die Gleichung für die krumme Fläche giebt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -\frac{R}{P}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -\frac{R}{Q};$$

Die Gleichung für die Ebene giebt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -\frac{C}{A}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{C}{B};$$

Berührt die Ebene die krumme Fläche, so sind diese Quotienten jenen gleich. Nimmt man $A = P$, so gilt auch für die Ebene die Gleichung,

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0,$$

wofern die Functionen P, Q, R für jedes x, y, z diejenigen Werthe unveränderlich behalten, welche sie an der krummen Fläche bloß für den Berührungspunct, als Functionen von x, y, z, haben. Bey dieser Annahme giebt die Integration die Gleichung,

$$Px + Qy + Rz = D,$$

wo D die Constante ist, die hier, wie bey jeder Integra-

Digitized by Google

tion, bestimmt werden muß. In dem Berührungspuncte seyn die gemeinschaftlichen Coordinaten, p, q, r, so ist

$$Pp + Qq + Rr = D,$$

also ist

$$P(x-p) + Q(y-q) + R(z-r) = 0.$$

In den Functionen P, Q, R sind für x, y, z die Coordinaten zu dem Berührungspuncte zu setzen.

114. Die Vergleichung mit der zweyten Form der Gleichung für eine Ebene,

$$x \sin\eta - y \cos\eta + z \cot\vartheta = h \sin\eta,$$

giebt, wenn diese durch $\cos\eta$, die Gleichung $Px + Qy + Rz = D$ durch Q dividirt wird, um den Verhältnissen der Coefficienten ein bestimmtes Glied zu geben,

$$\tang\eta = -\frac{P}{Q}; \quad \text{also } \cos\eta = -\frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}.$$

Ferner $-\frac{\cot\vartheta}{\cos\eta} = \frac{R}{Q}$, also $\tang\vartheta = -\frac{Q}{R\cos\eta} = \frac{\sqrt{(P^2+Q^2)}}{R}$. Auch ist

$$-h\tang\eta = \frac{D}{Q}, \text{ das ist } h = p + \frac{Q}{P}q + \frac{R}{P}r.$$

115. Anwendung auf krumme Flächen des zweyten Grades. — Für eine solche sey die Gleichung,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Die Differentiation giebt

$$(2Ax + D)\partial x + (2By + E)\partial y + (2Cz + F)\partial z = 0.$$

Für einen Punct, dessen Coordinaten sind p, q, r, wird die berührende Ebene bestimmt durch die Gleichung,

$$(2Ap + D)(x-p) + (2Bq + E)(y-q) + (2Cr + F)(z-r) = 0.$$

Für diese ist

$$\tang\eta = -\frac{2Ap + D}{2Bq + E}.$$

Digitized by Google

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{\sqrt{[(2Ap+D)^2+(2Bp+E)^2]}}{2Cr+F},$$

$$h = p + \frac{2Bq+E}{2Ap+D}\,q + \frac{2Cr+F}{2Ap+D}\,r.$$

116. Man kann auch in den Werth von h das in der Gleichung für die Fläche befindliche, unveränderliche Glied, G, hineinbringen. Es ist nämlich, da p, q, r, Coordinaten an die Fläche sind,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dp + Eq + Fr + G = 0.$$

Nun ist gefunden $(2Ap + D)h = 2Ap^2 + 2Bq^2 + 2Cr^2 + Dp + Eq + Fr$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$h = -\frac{Dp + Eq + Fr + 2G}{2Ap + D}.$$

117. Exempel. An einem Ellipsoid sey der Mittelpunct der Anfang der Coordinaten, so ist die Gleichung für dieselbe (71.),

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Hier ist $P = 2b^2c^2x$; $Q = 2a^2c^2y$; $R = 2a^2b^2z$. Folglich ist die Gleichung für eine berührende Ebene an dem Ellipsoid, wenn für x, y, z ihre Werthe in dem Berührungspuncte gesetzt werden,

$$b^2c^2p(x-p) + a^2c^2q(y-q) + a^2b^2r(z-r) = 0.$$

Da $b^2c^2p^2 + a^2c^2q^2 + a^2b^2r^2 = a^2b^2c^2$ ist, so ist die Gleichung für die berührende Ebene,

$$b^2c^2px + a^2c^2qy + a^2b^2rz = a^2b^2c^2.$$

Auch ist $\text{tang}\,\eta = -\frac{b^2p}{a^2q}$; $\text{tang}\,\vartheta = \frac{c^2\sqrt{(b^4p^2+a^4q^2)}}{a^2b^2r}$; $h = \frac{aa}{p}$.

118. Für die berührende Ebene an einer Kugelfläche ist die Gleichung,

$$px + qy + rz = aa.$$

Digitized by Google

Auch ist tang $\eta = -\frac{p}{q}$; tang $\vartheta = \frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{r}$;

$h = \frac{aa}{p}$.

119. Zur Erläuterung dient noch die Zeichnung, (Fig. 86.), wo APB ein Kreis um den Mittelpunct C, in der Ebene der x, y ist, CM = x oder p; MN = y oder q. In N sey PN auf den Halbmesser CD senkrecht, und NP die in P berührende, welche die gerade CD in Q treffe. Das Dreyeck CPQ stelle man sich über CQ senkrecht gegen die Ebene des Kreises aufgerichtet vor, so liegt PQ in der die Kugel in P berührenden Ebene. Wegen der gleichförmigen Krümmung der Kugel macht die berührende Ebene mit CQ auf beiden Seiten gleiche Winkel, oder es ist CQR ein rechter Winkel, daher CQP der Neigungswinkel der berührenden Ebene gegen die Ebene APB ist. Nun ist tang CQP = tang CPN = $\frac{CN}{PN}$ = $\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{r}$, positiv, weil der Winkel die in (4.) angenommene Lage hat. Ferner ist der W. CRQ = CNM, also tang CRQ = $\frac{p}{q}$. Es ist aber CRQ der Nebenwinkel von QRX = η, also tang $\eta = -\frac{p}{q}$. Drittens ist CM : CN = CQ : CR, und CN : CP = CP : CQ. Daher CM : CP = CP : CR, also CR = $\frac{aa}{x}$.

Von der Bestimmung der Krümmung an jedem Puncte einer krummen Fläche, nach irgend einer gegebenen Durchschnittsfläche, insbesondere der größten und kleinsten, in dem Artikel, Krümmungskreis, 63. ff.

Durchschnittslinien krummer Flächen.

120. Zwey krumme Flächen, welche auf dieselben coordinirten Ebenen bezogen werden, sind durch Gleichun-

Digitized by Google

gen zwischen ihren Coordinaten gegeben; es soll die krumme Linie gefunden werden, in welcher beide Flächen einander schneiden.

Diese krumme Linie wird gewöhnlich eine von doppelter Krümmung seyn. Deßwegen ist es nöthig, zwey Gleichungen für sie zu suchen, zwischen zwey Paaren der Coordinaten x, y, z. Die Aufgabe ist dieselbe mit der Eliminations-Aufgabe. Die Gleichungen für die beiden Flächen seyn $V = o$; $U = o$. In den gemeinschaftlichen Puncten sind die drey Coordinaten beider Flächen dieselben, in andern Puncten sind sie verschieden, oder nur zwey einander gleich. Schafft man eine der Coordinaten, als z, weg, so wird eine Gleichung zwischen den beiden andern, x, y, erhalten. Wird für eine dieser, als x, die andere, y, der Gleichung gemäß bestimmt, so geben diese Werthe von x und y in beiden Gleichungen, $V = o$; $U = o$, denselben Werth von z. Denn die Wegschaffung von z setzte voraus, daß die Werthe von z gleich sind.

121. Die Gleichung zwischen x und y ist die Gleichung für die Projection der Durchschnittslinie beider Flächen auf die Ebene der x, y. Eben so ist die Gleichung zwischen x und z oder y und z diejenige für die Projection auf die Ebene der x, z oder y, z. Zwey dieser drey Gleichungen bestimmen die Curve, indem die dritte eine Folge von den beiden andern ist.

Beyspiele werden dieses Verfahren ohne weitere Theorie hinlänglich aufklären.

122. Exempel. I. Die Durchschnittslinie einer Kugel und eines senkrechten Cylinders zu finden. — Die Ebene der x, y sey senkrecht auf die Axe des Cylinders, und der Schnitt des Cylinders von dieser Ebene gehe durch den Mittelpunct der Kugel. Der Anfang der Coordinaten sey in eben diesem Puncte. Diese erleichternde Bestimmung der Lage verändert im Wesentlichen nichts. Der Halbmesser der Kugel sey $= a$; des Cylinders $= b$. Die Gleichung für die Kugelfläche ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = aa \qquad (72.);$$

Digitized by Google

Die Gleichung für den Querschnitt des Cylinders ist

$$2bx - xx = yy.$$

Jedes z, das mit einem x und zugehörigen y an diesem Schnitte verbunden wird, giebt einen Punct der Cylinderfläche. Die Gleichung gilt für die Projection der Durchschnittslinie beider krummen Flächen auf die Ebene der x, y.

Man lasse nun die Ordinate y für beide Flächen dieselbe seyn, so ist, was sie auch seyn mag,

$$zz = aa - 2bx.$$

Diese Gleichung gehört für eine Parabel, deren Parameter $= 2b$, und in welcher der Abstand des Scheitels vom Anfange der Abscissen $= +\frac{aa}{2b}$ ist. Sie ist die Projection des Schnittes beider Flächen auf die Ebene der x, z. Die Ordinate z muß so wohl negativ als positiv genommen werden, da auf beiden Seiten der Ebene der x, y Kugel und Cylinder sich schneiden. Die Durchschnittslinien hängen zusammen, wenn $a = 2b$ ist. Größer als a, oder größer als $2b$, wenn $2b$ kleiner als a ist, kann x nicht genommen werden. Die Curve auf beiden Flächen ist zwar geschlossen, wird aber hier durch einen parabolischen Bogen entworfen, der für beide Theile auf beiden Seiten der Ebene der x, z gilt.

Man sieht leicht, daß auf der Ebene der y, z die Durchschnittslinien beider Flächen so wohl diesseits als jenseits der Ebene der x, y durch eine geschlossene Figur entworfen werden müssen. Die Gleichung für diese wird erhalten, wenn x weggeschafft wird. Da $x = \frac{aa - zz}{2b}$ ist, so ist

$$\frac{(aa - zz)^2}{4b^2} + yy + zz = aa,$$

das ist

$$z^4 - 2(a^2 - 2b^2)z^2 + 4b^2yy + a^4 - 4a^2b^2 = 0.$$

Daraus ist

$$z^2 = a^2 - 2b^2 \pm 2b\sqrt{(b^2 - y^2)},$$

Digitized by Google

Es hat z vier Werthe, von welchen zwey und zwey sich gleich und entgegengesetzt sind.

123. Exempel. II. Die Durchschnittslinie zweyer cylindrischen Flächen, zu finden, deren Axen sich senkrecht schneiden, und auch senkrecht auf die Grundfläche, die Kreise sind, stehen. — Die Axen der beiden Cylinder seyn die Axen der x und y; der Halbmesser des erstern sey a, des andern b. Die Projection der erstern Fläche auf die Ebene der y, z ist ein Kreis, für welchen ist $y^2 + z^2 = a^2$. Für die Projection des andern auf die Ebene der x, z ist, $x^2 + z^2 = b^2$. Diese sind zugleich die Projectionen der Durchschnittslinien auf die beiden Ebenen. Daraus wird für die Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der x, y, wegen der gemeinschaftlichen z an beiden Flächen, die Gleichung, $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$, oder $y^2 - x^2 = a^2 - b^2$, wenn a größer als b ist. Dieses ist die Gleichung für eine gleichseitige Hyperbel. (Hyperbel, 3. u. 31.). Das Quadrat jeder der halben Axen ist hier $b^2 - a^2$ oder $a^2 - b^2$. Die Hauptaxe und die Scheitelpuncte liegen in jenem Falle auf der Axe der x, in diesem auf der Axe der y. Eine cylindrische Fläche, die über dem hyperbolischen Bogen senkrecht auf ihre Ebene errichtet wird, begegnet den beiden circular-cylindrischen Flächen in ihrem Durchschnitte.

Wenn die Cylinder ungleich sind, so bleibt auf dem größern über dem kleinern um die Axe der z ein Stück der Fläche übrig. Ist $a = b$, so treffen sich beide Durchschnittslinien in der Axe der z. Es ist nun für jeden Punct derselben $x = y$, ihre Projection eine gerade Linie. Auf dieser nehme man die Abscisse $t = x\sqrt{2}$, oder $t = y\sqrt{2}$, (da $x^2 + y^2 = t^2$), so ist $t^2 + 2z^2 = 2a^2$. Dieses ist die Gleichung für eine Ellipse, deren halbe große Axe $= a\sqrt{2}$, und halbe kleine Axe $= a$ ist. (Ellipse, 4.).

Wenn die Cylinder schiefwinklichte sind, so sind die Projectionen ihrer Grundflächen Ellipsen. Dieses macht die Rechnung nur etwas umständlicher. So auch, wenn

Digitized by Google

die Axen der Cylinder sich unter einem schiefen Winkel schneiden. Übrigens sieht man hieraus, wie geschmeidig sich die Berechnung der Kreuzgewölbe und Gewölbeöffnungen (Lunettes) durch die hier angewandte Methode machen läßt. Die Klostergewölbe werden auf dieselbe Art berechnet. Man mag hiemit noch vergleichen eine Abhandlung von Kästner: Cylindrorum rectorum se decussantium Sectiones ad Geometriam fornicum relatae. Commentatt. Soc. Götting Vol. X.

124. Exempel. III. Die Durchschnittslinie eines senkrechten Kegels und eines circularen Paraboloids zu finden, deren Axe in dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte senkrecht auf einander stehen.

Den Scheitelpunct nehme man zum Anfangspuncte der Coordinaten; die Axe des Kegels sey die Axe der x; die Höhe verhalte sich zum Halbmesser der Grundfläche wie 1 : m, so ist die Gleichung für die Kegelfläche (35.)

$$y^2 + z^2 = m^2 x^2,$$

und für die Fläche des Paraboloids (87.)

$$x^2 + z^2 = ay,$$

weil hier x und y mit einander zu vertauschen sind, da die Axe der y hier die Axe des Paraboloids ist. Die Elimination von z giebt für die Projection auf die Ebene der x, y die Gleichung,

$$y^2 + ay = (m^2 + 1)\, x^2.$$

Sie ist also eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= a$, und Parameter $= \frac{a}{m^2 + 1}$ ist. Ihre Hauptaxe liegt in der Axe der y, und der eine Scheitelpunct liegt in dem Anfangspuncte der Coordinaten.

Die Elimination von x giebt die Gleichung für die Projection auf die Ebene der y, z, nämlich

$$m^2 ay - y^2 = (m^2 + 1)\, z^2.$$

Digitized by Google

Diese ist also eine Ellipse, worin $m^2 a$ die große Axe, und $\frac{m^2 a}{m^2+1}$ der Parameter ist. Die Ordinaten y werden auf der großen Axe von dem Scheitel an genommen. Die Gleichung für eine Ellipse, wenn die Abscissen auf der kleinen Axe genommen werden, hat zwar eben die Form, aber der Coefficient von z^2 ist dann kleiner als die Einheit.

Die Gleichung für die Projection auf die Ebene der x, z ist

$$x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + a^2z^2 - m^2a^2x^2 = 0.$$

125. Exempel. IV. Die Gleichungen für die Durchschnittslinie einer Kugel und eines Kegels zu finden.

Der Mittelpunct der Kugel sey zugleich derjenige der Grundfläche des Kegels, und auch der Anfang der gemeinschaftlichen Coordinaten. Die Coordinaten zu dem Scheitelpuncte des Kegels seyn a, b, c; der Halbmesser seiner Grundfläche $= r$; der Kugel $= R$. Es ist nun die Gleichung für die Kegelfläche (30.)

$$\left(\frac{az-cx}{c-z}\right)^2 + \left(\frac{bz-cy}{c-z}\right)^2 = r^2,$$

und für die Kugelfläche (72.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

Jene entwickelt ist

$$(a^2+b^2-r^2)z^2 + c^2y^2 + c^2x^2 - 2acxz - 2bcyz + 2cr^2z - c^2r^2 = 0.$$

Man nehme $b = 0$, welches nichts anders ist, als die Axe der x durch den Grundpunct des Scheitels legen, und es ist die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(a^2-r^2)z^2 + c^2y^2 + c^2x^2 - 2acxz + 2cr^2z - c^2r^2 = 0.$$

Da $y^2 + x^2 = R^2 - z^2$, so ist für die Projection auf die Ebene der x, z die Gleichung

$$(a^2-c^2-r^2)z^2 - 2acxz + 2cr^2z + c^2(R^2-r^2) = 0.$$

Digitized by Google

Da in dieser Gleichung das Quadrat der einen veränderlichen Größe fehlt, so gilt sie für eine Hyperbel, deren Abscissenlinie die eine Asymptote ist. (Krumme Linien der ersten Classe, 33.).

Die Gleichungen für die Projectionen auf die Ebenen der x, y und y, z steigen auf den vierten Grad.

Abwickelung krummer Flächen.

126. Von der Abwickelung krummer Flächen ist ein Beyspiel an dem Kegel, besonders dem schiefen, schon in dem Artikel, Kegel, vorgekommen, auch an dem Cylinder. An dem letzten besteht die Oberfläche aus einer stetigen Folge gerader parallelen Linien, an dem erstern aus einer solchen Folge von geraden, die in demselben Puncte zusammen kommen. Darin liegt der Grund, warum sie sich abwickeln und in eine ebene Fläche, ohne Dehnung oder Zusammenziehung, ausbreiten lassen. Es geschieht hier dasselbe, was bey einer nicht stetigen Folge von geraden, deren je zwey nächste eine Ebene begränzen, von welchen aber je drey nicht in einer Ebene liegen, wohl aber je zwey, wenn diese nämlich entweder einander parallel sind, oder sich in einem gegebenen Puncte schneiden. Verwandelt man die stumpfen Winkel, welche je zwey an einander stoßende Ebenen mit einander machen, in zwey rechte, so breiten sich die gegen einander geneigten Ebenen in eine einzige Ebene aus, die denselben Flächenraum behält, so fern die geraden ihre Längen behalten.

127. Man lasse den Durchschnittspunct je zweyer auf einander folgenden geraden veränderlich seyn, so bleibt doch die Abwickelbarkeit der krummen Fläche.

128. Die Puncte A, B, C, D... (Fig. 87.) seyn die Durchschnittspuncte der geraden PA, AQ; QB, BR; RC, CS; SD, DT...., welche alle in einer Ebene liegen. Nun gebe man der Winkelfläche QBR eine Neigung gegen die PAQ, und eben so der Winkelfläche RCS gegen QBR; der SDT gegen RCS..... Die Durchschnittspuncte der geraden bleiben dabey auf diesen unverrückt, da die Winkelflächen sich bloß um den ei-

Digitized by Google

um Scheitel drehen; allein eben diese Puncte bleiben nun nicht mehr in derselben Ebene. Die beiden ersten, A, B, bleiben noch in der anfänglichen Ebene PAQ, weil QB darin bleibt; allein C liegt nicht mehr in jener Ebene, da die gerade RBC dieselbe bloß in B trifft. Eben so liegt D nicht in der Ebene QBR; u. s. f. Je zwey nächste Winkelflächen haben nur zwey dieser Durchschnittspuncte gemein. Man vermehre die Anzahl der geraden Linien ohne Ende, indem ihre Winkel ohne Ende vermindert werden, so daß die Folge der geraden Linien eine stetige sey, die nach irgend einem Gesetze bestimmt werde; und es entsteht eine krumme abwickelbare Fläche. Die Durchschnittspuncte zweyer nächsten in der stetigen Folge liegen auf einer gedoppelt krummen Linie, deren Berührende alle in der krummen Fläche liegen.

129. Wird diese gedoppelt krumme Linie nach einem gewissen Gesetze bestimmt, so wird dadurch die krumme Fläche gegeben. Sie ist der Ort der berührenden an dieser gedoppelt krummen Linie.

130. Sind die geraden PA, QB, RC, SD . . . Normalen an eine gedoppelt krumme Linie, so ist der Ort der Durchschnittspuncte je zweyer nächsten Normalen in ihrer stetigen Folge eine gedoppelt krumme Linie, eine Evolute höherer Art, zu welcher jene als evolvirende (abwickelnde) gehört. Die Normalen, welche bey einfach krummen Linien in derselben Ebene bleiben, bilden hier eine krumme Fläche. Diese Normalen liegen jede in der Krümmungs-Ebene (Krumme Linien von gedoppelter Krümmung, so.) für jeden Punct der gedoppelt krummen Linie. So wie eine einfach krumme Evolute die Scheidung des ebenen Raums macht, worin die Normalen einer einfach krummen Linie liegen, so ist eine durch die gedoppelt krumme Evolute gelegte cylindrische Fläche die Scheidewand des Raums, worin die von den Normalen gebildete krumme Fläche liegt. — Monge nennt die gedoppelt krumme Evolute eine Arête de rebroussement, weil er sie mit dem Rückkehrpuncte an einer einfach krummen Linie vergleicht. Die von mir gemachte Vergleichung

Digitized by Google

scheint mir angemessener. Das Wort Arête oder Kante bedeutet jede der auf den krummen Flächen, von welchen hier die Rede ist, gezogene gerade, als Durchschnittslinie zweyer Ebenen, die einen unendlich kleinen Winkel mit einander machen.

131. Man gedenke sich (Fig. 87.) auf jede der verschiedenen Ebenen, PAQ, QBR, RCS... durch die Schenkel der Winkel PA, QB, RC... senkrechte Ebenen auf die Winkelflächen, durch PA auf PAQ, durch QB auf QBR, u. s. f. Die Durchschnittslinien dieser Ebenen, als Ap, Bq, Cr, Ds... bilden eine neue aus Winkelflächen zusammengesetzte Fläche. Nämlich die Durchschnittslinien Ap, Bq liegen beide in der durch BQ senkrecht auf QBR gesetzten Ebene; die Bq und Cr beide in der durch CR auf RCS senkrechten Ebene, u. s. f. Die Durchschnittspuncte dieser Linien sind andere als die Puncte A, B, C, D.... Wird nun die Anzahl der Puncte A, B, C, D... und der Linien PA, QB, RC... unendlich, indem sie eine stetige Folge bilden, so fallen die Durchschnittspuncte der Ap, Bq, Cr, Ds... in die gleichstelligen A, B, C, D...

132. Diese krumme Fläche läßt sich durch Abwickelung in eine ebene verwandeln. Denn man nehme zuerst wieder die nicht stetige Folge von Puncten, A, B, C, D... Die Ebene PAp werde durch die Drehung um Ap in die Ebene QBq gebracht, oder der stumpfe Winkel derselben werde in zwey rechte verwandelt. Die Ebene QBq, mit der darauf gelegten PAp, werde auf gleiche Art durch die Drehung um Bq in die Ebene RCr gebracht; diese mit den darauf befindlichen beiden Ebenen in die SDs, u. s. f. So wird die vielkantige Fläche in eine ebene verwandelt. Nimmt man auf AP einen Punct P willkürlich, und BQ = AP + AB; CR = AP + AB + BC; u. s. f. so wird bey der Abwickelung aus der unebenen Fläche, worauf die geraden AP BQ, CR... liegen, eine ebene vielseitige, aus gleichschenklichten Dreyecken zusammengesetzte, ebene Figur gebildet. Nun lasse man die Folge der Puncte A, B, C, D..., eine stetige

Digitized by Google

seyn, so läßt sich diese auf gleiche Art, wie die vielkantige, abwickeln, und die krumme Fläche, worauf die berührenden an der gedoppelt krummen Linie liegen, wird in eine ebene, durch eine krumme Linie begränzte, Figur verwandelt, wenn man nämlich die Lage des auf AP angenommenen Punctes unverrückt läßt.

133. Alle abwickelbare Flächen können durch eine stetige Folge von berührenden an einer gedoppelt krummen Linie, oder die Normalen an einer solchen, gebildet werden. Daher kann durch jeden Punct auf einer solchen Fläche eine gerade gezogen werden, die ganz in sie fällt; und zwey solche, in der stetigen Folge einander nächste gerade, sind in einer Ebene, so daß sie entweder sich parallel sind, oder sich schneiden. Andere krumme Flächen, die auch durch gerade Linien gebildet werden, wie die in (49—59) betrachteten, lassen sich nicht abwickeln.

134. Die krummen Flächen, welche durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden, auf welchen aber je zwey nächste gerade nicht in einer Ebene liegen, heißen im Französischen surfaces gauches, nach Meusnier in Mém. présentés, T. X. p. 509. Im Deutschen möchte man sie windschiefe nennen.

* * *

Die Untersuchung der gedoppelt krummen Linien und der krummen Flächen im Allgemeinen ist von Clairaut begründet worden; denn vor ihm betraf alles hieher gehörige nur besondere Fälle. Recherches sur les Courbes à double courbure, à Paris 1731. 4to. 119 S. ohne Namen des Verfassers. Dieser ist 1713 geboren, war also bey der Abfassung dieses Originalwerks 16 bis 17 Jahr alt. Es kommen darin auch Untersuchungen über krumme Flächen vor, vermittelst ihrer Darstellung durch Gleichungen.

Euler lieferte eine kurze, aber sehr lehrreiche Abhandlung über die krummen Flächen, in dem Anhange zu der Introductio in Analysin Infinitorum. Darin insbesondere über Flächen des zweyten Grades, deren Gattun-

Digitized by Google

gen er vollständig aufzählt. Diese liegt auch bey den neuesten Untersuchungen zum Grunde. Die Abwickelung krummer Flächen untersuchte er theils an den schiefen Kegeln, auch solchen, deren Grundfläche kein Kreis ist. Commentt. novi Acad. Petrop. T. I. a. a. 1747, und Nova Acta, T. III. a. a. 1785, und ganz allgemein in den Comm. novis Petrop. T. XVI. a. a. 1771. Er stellt die abwickelbaren Flächen durch zwey Gleichungen mittelst irgend einer veränderlichen Größe dar. Diese heiße Φ; und P, Q, R, S seyn irgend welche Functionen von Φ, so doch, daß $\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{\partial R}{\partial P}$ sey. Dann ist

$$y = P + Qx; \qquad z = R + Sx,$$

wo x, y, z die Coordinaten an die Fläche sind. Schafft man die Größe Φ heraus, so wird eine Gleichung für die abwickelbare Fläche erhalten.

Monge übergab der französischen Akademie der Wissenschaften im J. 1775 ein Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la Théorie des ombres et pénombres. Mém. présentés, T. IX. Die Abhandlung ist auch wegen der aus geometrischen Betrachtungen hergeleiteten Auflösungen zweyer schweren rein analytischen Aufgaben wichtig. Die allgemeine Aufgabe über Schatten und Halbschatten besteht darin, zwey krumme abwickelbare Flächen zu finden, welche zwey krumme Oberflächen ringsherum berühren, es sey, daß die beiden Körper immer auf derselben Seite oder auf verschiedenen liegen. Auf diese Betrachtung hat auch Eulex eine seiner Auflösungen über die Abwickelbarkeit gegründet. Noch eine Abhandlung von Monge ist schon im J. 1771 der Akademie übergeben, aber erst in den X. Band der Mém. présentés eingerückt. Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à doubles courbure. Erweiterung des Begriffs von Evoluten. Auf zwey nächste be-

Digitized by Google

rührende an einer einfach krummen Linie werden Ebenen senkrecht in den Berührungspuncten gezogen. Auf ihrer Durchschnittslinie liegt nicht allein der eigentliche Mittelpunct der Krümmung, sondern jeder Punct derselben ist auch ein solcher. Einige analytische Entwickelungen über Lagen gerader Linien. Vielerley Aufgaben über gedoppelt krumme Linien, von ihrem Krümmungshalbmesser, und von den verschiedenen Arten der Wendungspuncte an ihnen. Von demselben Verfasser ist noch eine hieher gehörige Abhandlung: Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes. Mém. de l'Acad. des Sciences, 1784.

Solution de quelques problêmes relatifs à la théorie des surfaces courbes, et des courbes à double courbure, par M. Tinseau. Mém. présentés. T. IX.

Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites, par le même, ib.

Mémoire sur la courbure des surfaces, par M. Meusnier. Mém. présentés. T. X.

Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, à l'usage de l'école polytechnique, par Gaspard Monge. Paris, An 9. 3 pl. 34 Nummern von halben Bogen groß Format. Ein sehr tiefsinniges Werk, welches einen großen Begriff von der Lehranstalt erweckt, für welche es bestimmt ist. Die zweyte der vorher genannten Abhandlungen seines Verfassers ist darin fast ganz in den drey letztern Nummern enthalten. Die erstere ist auf andere Art darin verwebt. Sonst noch viele Untersuchungen über die Natur krummer Flächen, zur Einleitung in ein analytisches System über die Lagen gerader Linien. Da dieses Werk vielleicht zum Unterricht zu schwer und umständlich gefunden worden ist, so ist zu diesem Zweck eine kleinere Schrift abgefaßt, welche den Titel hat:

Application de l'Algèbre à la Géométrie. Des Surfaces du premier et second degré, à l'usage de

Digitized by Google

l'école polytechnique, par M. M. Monge et Hachette. Paris. XIII. (1805). 52 pag. 4. 1 pl.

Essai de Géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, par J. B. Biot. Seconde édit. à Paris, 1805. 300 p. 8. 6 pl.

Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes: (Elémens de Géométrie descriptive.) par S. F. Lacroix, seconde édit.) à Paris An X — 1802. 120 pag. 10 pl. Die Projection gerader und krummer Linien wird darin geometrisch gewiesen.

In dem Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral par Lacroix giebt das V. Capitel einen guten und deutlichen Unterricht von krummen Flächen und gedoppelt krummen Linien, nach der Theorie von Monge. Man sehe auch Cousin Traité du Calc. diff. etc. p. 181 — 190. und Principia calc diff. et integr. auct. L'Huilier Cap. XV.

Krümmung ist überhaupt ein gewisses Maaß der Abweichung des Krummen von der geraden Linie oder ebenen Fläche, an dem Puncte, wo eine krumme Linie oder krumme Fläche, jene von einer geraden Linie, diese von einer Ebene berührt wird. Wir haben dreyerley Krümmungen zu betrachten, an einfach krummen Linien, an gedoppelt krummen Linien, und an krummen Flächen.

1. Die Krümmung eines Bogens einer einfach krummen Linie ist dem Winkel, welchen die berührenden an den Endpuncten des Bogens mit einander machen, desto genauer proportional, je kleiner die gleichen Bogen, deren Krümmung verglichen wird, genommen werden. Da der Begriff, Krümmung, eine Beschaffenheit des Ausgedehnten betrifft, selbst keine Größe ist, so muß derselbe durch eine mit dieser Beschaffenheit verbundene Größe dargestellt werden. Es ist nun die hier gegebene Erklärung als die angemessenste zu rechtfertigen.

2. Daß man gleich große Bogen bey der Vergleichung der Krümmung nehmen müsse, erhellt sogleich, da

Digitized by Google

her, weil ein größerer Bogen von der geraden berührenden mehr abweicht als ein kleinerer. Daß es zweytens auf die Lage der an den Endpuncten des Bogens berührenden hier ankommt, ergiebt sich daher, weil der Punct, durch dessen Bewegung man eine krumme Linie beschreiben lassen kann, seine Richtung mehr oder weniger geändert hat, nachdem der Winkel jener berührenden größer oder kleiner ist, daher die krumme Linie an dieser Stelle krümmer oder flacher ist. Allein ein endlicher Winkel der berührenden an einem endlichen Bogen ist die Summe unendlich vieler unendlich kleinen, in stetiger Reihe folgenden Veränderungen der Richtung. Sind nun die Veränderungen der Richtung bey gleichen endlichen Bogen nicht gleich groß, so hängt das Verhältniß der Ablenkungswinkel zugleich von der Größe der Bogen ab, indem für denjenigen Bogen, wo die Krümmung mehr zunimmt, der Ablenkungswinkel bey einer größern Länge der gleichen Bogen auch größer wird, als er bey gleichmäßiger Zunahme in Vergleichung mit dem andern geworden seyn würde, so wie er im entgegengesetzten Falle kleiner wird. Darum ist es nothwendig, die Bogen unendlich klein zu nehmen, das ist, die Länge muß auf die Bestimmung der Krümmung keinen Einfluß haben. Man sucht die Krümmung an einem Puncte der Curve, nicht die Summe unendlich vieler unendlich kleinen Ablenkungen.

3. Da bey unendlich kleinen Bogen auch die Ablenkungswinkel der berührenden unendlich klein sind, so ist es nöthig, endliche Größen zu suchen, die diesen unendlich kleinen Winkeln proportional sind. An dem Kreise ändert der beschreibende Punct seine Richtung durchgehends auf einerley Art. Daher kann man bey Vergleichung der Krümmung verschiedener Kreise endliche Bogen und Winkel gebrauchen. Kann man einen Kreis finden, der mit einem Bogen einer Curve an einem Puncte einerley Krümmung hat, so kann man mittelst der Krümmungen an solchen Kreisen die Krümmung zweyer Bogen an derselben oder an verschiedenen Curven vergleichen.

4. Mit den Halbmessern AC, BC (Fig. 88.) seyn

Digitized by Google

die gleich großen Bogen AD, BE beschrieben. Die berührenden in A und D schneiden sich unter dem Winkel DFf; die berührenden an B und E unter dem Winkel EGg. Diese Winkel sind den Winkeln der Halbmesser, ACD, BCE gleich. Der Halbmesser CD schneide den Bogen BE in H, so ist AD : BH = AC : BC, und BH : BE = W. BCH : W. BCE; (Ähnlichkeit, Th. I. S. 15. und Kreis, 10.). Daher wird das Verhältniß der Bogen AD : BE aus den Verhältnissen der Halbmesser AC : BC und der Winkel BCH : BCE, zusammengesetzt. Da die Bogen sich gleich sind, so verhalten sich die Halbmesser umgekehrt wie die zugehörigen Winkel. Die Krümmungen zweyer Kreise verhalten sich also umgekehrt wie ihre Halbmesser.

5. Die Krümmung einer krummen Linie an irgend einem Puncte verhält sich daher umgekehrt wie der Halbmesser des Kreises, der dieselbe Krümmung mit der krummen Linie an diesem Puncte hat. Wie dieser Kreis gefunden werde, zeigt der folgende Artikel.

6. Man kann die Krümmung einer krummen Linie auch unmittelbar mit der Krümmung einer einfachern vergleichen, welche sich ihr unter allen ihrer Art am meisten nähert. Man sehe, was in dem Artikel, berührende Linie, 38, von den paraboliſchen Linien als osculirenden an einem Bogen einer Curve bemerkt ist. Insbesondere dient für höhere krumme Linien die Vergleichung mit dem, als unendlich klein anzusehenden, Bogen einer höhern Parabel.

7. Es sey AS (Fig. 89.) ein Bogen einer krummen Linie, M ein Punct derselben, an welchem TMt die berührende, und ML die darauf senkrechte ist. Von dem Puncte N seyn die senkrechten NP und Nn auf ML, und Mt gezogen. Beschreibt man durch M und N eine Parabel, deren Axe in ML fällt, so hat sie in N dieselbe Abweichung Nn von der berührenden wie die krumme Linie, und die Krümmungen beider nähern sich einander desto mehr, je kleiner der Bogen MN ist. An der gemei-

Digitized by Google

nen Parabel ist der Quotient $\frac{PN^2}{MP}$ eine endliche Größe, nämlich ihr Parameter. Giebt die Gleichung für die Curve zwischen den Coordinaten MP und PN, wenn diese unendlich klein genommen werden, eine Gleichung von der Form, $at = u^2$, so ist die Krümmung der Curve in dem Puncte M dieselbe mit derjenigen einer Parabel, deren Parameter $= a$ ist, an ihrem Scheitel. Hätte aber die Gränzgleichung die Form, $at^m = u^n$, so ist dieses so viel als in jener Gleichung den Parameter a unendlich groß oder unendlich klein setzen. Die Krümmung der Curve an dem Punete M kann alsdann nur mit der an einer höhern Parabel verglichen werden.

8. Die Vergleichung mit der Krümmung einer Parabel führt zugleich auf die Vergleichung mit einem Kreise. Denn wenn PM als Ordinate an einem Kreise betrachtet wird, so ist der Quotient $\frac{PN^2}{MP}$ desto näher der Durchmesser des Kreises, je kleiner der Bogen ist. Also ist der Durchmesser des Kreises von gleicher Krümmung mit der Curve gleich dem Parameter der gemeinen Parabel, welche die gleiche Krümmung am Scheitel hat. S. Krümmungskreis, 12.

9. D'Alembert wirft in dem Dictionnaire encycl. Partie des Mathem. Art. Courbure die Frage auf, ob man nicht auch sagen könne, daß ähnliche Bogen ungleicher Kreise gleiche Krümmung haben. Das Anfangs gesagte wird das Gegentheil darthun.

Krümmungs-Halbmesser (radius osculi) ist der Halbmesser des Krümmungskreises, s. den folgenden Artikel.

Krümmungskreis (circulus curvaturae, osculator) ist ein Kreis, welcher gleiche Krümmung mit einer krummen Linie an einem gegebenen Puncte derselben hat. Wenn an die krumme Linie in diesem Punete eine

Digitized by Google

berührende gezogen, und auf diese in eben dem Puncte eine senkrechte errichtet wird, so berührt jeder Kreis, der aus einem Puncte dieser Normale, als Mittelpunct, durch den Berührungspunct gezogen wird, die krumme Linie. Ein Theil dieser Kreise geht zwischen der Curve und der berührenden durch, ein Theil aber liegt diesseits der Curve nach dem Mittelpuncte hin. Derjenige Kreis, welcher den Übergang von jenen Kreisen zu diesen macht, ist derjenige, welcher sich am wenigsten von der Curve entfernt, dessen Krümmung also mit der Krümmung der Curve übereinkommt. Die erstern, jenseits der krummen Linie, sind flächer, die andern diesseits sind krümmer.

1. An der krummen Linie AMS (Fig. 90.) sey der Winkel der Normale MR mit der Abscissenlinie AX, nämlich AGM $= \omega$, der Bogen AM $= s$, der Halbmesser des Krümmungskreises $= r$; es ist $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$.

Man nehme zwey Puncte der krummen Linie, M, N, in einer endlichen Entfernung von einander, ziehe die berührende TMt, VNv, die sich in m schneiden; setze auf diese die Normalen MR, NR, welche sich in R begegnen, und die Abscissenlinie in G, H schneiden. Aus R als Mittelpunct beschreibe man durch M einen Kreisbogen (hier nicht gezeichnet), welcher entweder diesseits oder jenseits von N die Normale NR trifft. Der Winkel der berührenden an M und N, nämlich TMV ist gleich dem Winkel MRN, da der Nebenwinkel jenes, nämlich MmN mit MRN zwey rechte ausmacht. Der Winkel der berührenden an dem Kreisbogen in M und N ist ebenfalls $=$ MRN. Die Ablenkung der Richtungen an dem einen Endpuncte dieser Bogen von der Richtung an dem andern ist also an der krummen Linie und dem Kreise dieselbe. Da aber diese Ablenkung zugleich auf die Länge von MN ankommt, so ist MR nicht der Halbmesser des Krümmungskreises, welcher von der Länge des Bogens unabhängig seyn muß, um die Krümmung in M bloß durch die zu diesem Puncte gehörigen Größen anzugeben.

Digitized by Google

(Krümmung, 2.). Man setze AGM $= \omega$, AHN $= \omega + \Delta\omega$, wo ω und $\Delta\omega$ Kreisbogen bedeuten, die mit der Einheit als Halbmesser beschrieben sind, als Stellvertreter der Winkel. Das Zeichen Δ bedeutet eine endliche Differenz. Es ist MRN $= \Delta\omega$. Der Bogen MN sey $= \Delta s$, der Kreisbogen durch M zwischen den Normalen sey $= u$, ist $MR = \frac{u}{\Delta\omega}$. Es ist nämlich $\Delta\omega : u = 1 : MR$.

Wenn N näher an M rückt, so verrückt sich der Durchschnittspunct der Normale NR mit MR, und MR nähert sich einer gewissen Gränze, welche nicht von der Größe des Bogens abhängt. Für diese Gränze wird MR $=$ NR, da bey derselben N in M fällt, und der Bogen MN der krummen Linie wird dem Kreisbogen zwischen M und N gleich. Die Gränze von MR sey $= r$, so ist $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$. Denn da $\frac{\partial s}{\partial \omega}$ die Gränze von $\frac{\Delta s}{\Delta \omega}$, und die von $\frac{u}{\Delta s} = 1$ ist, so ist die Gränze von $\frac{u}{\Delta \omega}$, das ist, von $\frac{u}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta \omega}$ der Quotient $\frac{\partial s}{\partial \omega}$. Dieser Werth von r ist nun der Halbmesser des Krümmungskreises. Ein Kreis aus irgend einem andern Puncte der Normale MR als dem Mittelpuncte dieses Kreises beschrieben, schneidet die Normale NR unter einem schiefen Winkel, und geht daher über oder unter N weg, entfernt sich also mehr der von krummen Linie, als der mit dem Halbmesser r beschriebene.

2. Es sey für die krumme Linie AMS (Fig. 90.) die Abscisse AP $= x$, die senkrechte Ordinate PM $= y$, der Bogen AM $= s$, der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, der Halbmesser des Krümmungskreises $= r$; es ist $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$.

Digitized by Google

Es ist PG die Subnormale für den Punct M, also $PG = \frac{y\partial y}{\partial x}$ (berührende Linie, 42.). Da tang $\omega = \frac{MP}{PG}$ ist, so ist tang $\omega = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$. Nun ist $\partial\omega = \frac{\partial \text{tang}\,\omega}{1+\text{tang}\,\omega^2}$ (Differenz. Formeln, 38.), und $\partial \text{tang}\,\omega = -\frac{\partial p}{pp}$, also ist $\partial\omega = -\frac{\partial p}{1+pp}$. Fernet ist $\frac{\partial s^2}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 1 + pp$. Daher $\frac{\partial s}{\partial \omega} = -(1+pp)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$. Da $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ ist, so ist $r = -(1+pp)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$.

3. Wenn der Winkel ω und mit demselben tang ω zunimmt, von M nach S hin genommen, so nimmt p ab, und ∂p ist in Beziehung auf ∂x negativ. Daher ist r positiv. In diesem Falle ist die krumme Linie gegen die Abscissenlinie concav, und der Halbmesser der Krümmung hat die Lage wie in der Fig. 90. Ist die krumme Linie gegen die Axe der Abscissen conver, so nimmt ω ab, wenn x wächst, und ∂p ist positiv in Beziehung auf ∂x, (s. Concav u. Conver). Der Halbmesser der Krümmung ist negativ, das heißt, er fällt jenseits der Curve in Beziehung auf die Abscissenlinie.

4. Die gefundene Bestimmung des Krümmungskreises beruht darauf, daß ein Kreis durch die Lage zweyer Normalen und den Endpunct auf einer derselben gegeben wird. Denn ein Kreis wird durch zwey berührende gerade und einen Punct seines Umfanges bestimmt. (Kreis, 85.). Ein Kreis wird aber auch durch drey Puncte seines Umfanges gegeben. Nimmt man nun drey Puncte einer Curve in endlichen Abständen von einander, so entfernt sich der Kreis durch diese Puncte desto weniger von

Digitized by Google

der Curve, je näher sich dieselben kommen, also am wenigsten, wenn sie sich unendlich nahe sind. Nun werden durch drey Puncte die Verhältnisse der ersten Unterschiede der Coordinaten und des zweyten gegeben. Sucht man daher die Werthe derselben unabhängig von der Größe der Unterschiede selbst, so muß sich daraus der Werth des Halbmessers ohne Rücksicht auf die Lage des Mittelpunctes gegen die Axen der Coordinaten herleiten lassen. Werden die ersten und zweyten Differentialverhältnisse an dem Kreise und der Curve einander gleich gesetzt, so haben beide an dem zugehörigen Puncte einerley Krümmung.

5. Es sey (Fig. 91.) C der Mittelpunct eines Kreises, dessen Halbmesser $CM = r$ ist. Die Abscissenlinie sey AX, und $AP = x$; die senkrechte Ordinate $PM = y$. Von C sey BC senkrecht auf AX, und CR auf PM. Man setze $AB = a$, $BC = b$, so ist

$$(a - x)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Die Differentiation giebt hieraus

$$(a - x)\partial x = (y - b)\partial y.$$

Quadrirt man beide Theile, so ist

$$(a - x)^2 \partial x^2 = (y - b)^2 \partial y^2.$$

Da $r^2 \partial x^2 = (a - x)^2 \partial x^2 + (y - b)^2 \partial x^2$,

$r^2 \partial y^2 = (a - x)^2 \partial y^2 + (y - b)^2 \partial y^2$,

so ist

$$r^2 \partial x^2 = (y - b)^2 (\partial x^2 + \partial y^2),$$
$$r^2 \partial y^2 = (a - x)^2 (\partial x^2 + \partial y^2).$$

Man differentire die Differentialgleichung noch einmahl, so wird

$$(a - x)\partial^2 x - \partial x^2 = (y - b)\partial^2 y + \partial y^2,$$

oder

$$(a - x)\partial^2 x - (y - b)\partial^2 y = \partial x^2 + \partial y^2.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, und setze für $a - x$ und $y - b$ ihre Werthe aus jenen Gleichungen, so ist

Digitized by Google

$$r(\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y) = (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, wenn diese Gleichung durch dx^3 dividirt wird,

$$r\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man in diese Gleichung für die Differentialquotienten die Werthe derselben aus der Gleichung für eine Curve LMN, welche mit dem Kreise den Punct M gemein hat, so kommen diese und der Kreis einander so nahe als es nur möglich ist, das ist, der Kreis mit dem Halbmesser r ist der Krümmungskreis.

6. Die in (5.) gefundene Formel für r kommt mit der in (4.) überein. Denn da $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ ist, so ist

$$\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial x^2} = \partial p; \text{ also } -r.\frac{\partial p}{\partial x} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder $r = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.\frac{\partial x}{\partial p}$.

7. Man setze $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, so ist ∂s das Differential des Bogens s von der Anfangsordinate an genommen. Die Differentialgleichung vom zweyten Grade ist daraus

$$\partial s\,\partial^2 s = \partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y.$$

Durch die Substitutionen aus diesen beiden Gleichungen erhält man folgende Formeln für den Halbmesser der Krümmung,

$$r = \frac{\partial s^3}{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y};$$

$$r = \frac{\partial y\,\partial s^2}{\partial s\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 s};$$

$$r = \frac{\partial x\,\partial s^2}{\partial y\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 y}.$$

8. Nimmt man ∂x unveränderlich, so daß x sich gleichförmig verändert, so ist $\partial^2 x = 0$, und

Digitized by Google

$$r = -\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial^2 y} = -\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial^2 s}.$$

9. Nimmt man ∂y unveränderlich, so ist

$$r = \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial^2 s}.$$

10. Setzt man ∂s unveränderlich, so ist

$$r = \frac{\partial y\partial s}{\partial^2 x} = -\frac{\partial x\partial s}{\partial^2 y}.$$

11. Wenn $r = 0$ ist, so ist die Krümmung größer als an jedem endlichen Kreise; ist $r =$ unendlich groß, so ist die Krümmung kleiner als an jedem endlichen Kreise. Das erste kommt an der Cykloide in ihrem Anfangspuncte vor, Cykloide, XII. Das zweyte an dem Wendungspuncte, wo ein solcher vorhanden ist.

12. An der Parabel den Halbmesser der Krümmung anzugeben.

Es sey AM (Fig. 90.) ein Bogen der Parabel AMS; AX die Axe; die Abscisse $AP = x$; die senkrechte Ordinate $PM = y$. Ihre Gleichung, $ax = yy$, giebt $a\partial x = 2y\partial y$, also $p = \frac{a}{2y}$, und $1 + pp = \frac{aa + 4yy}{4yy} = \frac{a + 4x}{4x}$. Ferner $\partial p = -\frac{a\partial y}{2yy} = -\frac{aa\partial x}{4y^3} = -\left(\frac{a}{y}\right)^3\cdot\frac{\partial x}{4a} = -\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial x}{4a} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial x}{4a}$. Die Formel für den Halbmesser des Krümmungskreises ist $r = -(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}$, also ist

$$r = (a + 4x)\sqrt{\frac{a + 4x}{a}}.$$

Digitized by Google

Am Scheitel ist der Halbmesser des Krümmungskreises $= \frac{1}{2}a$, dem halben Parameter. Dieses ist zur Zeichnung dieser Linie nützlich, da am Scheitel die Krümmung am stärksten und veränderlichsten ist.

13. Den Krümmungs-Halbmesser an einer Ellipse zu bestimmen.

Es sey ADB (Fig. 92.) eine halbe Ellipse, deren halbe große Axe $AC = BC = a$; halbe kleine $CD = b$, Abscisse $CP = x$; Ordinate $PM = y$. Die Gleichung ist (Ellipse, 4.),

$$a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2.$$

Daraus ist die Differentialgleichung,

$$-b^2x\partial x = a^2y\partial y,$$

also $p = -\frac{b^2x}{a^2y}$, und $1 + p^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}$ $= \frac{b^2(a^2 - e^2x^2 + b^2x^2)}{a^4y^2}$. Ferner ist $\partial p = -\frac{b^2(y\partial x - x\partial y)}{a^2y^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)\partial x}{a^4y^3} = -\frac{b^4\partial x}{a^2y^3}$. Dadurch ist der Halbmesser des Krümmungskreises,

$$r = \frac{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

14. Setzt man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, so ist

$$r = \frac{(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

15. Am Scheitel der Ellipse ist $x = a$, also $r = \frac{bb}{a}$ = dem halben Parameter, wie an der Parabel. Dasselbe gilt auch für die Hyperbel. An dem End-

Digitized by Google

puncte der kleinen Axe D ist $x = o$, also $r = \frac{aa}{b} =$ dem zu der kleinen Axe gehörigen Parameter. Die Halbmesser der Krümmungskreise an den Endpuncten der großen und kleinen Axe verhalten sich wie $b^5 : a^5$, die Krümmungen wie $a^5 : b^5$.

16. In der Geographie wird die Lage eines Ortes auf einem elliptischen Meridian nicht durch Abscisse und Ordinate, sondern durch die Breite, das ist, den Winkel der Normale mit der großen Axe (dem Durchmesser des Äquators) angegeben. Deßhalb muß der Krümmungs-Halbmesser auch durch eine Function dieses Winkels ausgedruckt werden. Die Normale (Fig. 92.) sey MN, welche die große Axe unter dem Winkel $ANM = \omega$ schneide. Der Halbmesser des Krümmungskreises sey $MR = r$. Es ist $\text{tang}\,\omega = \frac{\delta x}{\delta y}$ (2.), das ist, $\text{tang}\,\omega = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$, und $\text{tang}\,\omega^2 = \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 - a^2 x^2}{b^2 x^2}$; daher

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \text{tang}\,\omega^2} = \frac{a^4 \cos\omega^2}{a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2}.$$

Dadurch ist $a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2 = \frac{a^4 b^2}{a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2}$.

Folglich verwandelt sich der in (13.) gefundene Werth des Krümmungs-Halbmessers in diesen:

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil $2\sin\omega^2 = 1 - \cos 2\omega$ ist, und $2\cos\omega^2 = 1 + \cos^2\omega$ (Goniometrie, 36.), so ist

$$r = \frac{a^2 b^2}{(\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Digitized by Google

17. Man setze $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=n$, und $\frac{a^2b^2}{(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2)^{\frac{3}{2}}}=f$, welches f der Krümmungs-Halbmesser in der Breite von 45° ist, so ist

$$r=\frac{f}{(1+n\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

18. Die Veränderung von r mit der von ω zu vergleichen, differentiire man diesen Ausdruck. Es ist $\partial r=\frac{3nf\sin 2\omega\,|}{(1+n\cos 2\omega)^{\frac{5}{2}}}\partial\omega$. Die Zunahme des Krümmungs-Halbmessers ist am größten, wenn $\omega=45°$ ist, weil für diesen Winkel der Zähler des Differential-Factors am größten, und der Nenner am kleinsten ist. Hier ist sie auch am gleichförmigsten, da $\sin 2\omega$ sich wenig ändert, wenn ω sich auch schon merklich von 45° entfernt. Daher kommt der Halbmesser der Krümmung in der Breite von 45° dem mittlern sehr nahe.

19. Verwandelt man den Werth von r in eine Reihe, so ist (binomischer Lehrsatz, 8, 12.)

$$r=f\left(1-\frac{3}{2}n\cos 2\omega+\frac{15}{8}n^2\cos 2\omega^2\right.$$
$$\left.-\frac{105}{48}n^3\cos 2\omega^3+\text{etc.}\right).$$

20. In dem zuerst (16.) gefundenen Werthe von $r=\frac{a^2b^2}{(a^2\cos\omega^2+b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$, setze man für $\cos\omega^2$ seinen Werth, $1-\sin\omega^2$, so ist

$$r=\frac{a^2b^2}{(a^4-(a^2-b^2)\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Es sey $\frac{a^2b^2}{a^4}=e^2$, so ist

$$r=\frac{bb}{a}\cdot\frac{1}{(1-e^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck in eine Reihe entwickelt giebt

$$r = \frac{bb}{a}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin\omega^2 + \frac{15}{8}e^4\sin\omega^4 \pm \frac{105}{48}e^6\sin\omega^6 \pm \text{etc.}\right)$$

Beide Formeln, diese und die vorhergehende, lassen sich in Cosinus der geraden Vielfachen von ω auflösen. Gonometrie, 137 u. 141.

21. Man sieht aus denselben, welche Gestalt eine Reihe haben müsse, die einer irregulären Curve, welche, wie die Meridiane der Erde, von einer Ellipse wenig abweicht, angemessen seyn soll. Sie ist

$$r = A + B\sin\omega^2 + C\sin\omega^4 + \text{etc.}$$

oder

$$r = A - B\cos 2\omega + C\cos 3\omega - \text{etc.}$$

wo so viele Werthe von r gegeben werden müssen, als Coefficienten bestimmt werden sollen. Ein Beyspiel von den Gradmessungen sehe man in dem astronom. Jahrbuche für 1788.

22. Wenn a und b wenig von einander verschieden sind, so ist $r = f(1 - \frac{3}{2}n\cos 2\omega)$ nahe, oder $r = f(1 - \frac{1}{2}n + 3n\sin\omega^2)$ nahe. Der Halbmesser des Krümmungskreises im Scheitel der großen Axe ist $= f(1 - \frac{3}{2}n)$ nahe. Der Unterschied dieses und desjenigen für den Winkel ω ist $3nf\sin\omega^2$ nahe, oder dem Quadrat des $\sin\omega$ proportional.

Setzt man $b = a - \delta$, so ist $bb = a^2 - 2a\delta$ nahe, und $e^2 = \frac{2\delta}{a}$ nahe, wenn δ gegen a klein ist. Dadurch wird die Formel in (20.)

$$r = a - 2\delta + 3\delta\sin\omega^2 + \text{etc.}$$

wo die Potenzen von δ weggelassen sind.

23. Aus dem Verhältnisse zweyer Krümmungs-Halbmesser und aus den zugehörigen Winkeln mit der großen Axe das Verhältniß der beiden Axen herzuleiten.

Digitized by Google

Die Halbmesser der Krümmung seyn r und ρ; die zugehörigen Winkel α und β; das Verhältniß a : b = 1 : m, oder b = ma. Für b setze man in dem erstern Werthe von r (16.) diesen Werth, so wird allgemein

$$r = \frac{m^2 a}{(\cos\omega^2 + m^2 \sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den gegebenen Winkel α bleibe die Bezeichnung des Krümmungs-Halbmessers durch r, so ist

$$r = \frac{m^2 a}{(\cos\alpha^2 + m^2 \sin\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\rho = \frac{m^2 a}{(\cos\beta^2 + m^2 \sin\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man setze $\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = q$, so ist

$$q = \frac{\cos\beta^2 + m^2 \sin\beta^2}{\cos\alpha^2 + m^2 \sin\alpha^2}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$m^2 = \frac{q\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{\sin\beta^2 - q\sin\alpha^2}.$$

Ist m gefunden, so wird durch einen der Krümmungs-Halbmesser a bekannt, und daraus b.

23*. Die Anwendung von diesen Formeln ist in der Geographie bey der Bestimmung der Gestalt der Erde. Die Halbmesser der Krümmung können zwar nicht unmittelbar gemessen, aber doch mit einander, vermittelst der Bogen von einerley Weite verglichen werden. Es ist $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ (1.). Diese Gleichung gilt auch noch nahe für kleine endliche Bogen, und endliche Veränderungen der Breite. Oder es ist $r = \frac{\Delta s}{\Delta \omega}$ nahe. Nimmt man für zwey verschiedene Bogen $\Delta\omega$ gleich groß, so verhalten sich

Digitized by Google

die zugehörigen Krümmungs-Halbmesser wie die Länge der Bogen. Bey der Anwendung der Formel in (23.) nimmt man die zu einem Bogen gehörige Breite auf der Mitte desselben.

24. Eine abgekürzte Formel ist

$$\frac{a-b}{a} = \frac{r-\rho}{3(r\sin\alpha^2 - \rho\sin\beta^2)}.$$

Denn aus den beiden Formeln in (23.) folgt, wenn für $\cos\alpha^2$ der Werth, $1-\sin\alpha^2$, gesetzt wird,

$$r(1-(1-mm)\sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \rho(1-(1-mm)\sin\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

Entwickelt nach dem binomischen Lehrsatze, mit Weglassung der Potenzen von $\sin\alpha^2$ und $\sin\beta^2$, wird daraus

$$r(1-\tfrac{1}{2}(1-mm)\sin\alpha^2) = \rho(1-\tfrac{1}{2}(1-mm)\sin\beta^2).$$

Da $1-mm = 1-\frac{bb}{aa} = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{(a+b)(a-b)}{aa}$, und $\frac{a+b}{a}$ nahe $= 2$ ist, so ist $\frac{1}{2}(1-mm) = \frac{a-b}{a}$ nahe. Mittelst dieser Substitution ergiebt sich die aufgestellte Formel. Sie ist von Maupertuis in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1737 pag. 465. vorgetragen, in der Abhandlung über die Gradmessung am Polarkreise, in dem besondern Abdrucke, p. 147.

25. Es ist $x = a\cos\omega\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}$.

Denn aus dem Beweise (16.) ist

$$y^2 = \frac{a^4\cos\omega^2}{a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2}; \text{ und}$$

$$r = \frac{a^2b^2}{(a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Jener Gleichung gebe man die Form

$$x^3 = \frac{a^6\cos\omega^3}{(a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und verbinde sie mit der zweyten, so wird

Digitized by Google

$$x^3 = \frac{a^4 r \cos\omega^3}{bb},$$

$$\text{das ist } x = a\cos\omega \sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}.$$

26. Aus (20.) ist $\frac{ar}{bb} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin\omega^2 + \text{etc.}$ Setzt man $b = a - \delta$, so ist $e^2 = \frac{2\delta}{a}$ nahe, wenn δ gegen a klein ist. Daher ist $\frac{ar}{bb} = 1 + \frac{3\delta}{a}\sin\omega^2$ nahe, und $x = a\cos\omega\left(1 + \frac{\delta}{a}\sin\omega^2\right)$ nahe.

27. Auf gleiche Art ist $y = b\sin\omega \sqrt[3]{\frac{br}{aa}}$. Denn vermittelst der Gleichung für die Ellipse, $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$, ist $y^2 = \frac{b^4\sin\omega^2}{a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2}$, worauf die übrige Rechnung jener ganz ähnlich ist.

28. Es seyn A und B die Halbmesser der Krümmung an den Scheiteln der großen und kleinen Axe, so ist $A = \frac{bb}{a}$, und $B = \frac{aa}{b}$ (15.), also ist

$$x = a\cos\omega \sqrt[3]{\frac{r}{A}}, \qquad y = b\sin\omega \sqrt[3]{\frac{r}{B}}.$$

29. Der Halbmesser der Krümmung verlängert schneide die kleine Axe in Q (Fig. 92.); es ist $MQ = a\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}$.

Denn man ziehe ML parallel mit AC, so ist $ML = PC = x$, und $MQ = \frac{ML}{\cos\omega}$; das ist, $MQ = a\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}} = a\sqrt[3]{\frac{r}{A}}$.

Digitized by Google

30. Sie schneide die große Axe in N; es ist $CN = \frac{a^a - b^a}{a} \cos\omega \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$.

Denn es ist $PN = y\cot\omega = b\cos\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$, und $CP = a\cos\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$; also $CP : PN = a\sqrt[3]{\frac{r}{A}} : b\sqrt[3]{\frac{r}{B}}$.

Da $A : B = b^3 : a^3$, so ist $CP : PN = aa : bb$.

Daraus ist $CP : CN = aa : aa - bb$, und $CN = \frac{aa - bb}{aa} . CP$. Für CP oder x der Werth gesetzt, wird der angegebene Werth für CN erhalten. Vergl. Ellipse, 33.

31. Hieraus ist $CQ = \frac{a^a - b^a}{b} \sin\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$.

Denn es ist $CQ = CN \text{ tang. } \omega = \frac{a^a - b^a}{a} \sin\omega \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$.

Man multiplicire vor dem Wurzelzeichen mit $\frac{a}{b}$, und unter dem Wurzelzeichen mit $\frac{b^3}{a^3}$, so ist $CQ = \frac{a^a - b^a}{b} \times \sin\omega \sqrt[3]{\frac{b^3 r}{a^3 A}} = \frac{a^a - b^a}{b} \sin\omega \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$.

32. Man ziehe von dem Puncte M nach dem Mittelpuncte C die gerade MC, so ist $\text{tang } MCA = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \text{ tang}\omega . \sqrt[3]{\frac{A}{B}}$, oder $\text{tang } MCA = \frac{bb}{aa} \text{ tang}\omega$.

33. In der mathematischen Geographie und in der Astronomie wird von diesen Sätzen Gebrauch gemacht. Es ist MQ die Richtung der Schwere, MC der Halbmesser für den Ort M, und ML der Halbmesser seines

Digitized by Google

Parallelkreises. Bey den Gradmessungen auf einem solchen Kreise wird die Formel 25, und ihre Abkürzung, 26, gebraucht. Es ist nämlich die Abscisse x gleich dem Halbmesser des Parallelkreises für den Ort M.

34. Die Differentialgleichung für eine krumme Linie sey $P\partial x = Q\partial y$, so ist $p = \frac{P}{Q}$, und $1 + p^2 = \frac{P^2 + Q^2}{Q^2}$. Auch ist $\partial p = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{Q^2}$. Solchergestalt ist

$$r = -\frac{(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{Q} \cdot \frac{\partial x}{Q\partial P - P\partial Q}.$$

Man sieht aus dieser Formel, daß die Berechnung des Krümmungs-Halbmessers oft sehr weitläufig werden muß.

Die Beschaffenheit der Krümmung an irgend einem Puncte einer krummen Linie zu beurtheilen, ist ein bequemes Mittel, die Normale zur Abscissenlinie zu nehmen, und den Anfang der Abscissen in die Curve selbst zu legen, wie jetzt gezeigt werden wird.

35. Es ist AMV (Fig. 93.) eine krumme Linie, deren rechtwinklichte Coordinaten sind AP und PM. Der Anfang der Abscissen mag, wie es sich versteht, auch in jedem andern Puncte genommen seyn. In irgend einem Puncte N sey die Normale NO, welche zur neuen Abscissenlinie dienen soll, so wie die darauf senkrechte MS als Ordinate. Aus der Gleichung für die krumme Linie wird die Subnormale QO, oder ihr Verhältniß zu QN, also auch das von NO zu NQ durch die Coordinaten AQ, QN, und die unveränderlichen Größen gegeben. Durch den Grundpunct S der Ordinate MS ziehe man RT parallel mit AP, so werden, mittelst der gegebenen Verhältnisse in dem Dreyeck NQO, durch NS und MS in den mit NQO ähnlichen Dreyecken NRS, STM die RS, RN, ST, TM ausgedruckt. Nun ist AP = AQ + RS + ST, und MP = NQ + MT — NR. Solchergestalt

Statt kann man die Gleichung zwischen x und y in eine zwischen den Coordinaten t, u verwandeln.

36. Es sey $AP = x$; $PM = y$; $AQ = x'$; $QN = y'$; $QO = py'$; $NO = qy'$, wobey $q^2 = 1 + p^2$ ist. Ferner sey $NS = t$; $MS = u$, so ist

$$RS = \frac{p}{q}t; \quad NR = \frac{1}{q}t;$$

$$ST = \frac{1}{q}u; \quad MT = \frac{p}{q}u.$$

Daraus ist nun

$$x = x' + \frac{pt + u}{q};$$

$$y = y' + \frac{pu - t}{q}.$$

Setzt man diese Werthe von x und y in die Gleichung zwischen denselben, so wird eine Gleichung zwischen t und u erhalten, von der Form,

$$0 = At + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \text{etc.}$$

Erstlich kann kein unveränderliches Glied Statt haben, weil t und u zugleich $= 0$ sind. Auch ein Glied Bu kann nicht vorhanden seyn. Denn die Tangente des Winkels einer berührenden mit der Abscissenlinie NO ist $= \frac{\partial u}{\partial t}$ (berührende Linie, 14.). Nun ist, wenn ein Glied Bu vorhanden ist, die Differentialgleichung,

$$0 = A\partial t + B\partial u + 2Ct\partial t + Du\partial t + Dt\partial u + \text{etc.}$$

Also ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{A}{B} - \frac{2C}{B}t - \frac{D}{B}u - \frac{D}{B}\cdot\frac{t\partial u}{\partial t} - \text{etc.}$$

Für $t = 0$ ist die berührende in N senkrecht auf NO als

Digitized by Google

die Normallinie, also $\frac{\partial u}{\partial t}$ unendlich groß, da doch diese Gleichung einen endlichen Werth gäbe.

37. Für unendlich kleine Coordinaten t und u wird die Gleichung diese, $o = At + Eu^2$, wo A und E entgegengesetzte Beschaffenheit haben müssen. Die Glieder Ct^2 und Dtu verschwinden gegen At. Die osculirende Curve in N ist eine Parabel, deren Parameter ist $-\frac{A}{E}$, oder ein Kreis, der diesen Durchmesser hat.

38. Wird durch eine Annahme von x' und y' der Coefficient $E = o$, und A bleibt endlich, so erhält die Gränzgleichung die Form, $o = At + Mu^3$, da alle Glieder, die Producte von t und u enthalten, gegen At verschwinden, so wie alle höhere Potenzen von u gegen u^3. Die Curve hat in dem Puncte, wo sich dieses ereignet, einen Wendungspunct, so daß sie nach A hin bey N eine der nach V hin ganz entgegengesetzte Lage hat, bey welcher t und u negativ werden, in Beziehung auf positive NS und MS. Der Halbmesser der Krümmung wird hier unendlich groß. Er ist nämlich $\frac{MS^2}{2NS}$, das ist . . .

$$= -\frac{uu}{2Mu^3 : A} = -\frac{A}{2Mu}.$$

39. Wäre auch der Coefficient von u^3 Null, so wird die Gränzgleichung, $o = At + Nu^4$. Die Curve liegt nun in N bloß auf der einen Seite der berührenden, und auf beiden Seiten von NO. Der Halbmesser der Krümmung ist wieder unendlich groß. Es sind in N zwey Bögen, die sich daselbst berühren, weil die Gleichung zwey quadratische Factoren hat.

40. Ist $A = o$ geworden, so kann der zweyte Theil, nämlich $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ nicht die Gränzgleichung geben, da ein verschwindendes t gegen u unendlich klein ist, wegen des rechten Winkels der berührenden in N mit der Abscissenlinie NO. Es ist also entweder $Ct^2 = Mu^3$,

Digitized by Google

oder, wenn $C = o$ wäre, $Dtu = Mu^s$, das ist $Dt = Mu^s$.

41. Überhaupt erhält die Gränzgleichung die Form $Mt^m = Nu^n$, wo dreyerley Fälle möglich sind, erstlich, wenn m ungerade und n gerade ist; zweytens, wenn beide Exponenten ungerade sind; drittens, wenn m gerade und n ungerade ist. Der Fall, da beide Exponenten gerade wären, fällt weg, weil derselbe mittelst der Division durch 2, oder durch eine Potenz von 2, auf einen der drey Fälle zu bringen ist. In allen drey Fällen ist n größer als m, da t gegen u in der Gränzgleichung verschwindet, also t^m mit u^m nicht verglichen werden kann, noch weniger mit einer Potenz, u^n, deren Exponent n kleiner als m ist.

42. In dem ersten Falle, der Punct N mag einfach oder vielfach seyn, liegen beide Bogen der Curve NM, Nm auf derselben Seite der in N berührenden geraden Linie. — In dem zweyten Falle werden Ordinate und Abscisse zugleich negativ, und der Bogen Nm liegt auf der andern Seite der berührenden, so daß N ein Wendungspunct ist. — In dem dritten Falle sind für entgegengesetzte t die Ordinaten gleichnamig; daher liegen die Bogen NM und Nm auf verschiedenen Seiten der berührenden, aber auf derselben Seite der Abscissenlinie, so daß eine Spitze in N vorhanden ist.

43. Außer dem Falle, da $Mt = Nu^s$ ist, ist der Halbmesser der Krümmung entweder unendlich groß, oder unendlich klein, welches beides sowohl bey einem Wendungspuncte als bey einer Spitze eintreten kann. Da der Halbmesser der Krümmung ist $\frac{MS^s}{2NS}$, so ist er für die osculirende Curve $= \frac{uu}{2u^{n:m}}\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{s}{m}} = \frac{1}{2}u^{\frac{2m-n}{m}} \times \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{s}{m}}$. Ist $2m > n$, so ist der Krümmungshalbmesser unendlich klein; ist $2m < n$, so ist derselbe unendlich groß.

Digitized by Google

44. Daß alle Gleichungen für Coordinaten t und u, wie sie bisher angenommen sind, zur Gränzgleichung die zweytheilige $Mt^m = Nu^n$ haben, wo $n > m$ ist, läßt sich folgendergestalt kurz darthun. Alle höhern Potenzen von t und u verschwinden in der Gränzgleichung gegen die niedrigste. Diese niedrigsten seyn t^m und u^n. Jedes Product, $t^\mu u^\nu$, worin μ größer als m, wenn gleich ν kleiner als n ist, verschwindet gegen t^m, da t^μ für sich schon gegen t^m verschwindet. Setzt man μ kleiner als m, und ν kleiner als n, und nimmt nun an, daß $t^m = \alpha t^\mu u^\nu$ sey, so ist $t^{m-\mu} = \alpha u^\nu$, und die Gränzgleichung enthält zwey Glieder. Solchergestalt dienen die paraboliſchen Linien allgemeiner als der Kreis die Krümmung an jedem Puncte jeder krummen Linie darzuſtellen. Die Gleichungen für transſcendente Curven werden durch Entwicklung in Reihen auf die obige algebraiſche Form gebracht.

Man vergleiche in **Euleri Introd. in Anal. Infin. P. II. Cap. XIV. de curvatura linearum curvarum**, wo die verſchiedenen Fälle noch mehr aus einander geſetzt werden. Das hier vorgetragene dient ſehr zur Abkürzung. Hieher gehört auch das zwölfte Capitel in **Cramers Analyse des courbes algébriques.**

Halbmeſſer der Krümmung, wenn die Ordinaten aus einem Puncte gezogen ſind.

45. Es iſt MN (Fig. 94.) ein Bogen einer krummen Linie AMO, an welche aus einem unveränderlichen Puncte C die Ordinaten CM, CN gezogen ſind. Ferner iſt AC eine der Lage nach gegebene gerade Linie durch C, von welcher an die Winkel $ACM = \varphi$; $ACN = \varphi + \Delta\varphi$ gerechnet werden. Die berührenden in M und N ſeyn DMd und ENe, welche ſich in F ſchneiden. Die Normalen in M und N ſind MR, NR, ihr Durchſchnittspunct iſt R. Für den Fall eines nach C hin concaven Bogens liegen die Puncte R und C beide auf derſelben Seite deſſelben, und es iſt, wenn MR und CN ſich in Q ſchneiden,

Digitized by Google

$MRN = MQN - QNR$, so wie

$MCN = MQN - CMR$, daher

$MRN = MCN - (CNR - CMR)$ ist.

Es sey der Winkel des Radius CM mit der Normale MR, nämlich $CMR = \omega$, so ist $CNR + CMR = \Delta\omega$, indem bey der Angabe einer Differenz immer das vorhergehende Glied einer Folge von Größen von dem nachfolgenden abgezogen wird. So ist $MRN = \Delta\varphi - \Delta\omega$. Aus dem Puncte R werde mit RM als Halbmesser ein Kreisbogen Mn beschrieben bis an RN, und es sey $Mn = z$, so ist $MR = \frac{z}{\Delta\varphi - \Delta\omega}$. Es sind nämlich $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ und z Kreisbogen, die mit der Einheit als Halbmesser beschrieben sind.

46. Der Winkel MRN ist gleich dem spitzen Winkel DFE der beiden berührenden, und mißt die Krümmung in M desto genauer, je kleiner dieser Winkel ist, daher auch MR desto genauer der Halbmesser des Krümmungskreises wird. Der Halbmesser selbst muß, wie anfangs gezeigt worden, von der Größe des Winkels MRN und des Bogens z unabhängig seyn. Man drucke den Werth von MR folgendergestalt aus: $MR = \frac{z : \Delta s}{\Delta\varphi : \Delta s - \Delta\omega : \Delta s}$. Die Gränze von MR werde, wie oben, durch r bezeichnet. Setzt man diese anstatt MR, so müssen in dem Werthe desselben auch die Gränzen der Quotienten gesetzt werden. Diese sind $1 : \frac{\partial\varphi}{\partial s}$; $\frac{\partial\omega}{\partial s}$, und so ist $r = \frac{1}{\partial\varphi : \partial s - \partial\omega : \partial s}$, das ist

$$r = \frac{\partial s}{\partial\varphi - \partial\omega}.$$

47. Wenn der Bogen nach C hin convex ist, so ist $\Delta\omega = MCN + MRN$, wofern auch hier ω den spitzen Winkel der CM mit der Normale bedeutet. Für ei-

Digitized by Google

nen concaven Bogen ist gefunden $\Delta\omega = MCN - MRN$. Da wir den letztern Fall zum Grunde der Rechnung gelegt haben, so ist MRN in demselben positiv, also MRN in dem Falle eines convexen Bogens negativ. Eben so ist daher die Beschaffenheit der Krümmungshalbmesser.

48. Man beschreibe aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CM den Kreisbogen Mm, so ist der Winkel NMm (d.i. der W. dMm) $= CMR = \omega$. Man setze $CM = u$, so ist der Bogen $Mm = u\Delta\varphi$, und die Gränze von $\Delta s : u\Delta\varphi$ ist sowohl $\partial s : u\partial\varphi$ als $1 : \cos\omega$. Folglich ist $\partial s . \cos\omega = u\partial\varphi$. Ferner ist die Gränze von $\Delta s : \Delta u$ sowohl $\partial s : \partial u$, als $1 : \sin\omega$, und daher $\partial s . \sin\omega = \partial u$. Folglich ist

$$\partial s^2 = u^2\partial\varphi^2 + \partial u^2.$$

49. Da $\sin\omega = \frac{\partial u}{\partial s}$, so ist $\partial\omega . \cos\omega = \frac{\partial s\partial^2 u - \partial u\partial^2 s}{\partial s^2}$; und da $\cos\omega = \frac{u\partial\varphi}{\partial s}$, so ist $\partial\omega = \frac{\partial s\partial^2 u - \partial u\partial^2 s}{u\partial s\partial\varphi}$. Hieraus ergiebt sich vermittelst (46.)

$$r = \frac{u\partial s^2\partial\varphi}{u\partial s\partial\varphi^2 - \partial s\partial^2 u + \partial u\partial^2 s}.$$

50. Auf gleiche Art wird auch eine Formel erhalten, worin die zweyten Differentiale von s und φ enthalten sind. Es ist $\cos\omega = \frac{u\partial\varphi}{\partial s}$, also $-\sin\omega . \partial\omega = \frac{\partial s\partial u\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}{\partial s^2}$. Da $\sin\omega = \frac{\partial u}{\partial s}$, so ist $-\partial\omega = \frac{\partial s\partial u\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}{\partial u\partial s}$. Daher

$$r = \frac{\partial u\partial s^2}{2\partial u\partial s\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}.$$

Digitized by Google

51. Es ist noch übrig, eine Formel für r zu suchen, in welcher die zweyten Differentiale von u und φ vorkommen. Die Formel (48.), $\partial s^2 = u^2\partial\varphi^2 + \partial u^2$, verhilft dazu. Sie wird differentiirt diese,

$$\partial s\partial^2 s = u\partial u\partial\varphi^2 + u^2\partial\varphi\partial^2\varphi + \partial u\partial^2 u,$$

worin die zweyten Differentiale von allen drey Größen s, u, φ vorkommen. Setzt man in den Formeln 49, 50. für eines der zweyten Differentiale den Werth durch die beiden andern aus dieser Differentialgleichung, so läßt sich, bey gehöriger Auswahl, die gesuchte Formel erhalten. Man multiplicire die Formel für r (49.) im Zähler und Nenner durch ∂s, so wird durch den Werth von $\partial u\partial s\partial^2 s$ der Nenner $= u\partial s^2\partial\varphi^2 - \partial s^2\partial^2 u + u\partial u^2\partial\varphi^2 + u^2\partial u\partial\varphi\partial^2\varphi + \partial u^2\partial^2 u$. Da $\partial s^2 - \partial u^2 = u^2\partial\varphi^2$, so ist der Nenner $=$

$$2u\partial u^2\partial\varphi^2 + u^3\partial\varphi^4 + u^2\partial u\partial\varphi\partial^2\varphi - u^2\partial^2 u\partial\varphi^2,$$

und der Halbmesser des Krümmungskreises,

$$r = \frac{\partial s^3}{2\partial u^2\partial\varphi + u^2\partial\varphi^3 + u\partial u\partial^2\varphi - u\partial^2 u\partial\varphi}.$$

52. In allen diesen drey Formeln ist kein Differential unveränderlich genommen. Läßt man φ gleichförmig wachsen, so ist

$$r = \frac{\partial u}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2\partial u\partial s - u\partial^2 s}$$

oder

$$r = \frac{\partial s}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u}.$$

53. Man lasse die Area ACM gleichförmig wachsen, so ist aus (50.)

$$r = -\frac{\partial u\partial s^2}{u\partial\varphi\partial^2 s}.$$

Denn das letzte Verhältniß der Zunahme der Area MCN und des Kreissectors MCm ist das der Gleichheit. Folg-

Digitized by Google

lich ist das Differential der Area $= \frac{1}{2} u^2 \partial\varphi$. Ist dieses unveränderlich, so ist das Differential dieses Differentials $= 0$, das ist, $u\partial u\partial\varphi + \frac{1}{2}u^2\partial^2\varphi = 0$, oder $2\partial u\partial\varphi + u\partial^2\varphi = 0$.

Diese Formel wird in der Astronomie gebraucht, da die Flächenräume in einem Kegelschnitte den Zeiten auf den Bogen proportional sind, und die Zeit als gleichförmig wachsend angenommen wird.

54. Man ziehe von C (Fig. 94.) die senkrechte CD auf die in M berührende DMd. Da $CMD = 90° - CMR = 90° - \omega$ ist, so ist $\sin CMD = \cos\omega$, und $CD = u\cos\omega$. oder $CD = \frac{u^2\partial\varphi}{\partial s}$, aus (48.).

55. Es sey $CD = t$, so ist der Halbmesser des Krümmungskreises, $r = \frac{u\partial u}{\partial s}$.

Denn, da $t = \frac{u^2\partial\varphi}{\partial s}$, so ist $\partial t =$

$(2u\partial u\partial s\partial\varphi + u^2\partial s\partial^2\varphi - u^2\partial\varphi\partial^2 s) : \partial s^2$.

Dieses ist aus (50.) der Werth von $\frac{u\partial u}{r}$. Also ist $r = \frac{u\partial u}{\partial t}$.

56. Aus dem Werthe des Krümmungshalbmessers für parallele Ordinaten wird derselbe für convergirende folgendergestalt hergeleitet. Es ist LMN (Fig. 95.) ein Bogen einer krummen Linie, an welcher die rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ sind. Auf der Abscissenlinie nehme man einen bestimmten Punct C, und ziehe $CM = u$, wozu der Winkel $ACM = \varphi$ sey. Man setze $AC = a$, so ist

$$a - x = u\cos\varphi; \qquad y = u\sin\varphi.$$

Digitized by Google

Also ist

$$\partial x = u \sin\varphi . \partial\varphi - \cos\varphi . \partial u,$$

$$\partial y = u \cos\varphi . \partial\varphi + \sin\varphi . \partial u;$$

woraus ferner ist

$$\sin\varphi . \partial x + \cos\varphi . \partial y = u\partial\varphi,$$

$$\sin\varphi . \partial y - \cos\varphi . \partial x = \partial u;$$

und hieraus

$$\sin\varphi . \partial^2 x + \cos\varphi . \partial^2 y = 2\partial u \partial\varphi + u\partial^2\varphi,$$

$$\sin\varphi . \partial^2 y - \cos\varphi . \partial^2 x = -u\partial\varphi^2 + \partial^2 u.$$

Diese Gleichungen sind ganz allgemein, da keine unveränderliche Größe darin vorkommt.

Nun ist für parallele Ordinaten (7.)

$$r = \frac{\partial s^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}.$$

Mittelst der beiden Differentialgleichungen vom ersten Grade ist

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = (\cos\varphi . \partial^2 x - \sin\varphi . \partial^2 y) u \partial\varphi + (\sin\varphi . \partial^2 x + \cos\varphi . \partial^2 y) \partial u.$$

Vermittelst der Differentialgleichungen vom zweyten Grade ist der zweyte Theil dieser Gleichung

$$(u\partial\varphi^2 - \partial^2 u) u \partial\varphi + (2\partial u \partial\varphi + u\partial^2\varphi)\partial u.$$

Folglich ist

$$r = \frac{\partial s^3}{2\partial u^2 \partial\varphi + u^2 \partial\varphi^3 + u\partial u \partial^2\varphi - u\partial^2 u \partial\varphi}.$$

Dieses ist die Formel (51.), woraus die beiden andern Formeln folgen.

57. Exempel. An der archimedeischen Spirale ist $u = \frac{a\varphi}{2\pi}$, so daß $u = o$ für $\varphi = o$, und $= a$ nach einem Umlaufe, wenn $\varphi = 2\pi$ ist, überhaupt dem Winkel mit oder ohne mehrere Umläufe proportional

Digitized by Google

ist. Man setze zur Abkürzung $\frac{a}{2\pi} = b$, so ist $u = b\varphi$. Hier ist $\partial u = b\partial\varphi$. Läßt man φ gleichförmig wachsen, oder nimmt $\partial^2\varphi = 0$, so ist auch $\partial^2 u = 0$. Daher giebt die zweyte Formel (52.) hier $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2}$. Es ist $\partial s^2 = \partial u^2 + u^2\partial\varphi^2$ (48.), also $\frac{\partial s^2}{\partial u^2} = \frac{b^2 + u^2}{b^2}$, und $\frac{\partial s^2}{\partial\varphi^2} = b^2 + u^2$. Durch die Substitution dieser Werthe wird $r = \frac{b^2 + u^2}{2b^2 + u^2}\sqrt{(b^2 + u^2)}$. Für $u = o$, ist $r = \frac{1}{2}b = \frac{a}{4\pi}$, so daß diese Spirale gleich mit einer endlichen Krümmung anfängt.

58. Exempel. An der logarithmischen Spirale ist $\varphi = m \log. nat. \frac{u}{a}$. Hieraus ist $\partial\varphi = \frac{m\partial u}{u}$ (Differentialformel, 14.) Läßt man φ gleichförmig wachsen, so ist $o = u\partial^2 u - \partial u^2$, also $\partial u^2 = \frac{\partial u^2}{u}$. Ferner ist $\partial s^2 = \partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 = (1 + m^2)\partial^2 u$. Durch die Substitution dieser Werthe wird die zweyte Formel (52.),

$$r = u\sqrt{\frac{1 + mm}{mm}}.$$

Im Anfange der krummen Linie ist $r = o$, und die Krümmung unendlich groß.

Da tang CMR = cot CMD (Fig. 94), so ist tang CMR oder tang $\omega = \frac{\partial u}{u\partial\varphi}$ (54.), und in dem ge-

Digitized by Google

genwärtigen Falle, $\text{tang}\,\omega = \frac{1}{m}$. Daher ist $\partial\omega = 0$, so daß $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi}$ (46.) ist. Dieses giebt den vorher gefundenen Werth von r noch auf eine etwas leichtere Art.

Es ist $\partial r = \partial u \sqrt{\frac{1+mm}{mm}} = \frac{\partial s}{m}$.

Die Krümmung der logarithmischen Spirale verändert sich gleichförmig mit dem beschreibenden Radius oder dem beschriebenen Bogen.

59. Exempel. Für die Conchoide ist die Gleichung, wenn die Ordinaten aus dem Pole derselben gezogen werden,

$$(u - a)\cos\varphi = b.$$

Man sehe Th. I. S. 530, und Tab. V. Fig. 78., wo AB oder AD = a; CA = b; CM = u; BCM = φ ist. Um die ganze Conchoide, die untere wie die obere, durch die Drehung des Radius u beschreiben zu lassen, muß man für die obere den Winkel φ von 0 bis 90° und von 270° bis 360°, dabey u positiv nehmen; dagegen für die untere Conchoide φ von 90° bis 270° geht, und u negativ ist. In dem Falle, da b kleiner ist als a, wie in Fig. 79. a. a. O. ist u für den Knoten CHDGC positiv. Alles dieses verhält sich an u eben so wie an den Secanten der Winkel durch den ganzen Umfang des Kreises, (Goniometrie, 10.).

Das Differential $\partial\varphi$ sey Constant. Es ist $\cos\varphi = \frac{b}{u-a}$, also $\sin\varphi.\,\partial\varphi = \frac{b\,\partial u}{(u-a)^2}$. Hieraus ist $\cos\varphi.\,\partial\varphi^2 = \frac{b\,\partial^2 u}{(u-a)^2} - \frac{2b\,\partial u^2}{(u-a)^3}$, und mittelst der ersten Gleichung, $\partial\varphi^2 = \frac{\partial^2 u}{u-a} - \frac{2\,\partial u^2}{(u-a)^2}$. Da

Digitized by Google

$\sin\varphi.\partial\varphi = \frac{\cos\varphi.\partial u}{u-a}$, so ist $\frac{\partial u}{u-a} = \tang\varphi.\partial\varphi$, und $\partial^2 u = (u-a)(1+2\tang\varphi^2)\partial\varphi^2$. In der Formel, $r = \frac{\partial s^3}{\partial\varphi(2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u)}$, wird durch die Substitutionen für ∂u und $\partial^2 u$ der Nenner

$$= (au - 2a(u-a)\tang\varphi^2)\partial\varphi^3.$$

Ferner ist $\partial s^2 = u^2\partial\varphi^2 + \partial u^2 =$

$(u^2 + (u-a)^2\tang\varphi^2)\partial\varphi^2$. Folglich ist

$$r = \frac{(u^2 + (u-a)^2\tang\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{a(u-2(u-a)\tang\varphi^2)},$$

wo u durch $\cos\varphi$, oder auch $\tang\varphi$ durch u ausgedruckt werden kann.

Der Halbmesser der Krümmung wird unendlich groß, wenn $\tang\varphi^2 = \frac{u}{2(u-a)}$ ist. Da $\tang\varphi^2 = \frac{1-\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2}$, und $(u-a)\cos\varphi = b$ ist, so entsteht durch Wegschaffung von u, zur Bestimmung der Lage des Radius durch den Wendungspunct, die cubische Gleichung,

$$a\cos\varphi^3 + 3b\cos\varphi^2 - 2b = 0.$$

Diese Gleichung hat drey mögliche Wurzeln, so fern $\cos\varphi$ als eine absolute Zahl betrachtet wird, wie sich (Gleichung, 70.) zeigt, wenn das zweyte Glied weggeschafft worden ist. Allein damit φ ein möglicher Winkel sey, muß $\cos\varphi$ kleiner als die Einheit seyn. Das schränkt die Anzahl der brauchbaren Wurzeln auf zwey oder eine ein, auf zwey in dem Falle, Fig. 78. Tab. V. auf eine in dem Falle Fig. 79. Siehe auch Th. I. S. 536. f. Die Gleichung für y daselbst ist dieselbe mit der für $\cos\varphi$ hier, weil $y = a\cos\varphi$ ist. Es ist dort gefunden, daß die Gleichung, $2b^2 = a^2$, die Scheidungsgränze der Fälle angiebt, in welchen die Gleichung für y drey mögliche Wurzeln oder nur eine hat. Man nehme $2b^2 = a^2$, so ist

Digitized by Google

$\cos\varphi^3 + 3\cos\varphi^2\sqrt{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 0$. Es ergiebt sich sogleich, daß hier $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Also ist $\text{tang}\,\varphi = 1$, und $u = 2a$. Wenn also Fig. 79. a. a. O. $AB : AC = \sqrt{2} : 1$ ist, und $CF = 2AB$ genommen wird, so ist F der Wendungspunct.

Halbmesser der Krümmung an gedoppelt krummen Linien.

60. I. Gedoppelt krumme Linien haben an jedem Puncte ihren Krümmungs-Halbmesser in der Ebene, in welcher drey nächste stetige Puncte, oder zwey nächste Elemente derselben liegen, das ist in der Krümmungs-Ebene (krumme Linien von gedopp. Krümmung, 22.). Diese Ebene wird durch die Formeln für die Winkel η und ϑ, und die Länge h auf der Axe der x, a. a. O. bestimmt. Zu der gegenwärtigen Rechnung ist es noch nöthig, den Werth von $\cot\vartheta$, eben so wie daselbst $\text{tang}\,\eta$ ausgedruckt ist, durch die ersten und zweyten Differentiale von x, y, z darzustellen.

II. Man setze zur Abkürzung

$$(\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x)^2 + (\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y)^2 = N^2,$$

so folgen aus der Formel,

$$\text{tang}\,\eta = \frac{\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y}{\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x},$$

die Formeln,

$$\cos\eta = \frac{\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x}{N}$$

$$\sin\eta = \frac{\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y}{N}.$$

III. Diese Werthe setze man in die Formel (22.)

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y}{\partial z}.\cos\eta - \frac{\partial x}{\partial z}\sin\eta.$$

Allein da N eine Wurzelgröße ist, so suche man den Werth von $\cot\vartheta^2$. So ergiebt sich, mittelst gewöhnlicher Reductionen,

Digitized by Google

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y}{N}.$$

IV. Auf der Krümmungs-Ebene nehme man nun den Punct, deſſen Coordinaten in Beziehung auf die drey Ebenen der x, y, z, dieſelben ſind mit denen des Punctes der gedoppelt krummen Linie, für welchen der Krümmungs-Halbmeſſer geſucht wird. Die Coordinaten auf der Ebene ſelbſt ſeyn t und u. Die Abſciſſen t werden auf der Durchſchnittslinie mit der Ebene der x, y, von der Axe der x genommen; die u ſind ſenkrecht auf dieſe Linie. Es iſt (krumme Fläche, 15.)

$$t = \frac{\text{tang}\,\eta}{\text{tang}\,\vartheta} z + \frac{x - h}{\cos\eta}, \quad \text{und } u = \frac{z}{\sin\vartheta}.$$

V. Nach der erſten Formel (oben 7.) iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = \frac{\partial s^5}{\partial u . \partial^2 t - \partial t . \partial^2 u}$. Hier ſetze man für die Differentiale von t und u ihre Werthe durch x und z, und ſchaffe die Winkel η und ϑ weg, mittelſt der Werthe von tang η und cot ϑ, ſo erhält man den Krümmungs-Halbmeſſer für eine einfach krumme Linie, welche drey ſtetige Puncte mit der gedoppelt krummen gemein hat, alſo den geſuchten Krümmungs-Halbmeſſer. Denn durch die mittelſt der Formeln für tang η und cot ϑ beſtimmte Lage der Ebene gehören drey ſtetige Ordinaten z ſowohl der gedoppelt krummen Linie als der Ebene zu, und die Endpuncte dieſer Ordinaten z ſind zugleich diejenigen der Ordinaten u.

VI. Die fernere Rechnung hat keine Schwierigkeit. Es iſt

$$\partial t = \frac{\text{tg}\,\eta}{\text{tg}\,\vartheta}\,\partial z + \frac{1}{\cos\eta}\,\partial x;$$

$$\partial^2 t = \frac{\text{tg}\,\eta}{\text{tg}\,\vartheta}\,\partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta}\,\partial^2 x;$$

$$\partial u = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial z; \qquad \partial^2 u = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial^2 z.$$

Digitized by Google

Daraus

$$\partial u.\partial^2 t = \frac{tg\eta}{tg\vartheta.\sin\vartheta}\partial z.\partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta.\sin\vartheta}\partial z.\partial^2 x$$

$$\partial t.\partial^2 u = \frac{tg\eta}{tg\vartheta.\sin\vartheta}\partial z.\partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta.\sin\vartheta}\partial x.\partial^2 z.$$

Also ist

$$\partial u.\partial^2 t - \partial t.\partial^2 u = \frac{\partial z.\partial^2 x - \partial x.\partial^2 z}{\cos\eta.\sin\vartheta},$$

und $r = \dfrac{\cos\eta.\sin\vartheta.\partial s^3}{\partial z.\partial^2 x - \partial x.\partial^2 z}$,

wo nur noch $\cos\eta$ und $\sin\vartheta$ durch die Differentiale von x, y, z auszudrucken sind.

VII. Es ist $\sin\vartheta^2 = \dfrac{1}{1+\cot\vartheta^2} = \dfrac{N^2}{N^2+(\partial y.\partial^2 x - \partial x.\partial^2 y)^2}$, und

$\cos\eta^2 = \dfrac{(\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x)^2}{N^2}$. Also ist

$$\cos\eta^2.\sin\vartheta^2 = \frac{(\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x)^2}{N^2+(\partial y.\partial^2 x - \partial x.\partial^2 y)^2}.$$

Folglich ist, wenn für N^2 der Werth gesetzt wird, $r = \dfrac{\partial s^3}{V[(\partial x.\partial^2 z - \partial z\partial^2 x)^2+(\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y)^2+(\partial y.\partial^2 x - \partial x.\partial^2 y)^2.]}$

Hier ist noch kein Differential als unveränderlich angenommen.

VIII. Das Differential ∂s ist $= V(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)$. Denn die Chorde eines endlichen Bogens ist $= V(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$. Das Element eines Bogens und die Chorde desselben haben das Verhältniß der Gleichheit. — Oder man suche, den Werth von $V(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)$ aus den Differentialwerthen, $\partial x = \cos\eta.\partial t - \sin\eta \times \cos\vartheta.\partial u$; $\partial y = \sin\eta.\partial t + \cos\eta.\cos\vartheta.\partial u$; $\partial z = \sin\vartheta.\partial u$, die aus den endlichen Gleichungen für x, y, z (krumme Fläche, 15.) folgen. Eine leichte

Digitized by Google

Rechnung ergiebt, daß $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial t^2 + \partial u^2$. Es ist aber $\partial t^2 + \partial u^2 = \partial s^2$, wenn ∂s das Element des Bogens in der ebenen Curve bedeutet.

61. Durch eine andere Rechnung findet la Croix diese Formel, Tr. du Calc diff. et intégral. T. I. nr. 353. Monge in den Feuilles d'Analyse, Nr. 34. bestimmt die Lage des Mittelpuncts der Krümmung an gedoppelt krummen Linien folgendergestalt. Man ziehe zwey nächste Normal-Ebenen auf die Curve, und ziehe von dem einen der Puncte auf den Durchschnitt dieser Ebenen eine senkrechte, so giebt diese den Mittelpunct der Krümmung. Auch vergleiche man noch la Grange in der Theorie der analytischen Functionen, Nr. 141. ff.

62. Exempel. 1. An einer cylindrischen Spirale, die mit den Seiten des Cylinders einen gegebenen Winkel macht; den Halbmesser der Krümmung zu finden.

Der Halbmesser des Cylinders sey $= a$. Auf dem Halbmesser durch den Anfangspunct der Spirale in dem Grundkreise nehme man die Abscisse x von dem Mittelpuncte aus, darauf die senkrechte Ordinate an den Grundkreis $= y$, und durch deren Endpuncte die Ordinate an die Spirale $= z$. Es ist also I. $x^2 + y^2 = a^2$. Das Differential des Kreisbogens ist $= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Wegen des gegebenen Winkels der Spirale mit der Seite des Cylinders ist $\partial z : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 1 : m$ ein gegebenes Verhältniß, wo m die Tangente jenes Winkels ist. Es ist also II. $\partial x^2 + \partial y^2 = m^2 \partial z^2$, die zweyte Gleichung für unsere Curve, eine differentielle statt einer endlichen. Aus I. folgt III. $x \partial x + y \partial y = 0$. Aus diesen drey Gleichungen ergeben sich

$$\text{IV.} \quad a \partial x = - m y \partial z,$$

$$\text{V.} \quad a \partial y = + m x \partial z.$$

Die Vorzeichen deuten an, daß die Veränderungen von z und x ungleichnamig, von z und y aber gleichnamig sind, und mußten dem zu folge so genommen werden. Das Differential ∂z sey constant, so verändert sich auch der

Digitized by Google

Bogen der Spirale gleichförmig. Es ist nun

VI. $a\partial^2 x = -m\partial y\partial z$,

VII. $a\partial^2 y = +m\partial x\partial z$.

Daraus ist $a\partial z.\partial^2 x = -m\partial y\partial z^2$; auch $a\partial z.\partial^2 y = +m\partial x\partial z^2$; und $a\partial y.\partial^2 x - a\partial x\partial^2 y = -m\partial y^2\partial z - m\partial x^2\partial z = -m^2\partial z^3$. Dadurch wird in der Formel für den Halbmesser der Krümmung der Differentialausdruck unter dem Wurzelzeichen $= \frac{m^2}{a^2} \times$

$$(\partial y^2 + \partial x^2)\partial z^4 + \frac{m^6}{a^2}\partial z^6 = \frac{m^4}{a^2}(1+m^2)\partial z^6.$$

Der Nenner ist $= \frac{m^2}{a}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}\partial z^3$.

Da $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = (m^2+1)\partial z^2$ ist (60. VIII.), so ist $\partial s^3 = (m^2+1)^{\frac{3}{2}}\partial z^3$. Der Halbmesser an der Krümmung der Spirale ist daher $= \frac{m^2+1}{m^2}a$.

Der Winkel der Spirale mit der Seite des Cylinders sey $= \alpha$, so ist der Halbmesser der Krümmung $= \frac{a}{\sin\alpha^2}$.

63. Exempel. 2. Die Gleichungen für die gedoppelte krumme Linie seyn I. $ax = yy$, und II. $yy + zz = aa$. Sie ist der Durchschnitt eines circularen und paraboliſchen Cylinders. (Krumme Linien von gedopp. Krümmung, 4). Aus jenen Gleichungen ist

III. $a\partial x = 2y\partial y$; IV. $2y\partial y + 2z\partial z = 0$,

oder

III. $\partial y = \frac{a}{2y}\partial x$; IV. $\partial z = -\frac{a}{2z}\partial x$.

Man setze ∂x constant, so ist

Digitized by Google

$$\text{V. } \partial^2 y = -\frac{a\partial x\partial y}{2yy} = -\frac{a^2}{4y^5}\partial x^2.$$

$$\text{VI. } \partial^2 z = +\frac{a\partial x\partial z}{2zz} = -\frac{a^2}{4z^5}\partial x.$$

Dadurch ist

$$\partial x.\partial^2 z = -\frac{a^2}{4z^5}\partial x^2; \quad \partial x.\partial^2 y = -\frac{a^2}{4y^5}\partial x^2.$$

In dem Nenner der Formel für den Krümmungshalbmesser ist

$$(\partial x.\partial^2 z)^2 + (-\partial x.\partial^2 y)^2 =$$

$$\frac{a^4}{16y^6z^6}(y^6 + z^6)\partial x^6.$$

Der übrige Theil daselbst ist

$$(\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y)^2 =$$

$$\left(-\frac{a^5}{8y^5z^5}(y^2+z^2)\partial x^3\right)^2 = \left(-\frac{a^5}{8y^5z^5}\partial x^3\right)^2$$

$$= \frac{a^{10}}{64y^6z^6}\partial x^6.$$

Die Differentialgröße unter dem Wurzelzeichen im Nenner ist also

$$\frac{a^4}{64y^6z^6}(a^6 + 4y^6 + 4z^6)\partial x^6,$$

und der Nenner selbst $=$

$$\frac{a^2}{8y^3z^3}(a^6 + 4y^6 + 4z^6)^{\frac{1}{2}}\partial x^3.$$

Ferner ist $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$

$$= \left(1 + \frac{a^2}{4y^2} + \frac{a^2}{4z^2}\right)\partial x^2 = \frac{a^4 + 4y^2z^2}{4y^2z^2}\partial x^2;$$

und $\partial s^3 = \frac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3z^3}\partial x^3.$

Also ist der Halbmesser der Krümmung

$$= \frac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^6 + 4y^6 + 4z^6)^{\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

Die krumme Linie ist auf jeder Seite des paraboliſchen Cylinders eine in ſich zurücklaufende Linie. In dem von der Ebene der x, y entfernteſten Puncte ist $z = a$ und $y = 0$, alſo der Halbmeſſer der Krümmung daſelbſt $= \frac{a}{\sqrt{5}}$. Eben ſo groß iſt derſelbe in dem von der Ebene der y, z entfernteſten Puncte, wo $y = a$ und $z = 0$ iſt.

Man bemerke noch, daß $y^6 + z^6 = (y^2 + z^2)(y^4 - y^2z^2 + z^4) = a^2(a^4 - 3y^2z^2)$ iſt. Durch dieſe Umwandlung iſt der Halbmeſſer der Krümmung $= \frac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3(5a^4 - 12y^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$. Der Werth deſſelben iſt am größten, wenn $2yz$ am größten iſt. Da $\frac{2yz}{aa}$ der Sinus des gedoppelten Winkels iſt, welchen der Halbmeſſer durch die Projection eines Punctes der Curve mit der Axe der y macht, ſo iſt $2yz$ am größten, wenn $\frac{y}{a}$ der Sinus von 45° iſt, oder für $y = z$. Dieſes giebt $4y^2z^2 = a^4$, und der größte Halbmeſſer der Krümmung an der Curve iſt $= 2a$. Der kleinſte iſt der vorher gefundene $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Halbmeſſer der Krümmung an krummen Flächen.

63. Die Krümmung einer krummen Fläche läßt ſich nicht mit der Krümmung einer Kugelfläche vergleichen, wie die Krümmung einer Curve mit der eines Kreiſes. Auf einer Kugelfläche ſind alle Schnitte, welche durch eine auf dieſelbe ſenkrechte gerade Linie, das iſt, durch ihren Durchmeſſer geführt werden, gleich große Kreiſe, und die Krümmung iſt daher nach allen Richtungen dieſelbe. Auf andern krummen Flächen ſind die Schnitte durch eine Normale entweder alle verſchieden, oder nur einige kommen mit einander überein. Bloß an denen Körpern, die durch Drehung entſtehen, läßt ſich die Krümmung an den Po-

Digitized by Google

len mit der an einer Kugelfläche vergleichen. Man kann also nichts anders hier leisten, als für einen bestimmten Schnitt die Krümmung auf der Curve des Schnittes in dem gegebenen Puncte angeben, und dann noch diejenigen Puncte suchen, in welchen die Krümmung am größten oder kleinsten ist, nebst dem Maaße dieser größten oder kleinsten Krümmung.

64. Eine krumme Fläche hat entweder eine einfache oder doppelte Krümmung. Die erste Art ist, wenn alle Schnitte durch eine Normale nach derselben Gegend hin conver oder concav sind; die andere, wenn sie theils conver, theils concav sind, wie an eingebogenen Flaschen oder Satteln. Von der erstern Art der Krümmung ist hier nur die Frage. Die Möglichkeit einer berührenden Ebene ist leicht begreiflich. Wie ihre Lage an einer krummen Fläche gefunden wird, ist in dem Artikel, krumme Fläche, 112—114. gezeigt. Eine berührende Ebene hat entweder nur einen Punct oder eine gerade Linie mit der krummen Fläche gemein. Die auf die berührende Ebene in dem Berührungspuncte senkrechte gerade ist die Normale auf die Fläche. Wie diese aus der Gleichung für die berührende Ebene bestimmt wird, zeigt der Artikel, Linie, 42. Auf einer Kugelfläche geht die Normale durch ihren Mittelpunct. Nimmt man auf der Normale einer krummen Fläche irgend einen Punct zum Mittelpuncte einer Kugel, die durch den Punct der Fläche in der Normale geht, so berührt diese die Fläche nach allen Richtungen ihrer großen Kreise durch den gemeinschaftlichen Punct, weil beide Flächen nach allen Richtungen auf der berührenden Ebene gemeinschaftliche berührende gerade haben. Übrigens können einige Kreise auf der Kugel zwischen der krummen Fläche und der berührenden Ebene durchgehen, andere nicht; oder für alle Kreise findet nur das eine oder das andere Statt. Es ist die Aufgabe, diejenige Kugel zu finden, welche nicht allein eine krumme Fläche in einem gegebenen Puncte berühre, sondern auch durch ihren Halbmesser die Krümmung in einem gegebenen Schnitte durch jenen Punct messe.

Digitized by Google

65. Diese Aufgabe aufzulösen ist es nöthig, für eine Kugelfläche eine Differentialgleichung vom zweyten Grade zu suchen, die von allen zufälligen Bestimmungen der Lage der Coordinaten frey sey, also außer dem Halbmesser nichts anders als die Differentialquotienten des ersten und zweyten Grades enthalte, auf gleiche Art, wie es (5.) für den Kreis geschehen ist. Setzt man nun in dem Werthe des Halbmessers, der durch diese Quotienten ausgedruckt ist, ihre Werthe aus der Gleichung für eine krumme Fläche, so wird der Kugelschnitt, für welchen die Quotienten gelten, mit dem Schnitte der krummen Fläche in dem Berührungspuncte möglichst genau übereinkommen, wie ein Krümmungskreis mit einem Bogen einer krummen Linie, und der Halbmesser des Kugelschnittes ist der Halbmesser der Krümmung in dem Schnitte der krummen Fläche an dem mit der Kugel gemeinschaftlichen Puncte.

66. Die allgemeinste Gleichung für eine Kugelfläche zu finden, ist es noch vorher nöthig, die allgemeine Gleichung für eine krumme Fläche durch die Differentialquotienten des ersten und zweyten Grades aufzustellen. Es sey z eine Function von x und y, so daß

$$\partial z = P\partial x + Q\partial y$$

ist, wo P und Q Functionen von x und y sind, auch von z, so fern z eine ungesonderte Function (functio implicita) von x und y wäre (Function, 7.), oder wenn ∂z in eine Function von z multiplicirt war, die durch die Division abgesondert ist. Mit einem andern Ausdruck ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ dient zur Modification des partiellen Differentialquotienten. (Differentialgleichung, 14.). Der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist als vollständig und unabhängig zu

Digitized by Google

betrachten, weßwegen er auch nicht in Klammern eingeschlossen ist.

67. Ferner sey

$$\partial P = p\partial x + q\partial y,$$
$$\partial Q = q'\partial x + r\partial y,$$

so ist $q' = q$ (a. a. O.). Setzt man also q statt q', so ist

$$\partial^2 z = p\partial x^2 + 2q\partial x\partial y + r\partial y^2 + P\partial^2 x + Q\partial^2 y,$$

wo noch kein Differential als constant angenommen ist. Oder in den Bezeichnungen für partielle Differentiale,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

68. Die Coordinaten an die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= a$ ist, seyn x, y, z; die Coordinaten an den Mittelpunct seyn α, β, γ, so ist (krumme Fläche, 40.)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2.$$

Hieraus ist die Differentialgleichung des ersten Grades,

$$(x-\alpha)\partial x + (y-\beta)\partial y + (z-\gamma)\partial z = 0.$$

Also ist $P = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$; $\quad Q = -\frac{y-\beta}{z-\gamma}$.

69. Die Differentialgleichung des zweyten Grades ist

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 + (x-\alpha)\partial^2 x + (y-\beta)\partial^2 y + (z-\gamma)\partial^2 z = 0,$$

oder, wenn $x-\alpha$ und $y-\beta$ durch $z-\gamma$ ausgedruckt werden,

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 - (P\partial^2 x + Q\partial^2 y - \partial^2 z)(z-\gamma) = 0.$$

Setzt man ∂x constant (zufolge Differentialrechnung,

Digitized by Google

15.), und schreibt zur Abkürzung u statt $\frac{\partial y}{\partial x}$, so ist

$$1 + u^2 + (P + Qu)^2 + (p + 2qu + ru^2)(z - \gamma) = 0,$$

wo noch statt des Factors $z - \gamma$ der Halbmesser einzuführen ist.

70. In der endlichen Gleichung für den Kreis setzt man statt $x - \alpha$ und $y - \beta$ ihre Werthe durch $z - \gamma$, so ist

$$(P^2 + Q^2 + 1)(z - \gamma)^2 = a^2.$$

Dadurch wird die gesuchte Gleichung für eine Kugelfläche,

$$\frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} = -\frac{1 + u^2 + (P + Qu)^2}{p + 2qu + ru^2}.$$

71. Es ist $p = -\frac{1 + P^2}{z - \gamma}$; $q = -\frac{PQ}{z - \gamma}$; $r = -\frac{1 + Q^2}{z - \gamma}$. Denn p ist das partielle Differential von P in Beziehung auf x durch ∂x dividirt. Um es zu erhalten, muß in dem Werthe von P, nämlich $-\frac{x - \alpha}{z - \gamma}$, entweder für $z - \gamma$ dessen Werth gesetzt werden, oder es wird dasselbe auf gewöhnliche Art differentiirt, und für $\frac{\partial z}{\partial x}$ der partielle Werth gesetzt. Nach dem letztern Verfahren ist $\partial P = -\frac{\partial x}{z - \gamma} + \frac{(x - \alpha)\partial z}{(z - \gamma)^2}$, und

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = p = -\frac{\partial x}{z - \gamma} - \frac{(x - \alpha)^2}{(z - \gamma)^3} = -\frac{1 + P^2}{z - \gamma}.$$

72. In der Formel für a (70.) gehören die Quotienten, P, Q, p, q, r, zu einem gegebenen Puncte, und werden durch die Lage desselben bestimmt. Aber der Quotient u oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ hängt von der Lage zweyer nächsten

Puncte, oder um es geometrischer auszudrucken, von der Lage der berührenden geraden ab. Nämlich so wie für eine schneidende gerade Linie an einer Kugelfläche oder jeder andern krummen die Verhältnisse $\Delta x : \Delta y : \Delta z$ beiderseits übereinkommen, so sind für eine berührende die Differentialverhältnisse $\partial x : \partial y : \partial z$ dieselben wie für die krumme Fläche. Werden also die Quotienten P, Q und einer der p, q, r (die beiden andern werden durch jenen, und durch P und Q bestimmt,) gegeben, nebst einem Puncte der Kugel und der Lage der berührenden an demselben, so ist dadurch der Halbmesser der Kugel bestimmt.

73. Die Coordinaten für den Mittelpunct der Kugel werden, wenn der Halbmesser a bestimmt ist, durch folgende Gleichungen gefunden:

$$x - \alpha = - \frac{a P}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

$$x - \beta = - \frac{a Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

$$x - \gamma = + \frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Denn aus der Gleichung, $(1 + P^2 + Q^2)(z - \gamma)^2 = a^2$ (70.), ist $z - \gamma = \frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Daraus folgen die beiden andern Gleichungen, indem blos $z - \gamma$ durch $x - \alpha$ oder $y - \beta$ ausgedruckt wird. Nimmt man $z - \gamma$ negativ, so bekommen $x - \alpha$ und $y - \beta$ das Vorzeichen $+$.

74. Es sey nun eine krumme Fläche durch ihre Gleichung gegeben, aus welcher die Quotienten, P, Q, p, q, r, hergeleitet werden. Diese sind in der Form von den gleichnamigen an einer Kugel zwar verschieden, doch lassen sich die beiden, P und Q, nebst einem von den dreyen, p, q, r, der Größe nach, mittelst der willkürlichen, α, β, γ, an der Kugel und der krummen Fläche gleich groß setzen. Für die beiden andern bleibt zwar keine freye Größe übrig, al-

Digitized by Google

lein das Aggregat, $p + 2qu + ru^2$, im Nenner von a, läßt sich für die Kugel eben so groß nehmen, als für die krumme Fläche. Die Quotienten P und Q müssen aber für beide Flächen auch einzeln dieselben seyn, weil von diesen die Lage der berührenden Ebene an dem gemeinschaftlichen Puncte abhängt, welche an beiden Flächen dieselbe seyn muß (krumme Fläche, 113.). Der Quotient u oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist derselbe für beide Flächen, und gehört zugleich zu irgend einer berührenden geraden, die in der berührenden Ebene durch den gegebenen Punct der krummen Fläche gezogen wird. Legt man durch diese gerade irgend eine Ebene, außer der berührenden, so schneidet diese die Kugelfläche mit dem Halbmesser a, deren Mittelpunct in der Normale an die krumme Fläche genommen wird, in einem Kreise, größern oder kleinern, die krumme Fläche aber in einer krummen Linie, zu welcher jener Kreis als Krümmungskreis gehört, weil der Halbmesser der Kugel so bestimmt ist, daß die Differentialquotienten des ersten Grades einzeln übereinstimmen, die von dem zweyten Grade aber dasselbe Aggregat, $p + 2qu + ru^2$, geben, wobey auch u in derselben berührenden geraden übereinkommt.

Für die Kugel kann u jeden Werth erhalten, ohne daß der Halbmesser a sich ändert; allein an der krummen Fläche verändert sich a mit der Veränderung von u, oder der berührenden geraden, weil die Werthe von p, q, r, einzeln betrachtet, nicht dieselben für beide Flächen sind.

75. Anstatt des Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder u, der von der Lage der berührenden geraden abhängt, führe man die Lage der schneidenden, durch diese berührende gelegten Ebene ein, und zwar derjenigen, welche zugleich durch die Normale geht. Diese Lage wird durch zwey Winkel gegeben, denjenigen, unter welchem sie die Axe der x schneidet, und durch ihren Neigungswinkel gegen die Ebene der x, y, oder, um bergmännisch zu reden, durch ihr Streichen und

Digitized by Google

Fallen. Der Durchschnittspunct mit der Axe der x kommt hier nicht in Rechnung, weil dafür die Bedingung eintritt, daß die Ebene durch einen gegebenen Punct gehen soll. Die Bedingung, daß die schneidende Ebene durch die Normale gehen soll, hat zur Folge, daß der Mittelpunct des Krümmungskreises in die schneidende Ebene zu liegen kommt. Man könnte den Krümmungskreis zwar auch als einen kleinern Kreis betrachten; allein es wäre ein beschwerlicher Umweg, aus dem zugehörigen Halbmesser der Kugel den Halbmesser dieses kleinern Kreises herzuleiten.

76. Die Gleichung für die schneidende Ebene sey

$$Ax' - By' + Cz' - D = 0,$$

wo die Coordinaten zum Unterschiede von denen an der krummen Fläche durch Strichelchen ausgezeichnet sind. In dem Durchschnitte beider ist $x' = x$; $y' = y$; $z' = z$, und daher

$$A\partial x - B\partial y + C\partial z = 0.$$

An der krummen Fläche ist $\partial z = P\partial x + Q\partial y$. Daher ist $P\partial x + Q\partial y = \frac{1}{C}(B\partial y - A\partial x)$. Setzt man $C = 1$, das ist, wenn man die Quotienten, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, durch A und B bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A+P}{B-Q}.$$

Die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und der Ebene der x, y mache mit der Axe der x den Winkel η, und jene sey gegen diese unter dem Winkel ϑ geneigt, so ist, (Krumme Fläche, 5.), $\frac{A}{B} = \text{tang}\,\eta$; $A = \text{sin}\,\eta \cdot \text{tang}\,\vartheta$; $B = \text{cos}\,\eta \cdot \text{tang}\,\vartheta$, nämlich wenn $C = 1$ genommen wird. Dadurch ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\text{sin}\,\eta \cdot \text{tang}\,\vartheta + P}{\text{cos}\,\eta \cdot \text{tang}\,\vartheta - Q}.$$

Digitized by Google

77. Da die schneidende Ebene durch den Mittelpunct der Kugel gehen soll, so findet noch eine Relation zwischen den Coefficienten, A, B, C und den Functionen, P, Q, Statt. Es ist nämlich, da die Coordinaten für den Mittelpunct sind α, β, γ,

$$A\alpha - B\beta + C\gamma - D = 0,$$

und daher

$$A(x-\alpha) - B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0.$$

Nun ist $\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = -P$, und $\frac{y-\beta}{z-\gamma} = -Q$, (68.), also ist, wenn wiederum $C = 1$ gesetzt wird,

$$AP - BQ = 1,$$

und

$$P \sin\eta . \tang\vartheta - Q \cos\eta . \tang\vartheta = 1.$$

Die Winkel η und ϑ werden nun einer durch den andern mittelst der Functionen, P, Q, bestimmt. Wenn der Schnitt nicht durch den Mittelpunct geführt wird, sind beide Winkel unabhängig.

78. Die Gleichung für die berührende Ebene ist (krumme Fläche, 113.)

$$Px + Qy - z = E,$$

wo P und Q als unveränderliche Größen zu betrachten sind, und E eine Constante von der Integration der Gleichung, $P\partial x + Q\partial y - \partial z = 0$, welche durch die Coordinaten in dem Berührungspuncte bestimmt wird. Da $AP - BQ - 1 = 0$ ist (77.), so ist der Winkel der schneidenden Ebene und der berührenden ein rechter Winkel (Linie, 48.). Jene geht also durch die Normale auf die krumme Fläche. Die Kugelfläche hat dieselbe berührende Ebene, wie die krumme Fläche, weil ihre Differentialgleichung dieselbe wie für jene ist, nach den Annahmen in (68. u. 74). Beide krumme Flächen berühren also einander (64).

79. Nun setze man in der Formel (70.) für den Halbmesser der berührenden Kugel den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder

Digitized by Google

u durch die Winkel η und ϑ. Zur Abkürzung sey $1 + u^2 + (P + Qu)^2 = M$, und $p + 2qu + ru^2 = N$; so daß $a = -\frac{M}{N}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ sey. Es ist

$$M = 1 + \frac{(\sin\eta . \tang\vartheta + P)^2}{(\cos\eta . \tang\vartheta - Q)^2} + \frac{(P\cos\eta + Q\sin\eta)^2 \tang\vartheta^2}{(\cos\eta . \tang\vartheta - Q)^2}.$$

Entwickelt man diese Brüche, und nimmt sie mit der Einheit zusammen, so ist, mit Zuziehung der Gleichung zwischen P, Q, η, ϑ in (77.)

$$M = \frac{(1 + P^2 + Q^2)(1 + \tang\vartheta^2)}{(\cos\eta . \tang\vartheta - Q)^2}.$$

Ferner ist

$$N = [p(\cos\eta . \tang\vartheta - Q)^2 + r(\sin\eta \tang\vartheta + P)^2 + 2q(\sin\eta . \tang\vartheta + P)(\cos\eta . \tang\vartheta - Q)] : (\cos\eta . \tang\vartheta - Q)^2.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner durch $\cos\vartheta^2$, so wird

$$a = -(1 + P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}} : [p(\cos\eta . \sin\vartheta - Q\cos\vartheta)^2 + r(\sin\eta . \sin\vartheta + P\cos\vartheta)^2 + 2q(\sin\eta . \sin\vartheta + P\cos\vartheta)(\cos\eta . \sin\vartheta - Q\cos\vartheta)].$$

Dieses ist der Werth des Halbmessers der Krümmung in dem Schnitte, der durch die Winkel η und ϑ bestimmt wird (74.).

80. Wenn die schneidende Ebene, welche durch den Mittelpunct der Kugel geht, zugleich senkrecht auf die Ebene der x, y ist, so ist

$$a = \frac{-(1 + P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}}{p\cos\eta^2 + r\sin\eta^2 + 2q\sin\eta . \cos\eta}.$$

Der Winkel η ist nun ein bestimmter Winkel, wie es die Natur der Bedingung ergiebt; da durch die Normale und

Digitized by Google

den Mittelpunct der berührenden Kugel nur eine Ebene gelegt werden kann, wenn der Mittelpunct nicht in der Normale selbst liegt. In diesem Falle sind die Ordinaten α, β für den Mittelpunct der Kugel zugleich Coordinaten an die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene mit der Ebene der x, y. Daher ist $A(x-\alpha) - B(y-\beta) = 0$ weil für diese Linie $z = 0$ ist, und die Constante in dem Unterschiede der Gleichungen für die Coordinaten x, y und α, β, heraus geht. Da an der Kugelfläche $P = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, und $Q = -\frac{y-\beta}{z-\gamma}$ ist, so ist $AP - BQ = 0$. Der Winkel η, welchen die gerade Linie, deren Coordinaten α, β sind, mit der Axe der x macht, wird durch die Gleichung, $\text{tang}\,\eta = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$, bestimmt, und daher ist $\text{tang}\,\eta = \frac{A}{B}$, also auch $\text{tang}\,\eta = \frac{Q}{P}$.

Daraus ist $\cos\eta = \frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}$,

und $\sin\eta = \frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}$.

81. Setzt man in (80.) für $\sin\eta$ und $\cos\eta$ diese Werthe, so ist

$$a = -\frac{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{P^2p + Q^2r + 2PQq}.$$

82. Da die Coordinaten-Ebenen willkürlich genommen werden können, so nehme man, durch gehörige Veränderung der Coordinaten, die Ebene der x, y senkrecht auf die Normale in dem gegebenen Puncte der krummen Fläche, oder parallel mit der berührenden Ebene. Dann ist in der Formel (80.) der Winkel η ein unabhängiger, welcher jeden Werth erhalten kann. Die Ordinate z ist in diesem Falle ein Größtes oder Kleinstes. Daher ist in der Projection des Schnittes auf die Ebene der x, z der

Digitized by Google

partielle Quotient $\frac{\partial z}{\partial x} = o$, eben so in der auf die Ebene der y, z der Quotient $\frac{\partial z}{\partial y} = o$, das ist, $P = o$, $Q = o$. Es ist also, wenn die Normale zugleich senkrecht auf die Ebene der x, y ist,

$$a = \frac{-1}{p\cos\eta^2 + r\sin\eta^2 + 2q\sin\eta.\cos\eta}.$$

83. Hieraus wird sehr bequem der größte und kleinste Werth von a hergeleitet. Diese haben zugleich Statt mit dem kleinsten und größten Werthe des Nenners. Da $2\cos\eta^2 = 1 + \cos 2\eta$, und $2\sin\eta^2 = 1 - \cos 2\eta$, auch $2\sin\eta.\cos\eta = \sin 2\eta$ ist, so ist das Differential des Nenners $= (-p\sin 2\eta + r\sin 2\eta + 2q\cos 2\eta)\partial\eta$. Dieses $= o$ gesetzt, ergiebt sich

$$\text{tang}\, 2\eta = \frac{2q}{p-r}.$$

Es gehört tang 2η zu zwey Winkeln (Goniometrie, 8.). Nennt man den spitzen Winkel ζ, so ist der andere $= 180° + \zeta$, und η ist sowohl $= \frac{1}{2}\zeta$ als $= 90° + \frac{1}{2}\zeta$. Der Unterschied ist $= 90°$. Folglich schneiden sich die Krümmungskreise, deren einer den größten, der andere der kleinsten Halbmesser hat, einander unter einem rechten Winkel. Dieses ist ein merkwürdiger Fall in der Lehre vom Größten und Kleinsten.

84. Es sey $2\eta = \zeta + \varphi$, wo η jeden Werth bekommen kann, und $\text{tang}\,\zeta = \frac{2q}{p-r}$ ist. Der Nenner des Werthes von a in (82.) ist $= \frac{1}{2}(p+r) + \frac{1}{2}(p-r) \times \cos 2\eta + q\sin 2\eta$, durch die in (83.) gebrauchten Substitutionen. Setzt man für 2η den Werth durch ζ und φ, so wird dieser Nenner $= \frac{1}{2}(p+r) + \frac{1}{2}(p-r) \times (\cos\zeta.\cos\varphi - \sin\zeta.\sin\varphi) + q(\sin\zeta.\cos\varphi + \cos\zeta.\sin\varphi)$. Da $p - r = 2q.\cot\zeta = \frac{2q\cos\zeta}{\sin\zeta}$

Digitized by Google

ist, so ist der Nenner $= \frac{1}{2}(p+r) + q\left(\frac{\cos\zeta^2 \cdot \cos\varphi}{\sin\zeta} + \sin\zeta \cdot \cos\varphi\right) = \frac{1}{2}(p+r) + \frac{q}{\sin\zeta}\cos\varphi$. Folglich ist der Halbmesser der Krümmung bey der Lage des Schnittes nach (82.)

$$a = -\frac{2\sin\zeta}{(p+r)\sin\zeta + 2q\cos\varphi}.$$

Diese Formel ist ebenfalls sehr merkwürdig, weil sie zeigt, daß die Krümmung eines Elements einer Fläche ganz von der größten und kleinsten Krümmung abhängt, und dadurch für jeden Winkel φ völlig bestimmt wird.

85. Exempel. An einem Sphäroid durch Umdrehung in dem Schnitte durch einen gegebenen Punct den Halbmesser der Krümmung zu finden.

Es sey in Fig. 80. an dem daselbst abgebildeten Segment eines Sphäroids $AC = f$, $AB = AD = g$, wo f größer oder kleiner als g seyn mag. Jenes giebt ein länglichtes, dieses ein gedrucktes Sphäroid um die Axe CE. Die Coordinaten an einen Punct der Oberfläche seyn $AP = x$, $PQ = y$, $QR = z$. Nun ist $PM^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2)$, und, weil MRN ein Kreisbogen ist, $y^2 + z^2 = PM^2$, also $f^2(y^2+z^2) = g^2(f^2-x^2)$, oder

$$g^2x^2 + f^2y^2 + f^2z^2 = f^2g^2.$$

Zur Abkürzung sey $\frac{g^2}{f^2} = m$, so ist

$$mx^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

Die erste Differentialgleichung ist

$$mx\partial x + y\partial y + z\partial z = 0,$$

also $P = -\frac{mx}{z}$; $\quad Q = -\frac{y}{z}$. Hieraus werden die partiellen Differentialquotienten p, q, r auf glei-

Digitized by Google

che Art, wie in (71) für die Kugelfläche hergeleitet. Es ist nach dem Verfahren in (71.) $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = p = -\frac{m}{z} + \frac{mx}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{m}{z} - \frac{m^2x^2}{z^3}$. Ferner ist $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = q = -\frac{mxy}{z^3}$. Drittens $\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = r = -\frac{1}{z} - \frac{y^2}{z^3}$.

Oder $p = -\frac{m(g^2-y^2)}{z^3}$; $q = -\frac{mxy}{z^3}$; $r = -\frac{(y^2+z^2)}{z^3}$.

86. Nimmt man den Punct, durch welchen der Krümmungskreis gezogen werden soll, in dem Schnitte CBE, so ist $y = 0$, also $P = -\frac{mx}{z}$; $Q = 0$; $p = -\frac{mg^2}{z^3}$; $q = 0$; $r = -\frac{1}{z}$. Daher ist (79.) der Halbmesser der Krümmung

$$a = \frac{-(1+P^2)^{\frac{3}{2}}}{p.\cos\eta.\sin\vartheta)^2 + r(\sin\eta.\sin\vartheta + P\cos\vartheta)^2}.$$

Durch die Werthe von P, p, r wird

$$a = \frac{(z^2+m^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{mg^2.\cos\eta^2.\sin\vartheta^2 + z\sin\eta.\sin\vartheta - mx\cos\vartheta)^2}.$$

Aus (77.) ist für diesen Fall $\tang\vartheta = \frac{1}{P\sin\eta} = -\frac{z}{mx\sin\eta}$, oder $\sin\eta = -\frac{z}{mx}\cot\vartheta$.

87. Wenn die Ebene des Krümmungskreises durch CBE gelegt wird, so ist $\eta = 0$, $\vartheta = 90°$, und

Digitized by Google

$a = (z^2 + m^2x^2)^{\frac{3}{2}} : mg^2$. Da in diesem Falle $z^2 = g^2 - mx^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2)$ ist, wegen $m = \frac{g^2}{f^2}$, so ist

$$a = \frac{(f^4 - (f^2 - g^2)x^2)^{\frac{3}{2}}}{f^4 g}$$

welches der in (13.) gefundene Werth des Krümmungs-Halbmessers an einer Ellipse ist. Daselbst kann auch a die kleine und b die große Axe bedeuten, wenn die Abscisse x auf der kleinen Axe genommen, oder x mit y vertauscht wird.

88. Setzt man $\gamma = 90°$, so ist $\tang \vartheta = -\frac{z}{mx}$, und $\sin \vartheta^2 = \frac{z^2}{m^2x^2 + z^2}$. Der Nenner des Werthes von a in (86.) ist $= (z \sin \vartheta - mx \cos \vartheta)^2 = (z - mx \cot \vartheta)^2 \sin \vartheta^2 = \left(z + \frac{m^2x^2}{z}\right)^2 \cdot \frac{z^2}{z^2 + m^2x^2}$ $= z^2 + m^2x^2$. Folglich ist $a = (z^2 + m^2x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Der Halbmesser des Parallelkreises in M ist $= z$. Dieser geht aber nicht durch die Normale in M, oder durch den Mittelpunct der berührenden Kugel.

89. Den größten und kleinsten Krümmungs-Halbmesser an einer Ellipse zu finden.

Der Divisor in dem Werthe von a (86.) ist $= mg^2 \cos \gamma^2 . \sin \vartheta^2 + (z . \sin \gamma . \sin \vartheta - mx \cos \vartheta)^2$. Nun ist $\sin \gamma = -\frac{z}{mx} \cot \vartheta$, also der erste Theil des Divisors $= mg^2 \sin \vartheta^2 - \frac{g^2 z^2}{mx^2} . \cos \vartheta^2 = mg^2 - \frac{g^2}{mx^2}(m^2x^2 + z^2) \cos \vartheta^2$. Der zweyte Theil desselben

Digitized by Google

ist $= \frac{(z^2 + m^2x^2)^2}{m^2x^2} \cos\vartheta^2$. Folglich ist der Divisor $=$

$mg^2 + \frac{z^2 + m^2x^2}{m^2x^2}(z^2 + m^2x^2 - mg^2)\cos\vartheta^2$.

Da $z^2 = g^2 - mx^2$ ist, so ist derselbe $= mg^2$

$+ \frac{(1-m)z^2}{m^2x^2}(z^2 + m^2x^2)\cos\vartheta^2$. Ist m kleiner als 1 (für ein länglichtes Sphäroid), so ist der Werth des Divisors am kleinsten, wenn $\vartheta = 90°$, also $\eta = 0$ ist, und der größte Krümmungs-Halbmesser, oder die kleinste Krümmung gehört zu der Ellipse CBE. Ist aber m größer als 1 (für ein gedrucktes Sphäroid), so ist der Divisor am größten, wenn $\vartheta = 90°$ ist, und der kleinste Krümmungs-Halbmesser oder die größte Krümmung gehört zu der Ellipse CBE. Der Schnitt der größten Krümmung in jenem Falle und der kleinsten in diesem steht senkrecht auf CBE durch die Normale in M.

90. Den größten Werth, welchen $\cos\vartheta$ haben kann, erhält derselbe für $\eta = 90°$; wodurch $\cos\vartheta^2 = \frac{m^2x^2}{m^2x^2 + z^2}$ wird. Denn aus (86.) ist $\text{tang}\,\vartheta = -\frac{z}{mx\sin\eta}$. Folglich ist der Winkel ϑ am kleinsten, wenn $\eta = 90°$ ist, wodurch $\cos\vartheta$ am größten ist.

91. Der Halbmesser des Krümmungskreises an der Ellipse CBE ist $= \frac{(z^2 + m^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{mg^2}$, nach (87.). Für den auf diese senkrechten Schnitt ist $\eta = 90°$ (Ebene, 22), also der Halbmesser des Krümmungskreises $= (z^2 + m^2x^2)^{\frac{1}{2}}$, (88.). Es verhält sich also jener zu diesem, wie $z^2 + m^2x^2 : mg^2$, oder wie $z^2 + m^2x^2 : m^2f^2$.

An dem Scheitelpuncte C ist $z = 0$, und $x = f$, also sind hier beide Krümmungs-Halbmesser einander gleich.

Digitized by Google

so wie alle zwischen ihnen liegenden. An dem Puncte B ist $x = o$, und $z = g$, daher das Verhältniß $= 1 : m = f^2 : g^2 = \frac{f^2}{g} : g$. Hier ist $\frac{f^2}{g}$ der Krümmungs-Halbmesser an der Ellipse in B (15.), da g der Halbmesser des auf CBE senkrechten Kreises ist.

92. Diese Untersuchung findet ihre Anwendung in der höhern mathematischen Geographie. Wenn die Länge eines Bogens von einem Grade oder sonst eines bestimmten Winkels, sowohl auf dem elliptischen Meridian, als in einem darauf senkrechten Bogen in der Ebene durch die Normale gemessen wird, so läßt sich daraus das Verhältniß der beiden Axen herleiten.

93. Wenn nämlich statt der Coordinaten x und z die geographische Breite ω des Ortes eingeführt wird, so ist $z^2 = \frac{g^4}{g^2 + f^2 \tang \omega^2}$, zufolge der Rechnung in (16.), wenn die Bezeichnungen gehörig vertauscht werden, da a, b, x, y dort hier g, f, z, x sind. Setzt man für g^2 den Ausdruck mf^2, so ist $z^2 = \frac{m^2 f^2}{m + \tang \omega^2}$. Da $mx^2 = g^2 - z^2$ ist, so ist $z^2 + m^2 x^2 = mg^2 + (1 - m) z^2 = m^2 f^2 + \frac{(1 - m) m^2 f^2}{m + \tang \omega^2} = \frac{m^2 f^2 (1 + \tang \omega^2)}{m + \tang \omega^2}$, und das Verhältniß der beiden Halbmesser der Krümmung auf der Ellipse CBE und dem darauf senkrechten Schnitte ist $= 1 + \tang \omega^2 : m + \tang \omega^2$. Ist jenes Verhältniß durch Messung bekannt, so wird m dadurch bestimmt.

Geschichte dieser Lehre.

94. Über den Durchschnittspunct zweyer Normalen an den Kegelschnitten hat Apollonius in dem 5ten Buche seines Werks über diese Linien Untersuchungen angestellt. Doch kann er nur die Winkelfläche angeben, in welcher dieser Punct liegt, 40ster Satz. Er zeigt (49. S.),

Digitized by Google

ist $= \frac{(z^2 + m^2x^2)^3}{m^2x^2} \cos\vartheta^2$. Folglich ist der Divisor $=$

$mg^2 + \frac{z^2 + m^2x^2}{m^2x^2}(z^2 + m^2x^2 - mg^2)\cos\vartheta^2$.

Da $z^2 = g^2 - mx^2$ ist, so ist derselbe $= mg^2 + \frac{(1-m)z^2}{m^2x^2}(z^2 + m^2x^2)\cos\vartheta^2$. Ist m kleiner als 1 (für ein länglichtes Sphäroid), so ist der Werth des Divisors am kleinsten, wenn $\vartheta = 90°$, also $\eta = 0$ ist, und der größte Krümmungs-Halbmesser, oder die kleinste Krümmung gehört zu der Ellipse CBE. Ist aber m größer als 1 (für ein gedrucktes Sphäroid), so ist der Divisor am größten, wenn $\vartheta = 90°$ ist, und der kleinste Krümmungs-Halbmesser oder die größte Krümmung gehört zu der Ellipse CBE. Der Schnitt der größten Krümmung in jenem Falle und der kleinsten in diesem steht senkrecht auf CBE durch die Normale in M.

90. Den größten Werth, welchen $\cos\vartheta$ haben kann, erhält derselbe für $\eta = 90°$; wodurch $\cos\vartheta^2 = \frac{m^2x^2}{m^2x^2 + z^2}$ wird. Denn aus (86.) ist $\tang\vartheta = -\frac{z}{mx\sin\eta}$. Folglich ist der Winkel ϑ am kleinsten, wenn $\eta = 90°$ ist, wodurch $\cos\vartheta$ am größten ist.

91. Der Halbmesser des Krümmungskreises an der Ellipse CBE ist $= \frac{(z^2 + m^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{mg^2}$, nach (87.). Für den auf diese senkrechten Schnitt ist $\eta = 90°$ (Ebene, 22), also der Halbmesser des Krümmungskreises $= (z^2 + m^2x^2)^{\frac{1}{2}}$, (88.). Es verhält sich also jener zu diesem, wie $z^2 + m^2x^2 : mg^2$, oder wie $z^2 + m^2x^2 : m^2f^2$.

An dem Scheitelpuncte C ist $z = 0$, und $x = f$, also sind hier beide Krümmungs-Halbmesser einander gleich.

Digitized by Google

so wie alle zwischen ihnen liegenden. An dem Puncte B ist $x = o$, und $z = g$, daher das Verhältniß $= 1 : m = f^2 : g^2 = \frac{f^2}{g} : g$. Hier ist $\frac{f^2}{g}$ der Krümmungs-Halbmesser an der Ellipse in B (15.), da g der Halbmesser des auf CBE senkrechten Kreises ist.

92. Diese Untersuchung findet ihre Anwendung in der höhern mathematischen Geographie. Wenn die Länge eines Bogens von einem Grade oder sonst eines bestimmten Winkels, sowohl auf dem elliptischen Meridian, als in einem darauf senkrechten Bogen in der Ebene durch die Normale gemessen wird, so läßt sich daraus das Verhältniß der beiden Axen herleiten.

93. Wenn nämlich statt der Coordinaten x und z die geographische Breite ω des Ortes eingeführt wird, so ist $z^2 = \frac{g^4}{g^2 + f^2 \operatorname{tang} \omega^2}$, zufolge der Rechnung in (16.), wenn die Bezeichnungen gehörig vertauscht werden, da a, b, x, y dort hier g, f, z, x sind. Setzt man für g^2 den Ausdruck mf^2, so ist $z^2 = \frac{m^2 f^2}{m + \operatorname{tang} \omega^2}$. Da $mx^2 = g^2 - z^2$ ist, so ist

$$z^2 + m^2 x^2 = mg^2 + (1 - m) z^2 = m^2 f^2 + \frac{(1 - m) m^2 f^2}{m + \operatorname{tang} \omega^2} = \frac{m^2 f^2 (1 + \operatorname{tang} \omega^2)}{m + \operatorname{tang} \omega^2},$$

und das Verhältniß der beiden Halbmesser der Krümmung auf der Ellipse CBE und dem darauf senkrechten Schnitte ist $= 1 + \operatorname{tang} \omega^2 : m + \operatorname{tang} \omega^2$. Ist jenes Verhältniß durch Messung bekannt, so wird m dadurch bestimmt.

Geschichte dieser Lehre.

94. Über den Durchschnittspunct zweyer Normalen an den Kegelschnitten hat Apollonius in dem 5ten Buche seines Werks über diese Linien Untersuchungen angestellt. Doch kann er nur die Winkelfläche angeben, in welcher dieser Punct liegt, 40ster Satz. Er zeigt (49. S.),

Digitized by Google

daß von einem Puncte der Axe, der um weniger als den halben Parameter von dem Scheitel entlegen ist, keine Normalen (rectae minimae) unter einem spitzen Winkel an einen Kegelschnitt sich ziehen lassen. Dieses würde darauf führen, daß derjenige Punct auf der Axe, welcher um den halben Parameter von dem Scheitel absteht, die Gränze der Durchschnittspuncte der Normalen mit der Axe ist.

In der Lehre von der Evolution der krummen Linien, welche Huygens zuerst vorgetragen hat, lag der Grund zur Bestimmung des Halbmessers der Krümmung, da die Evolute der geometrische Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise ist. Huygens zeigte zwar, oder vielmehr suchte zu zeigen, wie zu jeder krummen Linie die Evolute gefunden wird, Horol. oscill. P. III. Prop. XI. Allein er findet nichts allgemeines, ungeachtet er auf neun Seiten sich darüber verbreitet.

Jakob Bernoulli ist, so viel ich finden kann, der Erfinder unserer Formeln für den Krümmungs-Halbmesser. In einem Aufsatze in den Actis Erud. Ian. 1691; Opp. T. I. Nr. 41. Specimen calculi differentialis, handelt er von der Abwickelung der krummen Linien, und giebt daselbst folgende Formel für den Halbmesser der Krümmung, worin x die Abscisse, y die Ordinate, q die Subtangente ist: $r = \frac{(y\partial y + q\partial x)\sqrt{(qq+yy)}}{y\partial q - q\partial y}$. Man bemerke, daß $q = \frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{y}{p}$, und $\partial q = \frac{p\partial y - y\partial p}{pp}$ ist, so wird $r = -\frac{(p\partial y + \partial x)\sqrt{(1+pp)}}{\partial p} = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$. Im J. 1694. A. E. Jun. Opp. T. I. Nr. 58. gab er bequemere Formeln, gerade die (8. 10.), die er auf eine leichte Art findet. Zugleich liefert er eine Formel für Ordinaten, die aus einem Puncte gezogen sind, so fern eines der Differentiale, ∂x, ∂y, ∂s

Digitized by Google

konstant gesetzt wird. Es ist x ein Kreisbogen, der zur Abseisse dient. Diese giebt er als eine neue an, welche auch seinem Bruder noch nicht bekannt sey. Cramer, der Herausgeber von Jak. Bernoulli's Werken, hat einen Beweis beygefügt, der aber sehr lang und ermüdend ist. Bernoulli gebraucht neben dem Ausdruck, radius circuli osculatoris, auch den, longitudo fili evolventis.

Den Gedanken, die Krümmung einer Curve durch den Kreis zu messen, hat Leibnitz zuerst gehabt. In dem Aufsatze, de natura anguli contactus et osculi, A. Er. 1686; Opp. T. III. Nr. 18. sagt er, so wie die gerade Linie die geschickteste ist, die Richtung einer Curve in einem Puncte zu bestimmen, so sey der Kreis am geschicktesten, die Krümmung (flexuram) zu bestimmen, weil der Kreis allenthalben dieselbe Krümmung hat. Ein Kreis osculire eine Curve, wie er es nenne, wenn der Berührungswinkel am allerkleinsten (minimus) ist. Denn unter den unendlich vielen Kreisen, welche eine krumme Linie, die mit ihr nach derselben Gegend hin hohl ist, berühren, gebe es immer einen, welcher jener Linie am gleichartigsten ist (assimilatur) und am längsten bey ihr bleibt, oder, um geometrisch zu reden, ihr so nahe kommt, daß zwischen diesem Kreise und der Curve kein anderer Kreisbogen durch den gegebenen Punct gezogen werden möge. Diesen allerkleinsten Berührungswinkel nenne er den angulus osculi, so wie der kleinste Winkel einer geraden Linie mit einer Curve der angulus contactus genennet werde. Er erwähnt sogar schon der Osculationen höherer Grade, als die von einem Kreise. Darin irrte der weit sehende Mann, daß er die einfache Osculirung als eine Vereinigung von vier Durchschnittspuncten ansah, und so auch bey höhern Osculationen die Anzahl der zusammenfließenden Durchschnittspuncte in gerader Zahl annahm. Jakob Bernoulli machte dagegen Erinnerungen, A. Er. 1692. Mart. Opp. T. I. Nr. 47, wogegen Leibnitz einiges erwiederte, Opp. T. I. Nr. 38. Bald darauf aber erkannte er sein Versehen, welches er in einem Briefe an Joh. Bernoulli bezeugte (Comm. epist. T. I.

Digitized by Google

p. 83), und auch in den Act. Erud. 1695. Aug. p. 371 gelegentlich anführte.

Die Verlegung der Abscissen auf die Normale (35.) gebraucht Jakob Bernoulli, Opp. T. II. Nr. 103. art. 22. Seine Rechnung ist aber weitläufiger als die meinige.

Die schwerere Untersuchung über die Krümmung krummer Flächen hat Euler zuerst vorgenommen, in den Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760. Seine Methode ist deutlich, aber weitläufig, da er zuerst die Gleichung für einen Schnitt der Fläche sucht, und in dieser den Halbmesser der Krümmung nach der Formel für einfach krumme Linien bestimmt. Er führt darauf den Winkel ein, welchen irgend ein Schnitt mit demjenigen macht, der durch die Normale auf die Ebene der x senkrecht gestellt ist. Die merkwürdigen Sätze (83. 84.) hat Euler entdeckt, nur ist der Weg dazu etwas mühsam.

La Grange behandelt in seiner Théorie des fonctions analytiques, nr. 151 — 155. die Untersuchung nach einer andern Methode, da er die osculirende Kugel an einer krummen Fläche bestimmt. Sein Vortrag ist sehr kurz, und bedarf noch Erläuterungen. Ich habe zuerst den Weg eingeschlagen, den dieser große Analyst vorgezeichnet hat, habe aber weiterhin (von 73. an) der Formel für den Halbmesser der Krümmung eine bequemere Gestalt gegeben, und besonders die Sätze (83. 84.) auf eine leichte Art bewiesen.

Meusnier gab im J. 1776 bey der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung über die Krümmung der Flächen ein, welche in den Mémoires présentés, T. X. befindlich ist. Er geht von der Idee aus, daß die Krümmung einer Fläche darin bestehe, daß die Lage der berührenden Ebene von Punct zu Punct sich ändert; die Krümmung eines Elements der Fläche hänge also von der Formel ab, welche die Veränderung der berührenden Ebene in dem Raume (étendue) dieses Elements ausdruckt; und diese Formel von den Differentialgleichungen des ersten und zweyten Grades; eine Fläche berühre also eine andere, wenn sie dieselbe Gleichung des zweyten Gra-

Digitized by Google

des wie dieß hat. Bey diesen Ausdrücken möchte einiges zu erinnern seyn.

Man vergleiche auch noch die Differential- und Integralrechnung von la Croix, Nr. 326. ff. Cousins Werk über dieselben, Nr. 252. ff. Monge feuilles d'Analyse, Nr. 17.

Zusatz nach 10. des obigen Artikels.

Die Coordinaten zu dem Mittelpuncte des Krümmungskreises durch die ersten und zweyten Differentiale zu bestimmen.

Die endliche Gleichung, und die beiden Differentialgleichungen sind:

I. $(a-x)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

II. $(a-x)\partial x = (y-b)^2\,\partial y$.

III. $(a-x)\partial^2 x - \partial x^2 = (y-b)\,\partial^2 y + \partial y^2$.

Die Gleichungen II. und III. geben

IV. $(a-x)(\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y) = \partial y\,\partial s^2$.

V. $(y-b)(\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y) = \partial x\,\partial s^2$.

Oder VI. $(a-x).\partial\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{\partial s^2}{\partial y}$,

VII. $(b-y).\partial\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial s^2}{\partial x}$.

Also ist

$$a = x + \frac{\partial s^2}{\partial y.\partial(\partial x:\partial y)}.$$

$$b = y + \frac{\partial s^2}{\partial x.\partial(\partial y:\partial x)}.$$

Oder

$$a = x - p(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p},$$

$$b = y + (1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p}.$$

Digitized by Google

Mittelst der Werthe von $a - x$ und $y - b$ ergiebt sich der Werth von r.

Kugel ist ein Körper, auf dessen Oberfläche alle Puncte gleich weit von einem Puncte innerhalb desselben entfernt sind.

Dieser Punct heißt der Mittelpunct der Kugel; der Abstand eines Punctes der Oberfläche heißt der Halbmesser der Kugel; die gerade Linie durch den Mittelpunct bis zu zwey entgegengesetzten Puncten der Oberfläche heißt der Durchmesser.

1. Eine Ebene durch den Mittelpunct theilt die Kugel in zwey gleiche und ähnliche Theile, eine andere Ebene in ungleiche, desto ungleichere, je größer der Abstand des Mittelpunctes von der Ebene ist. Alles dieses ist den Eigenschaften des Kreises analog.

2. Man lasse einen Kreis sich um einen seiner Durchmesser drehen, bis daß die eine Hälfte in die Lage der andern gekommen ist, so beschreibt der Umfang des Kreises die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser eben derselbe mit dem des Kreises ist.

3. Der Durchschnitt der Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis, ein größter, wenn der Schnitt durch den Mittelpunct geführt ist, ein kleinerer, wenn der Schnitt eine andere Lage hat. — Denn in dem erstern Falle sind alle Puncte der Durchschnittslinie gleich weit von dem Mittelpuncte entfernt, also ist die Figur ein Kreis. In dem andern Falle ziehe man eine senkrechte von dem Mittelpuncte auf die schneidende Ebene, und irgend einen Halbmesser, so entsteht zwischen diesen beiden geraden Linien, und der geraden durch den Grundpunct der senkrechten und den Punct der Oberfläche, ein rechtwinkliges Dreyeck, welches für jeden Punct der Oberfläche in der Durchschnittslinie auf der Kugelfläche dasselbe ist. Daher ist diese Durchschnittslinie ein Kreis, dessen Halbmesser die Kathete ist, welche dem Mittelpuncte gegen über liegt. — Setzt man den Halbmesser der Kugel $= a$; die senk-

Digitized by Google

rechte aus dem Mittelpuncte auf die schneidende Ebene $= b$, so ist der Halbmesser des Schnittes $= \sqrt{(aa - bb)}$.

Umgekehrt, die senkrechte auf einen kleinern Kreis durch den Mittelpunct desselben geht durch den Mittelpunct der Kugel.

4. Die entgegengesetzten Puncte eines Durchmessers nennt man die Pole aller der Kreise, deren Ebenen auf den Durchmesser senkrecht sind. Sie sind von dem Umfange des größten unter ihnen jeder gleich weit entfernt, von dem Umfange eines kleinern ungleich. Die Entfernung mag man nach einer geraden Linie nehmen, oder nach einem Kreisbogen, dessen Ebene durch jenen Durchmesser geht.

5. Der Durchmesser durch die Pole heißt die Axe aller der Kreise, auf deren Ebenen dieser Durchmesser senkrecht ist.

6. Die kleinern Kreise heißen Parallelkreise in Beziehung auf den größten Kreis, mit welchem sie parallel sind, oder gemeinschaftliche Pole haben.

Legt man durch die Pole zwey Kreise, so verhalten sich die zwischen denselben enthaltenen Bogen des größten und der kleinern auf die Axe senkrechten Kreise, wie ihre Halbmesser. Denn die Winkel der Halbmesser durch die Endpuncte der Bogen sind jeder gleich dem Neigungswinkel der Ebenen der beiden durch die Axe gelegten Kreise, da sie mit derselben rechte Winkel machen (Ebene, 4.). Bey gleichen Winkeln am Mittelpuncte verhalten sich aber die Bogen wie die Halbmesser.

Man druckt den Satz auch so aus: Die Bogen der Parallelkreise zwischen zwey durch ihre Pole gelegten großen Kreisen verhalten sich wie die Sinus ihrer Bogenabstände von dem Pole, oder wie die Cosinus der Bogenabstände von ihrem größten Kreise.

7. Der Bogen eines größten Kreises zwischen zwey Puncten auf einer Kugelfläche ist kleiner als der Bogen eines kleinern Kreises zwischen denselben Puncten, wenn beide kleiner als ihre Halbkreise sind.

Digitized by Google

Dieses läßt sich leicht folgendergestalt einsehen. Man drehe die Ebene des kleinern Kreises um die mit dem Bogen des größten Kreises gemeinschaftliche Chorde, bis sie in die Ebene des letztern fällt. Dadurch wird die Größe des Bogens auf jenem nicht geändert. Der Bogen des größten Kreises liegt nun zwischen der gemeinschaftlichen Chorde und dem Bogen des kleinern Kreises, nähert sich also der Chorde mehr als jener, und ist daher kleiner als derselbe, da die Chorde die kleinste unter allen durch die zwey Puncte gezogenen Linien ist.

Daß von zwey nach einer Gegend hin concaven, durch dieselben zwey Puncte gezogenen, krummen Linien diejenige, welche von der andern und der geraden durch dieselben Puncte eingeschlossen wird, kleiner ist als die einschließende, hat Archimedes als einen Grundsatz angenommen, in dem Vorberichte zu der Abhandlung von Kugel und Cylinder.

Einen andern Beweis kann man darauf gründen, daß in demselben Kreise der größere Bogen zu seiner Chorde ein größeres Verhältniß hat, als der kleinere Bogen zu seiner Chorde; das ist, daß der Quotient eines Bogens durch seine Chorde größer wird, wenn der Bogen zunimmt. Der Beweis dieses Satzes wird in dem Artikel, Sinus, vorkommen.

Es stellt Fig. 96. einen Theil der Oberfläche einer Kugel vor, auf welcher AMNB ein Bogen eines größten Kreises durch die Puncte M, N ist, und DMN ein kleinerer durch dieselben gezogener Kreis ist. Der Mittelpunct des letztern sey C, innerhalb der Kugel. Aus diesem beschreibe man in der Ebene desselben mit dem Halbmesser CE, welcher demjenigen der Kugel gleich ist, einen Kreis, der von den geraden CM, CN in E und F geschnitten wird. Man ziehe die geraden MN, EF. Wegen CM = CN und CE = CF sind die Dreyecke MCN, ECF sich ähnlich, und EF ist parallel mit MN. Wegen der gleichen Mittelpuncts-Winkel ECF, MCN sind die Bogen EKF, MGN sich ähnlich, und es ist MGN:EKF = CM:CE. Nun ist EKF : EF >

Digitized by Google

MHN : MN, oder EKF : MHN > EF : MN, das ist, EKF : MHN > CE : CM. Durch die Zusammensetzung der Verhältnisse in dieser und der zuerst gefundenen Proportion ist MGN : MHN > 1 : 1, das ist MGN > MHN.

Diesen Beweis giebt Maginus in seinen Erläuterungen des ersten Buchs der Geographie des Ptolemäus.

8. Ist der Bogen auf der Kugelfläche eine gedoppelt krumme Linie, so wird derselbe von einem Puncte beschrieben, welche die durch seine Richtung und den Mittelpunct der Kugel gelegte Ebene stetig ändert, dagegen der Punct, welcher den Bogen eines grösten Kreises beschreibt, immer in derselben Ebene in Beziehung auf den Mittelpunct verharret. Der Weg jenes zwischen zwey gegebenen Puncten ist daher offenbar länger als der Weg des letztern, eben so wie eine krumme Linie zwischen zwey Puncten länger ist als die gerade zwischen denselben.

9. Eine Ebene, welche durch einen Punct einer Kugelfläche senkrecht auf den Halbmesser daselbst gesetzt ist, berührt die Kugel. — Offenbar ist der Halbmesser hier die kürzeste aller Linien, welche von dem Mittelpuncte an die Ebene gezogen werden.

Umgekehrt, der Halbmesser steht auf die berührende Ebene in dem Berührungspuncte senkrecht.

10. Zwey Ebenen berühren eine Kugel; ihr Winkel wird von der Ebene durch ihre Durchschnittslinie und den Mittelpunct der Kugel halbirt.

Denn die Ebene durch den Mittelpunct und die Berührungspuncte steht senkrecht auf beide berührende Ebenen; deren Durchschnitt also senkrecht auf jene. Der Winkel beider Ebenen ist dem Winkel ihrer Durchschnittslinien mit jener Ebene gleich. Dieser wird von der geraden aus dem Mittelpuncte an den Winkelpunct halbirt; daher auch der Winkel der Ebenen von der Ebene durch den Mittelpunct und ihre Durchschnittslinie.

11. Zwey Kugeln, die sich einander berühren, haben ihre Mittelpuncte mit dem Berührungspuncte in ei-

Digitized by Google

ner geraden Linie, und in demselben eine gemeinschaftliche berührende Ebene.

Die Berührung ist entweder eine äußere, oder eine innere. In dem erstern Falle ist der Abstand der Mittelpuncte so groß als möglich, in dem andern so klein als möglich. Daher kann der einzige gemeinschaftliche Punct nicht außer der Linie durch die Mittelpuncte liegen, s. Kreis, 16.

Da die berührende Ebene auf die Halbmesser senkrecht steht, so ist sie dieselbe für beide Kugeln.

Lagen der Kreise auf einer Kugelfläche gegen einander.

12. Zwey größte Kreise auf einer Kugelfläche halbiren sich einander. Denn da sie durch den Mittelpunct der Kugel gehen, so schneiden sie sich in einem Durchmesser, welcher auch der ihrige ist.

13. Ein größter und ein kleinerer Kreis, oder zwey kleinere theilen sich gegenseitig ungleich.

14. Der Winkel zweyer größten Kreise ist einerley mit dem Neigungswinkel ihrer Ebenen. Denn der Winkel zweyer krummen Linien kann nur durch den Winkel ihrer geraden berührenden an dem Durchschnittspuncte gemessen werden. Diese stehen hier senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchmesser, und liegen jede in der Ebene des zugehörigen Kreises; sie messen also durch ihren Winkel den Neigungswinkel beider Ebenen (Ebene, 4.), welcher daher mit dem Winkel der Bogen derselbe ist.

15. Nimmt man auf den beiden Kreisen von dem Durchschnittspuncte an einen Quadranten, so steht der gemeinschaftliche Durchmesser in den Durchschnittspuncten senkrecht auf die Ebene des größten Kreises durch die Endpuncte der Quadranten, und die Durchschnittspuncte der beiden Kreise sind die Pole dieses großen Kreises. — Der Bogen zwischen den Endpuncten der Quadranten ist das Maaß des Winkels der beiden Kreisbogen. Denn er ist das Maaß des Winkels, welchen zwey auf den Durchschnitt ihrer Ebenen senkrechte mit einander machen.

Digitized by Google

z. B. der Winkel des Aequators mit der Ekliptik wird gemessen durch den Bogen des Colurus der Sonnenstillstandspuncte zwischen beiden Kreisen. Die Nachtgleichenpuncte sind die Pole dieses Kreises; der Stillstandspunct ist 90° von jenen entfernt, und der Punct des Äquators, wo er von dem Colurus geschnitten wird, ebenfalls.

16. Drey größte Kreise, die sich je zwey in drey verschiedenen Richtungen schneiden, bilden auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreyeck. Zieht man von den Winkelpuncten die Halbmesser, so entsteht eine dreykantige Pyramide, deren Grundfläche ein Stück einer Kugelfläche ist.

In Fig. 97. sind ABD, ACD zwey Halbkreise, deren Mittelpunct O, Durchschnitt AOD ist. Durch BO und CO ist die dritte Kreisebene gelegt, auf welcher BC ein Kreisbogen durch die Puncte B, C ist. So ist ABC ein sphärisches Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel. Die Seiten AB, AC, BC sind die Maaßen der zugehörigen Winkel, AOB, AOC, BOC, und werden daher durch diese Winkel angegeben. Die Winkel BAC, ABC, ACB, unter welchen die Bogen sich schneiden, sind die Winkel der Ebenen ihrer Kreise. Der Halbmesser der Kugel sey welcher es sey, so verändert die Größe desselben nichts in der Bestimmung der Seiten, als Maaßen von Winkeln zweyer geraden Linien, und der Winkel der Bogen oder ihrer Ebenen.

17. Anstatt des Dreyecks ABC kann man auch das Nebendreyeck DBC nehmen, worin die Lage der Ebenen gegen einander dieselbe wie in jenem ist, zwey Seiten aber die Complemente zum Halbkreise von den Seiten an A geworden sind. Auch in dem Dreyecke DBC ist die Lage der Kreisebenen nicht verändert. Auf der halben Kugelfläche sind vier Nebendreyecke mit einem gemeinschaftlichen Winkelpuncte, zwey und zwey mit gleichen Verticalwinkeln, wie die Winkel zweyer geraden sich schneidenden Linien. Auf der andern Hälfte der Kugelfläche sind eben diese Dreyecke vorhanden. — Anstatt einer Seite kann man auch das Complement zum ganzen Kreise nehmen.

Digitized by Google

ner geraden Linie, und in demselben eine gemeinschaftliche berührende Ebene.

Die Berührung ist entweder eine äußere, oder eine innere. In dem erstern Falle ist der Abstand der Mittelpuncte so groß als möglich, in dem andern so klein als möglich Daher kann der einzige gemeinschaftliche Punct nicht außer der Linie durch die Mittelpuncte liegen, s. Kreis, 16.

Da die berührende Ebene auf die Halbmesser senkrecht steht, so ist sie dieselbe für beide Kugeln.

Lagen der Kreise auf einer Kugelfläche gegen einander.

12. Zwey größte Kreise auf einer Kugelfläche halbiren sich einander. Denn da sie durch den Mittelpunct der Kugel gehen, so schneiden sie sich in einem Durchmesser, welcher auch der ihrige ist.

13. Ein größter und ein kleinerer Kreis, oder zwey kleinere theilen sich gegenseitig ungleich.

14. Der Winkel zweyer größten Kreise ist einerley mit dem Neigungswinkel ihrer Ebenen. Denn der Winkel zweyer krummen Linien kann nur durch den Winkel ihrer geraden berührenden an dem Durchschnittspuncte gemessen werden. Diese stehen hier senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchmesser, und liegen jede in der Ebene des zugehörigen Kreises; sie messen also durch ihren Winkel den Neigungswinkel beider Ebenen (Ebene, 4.), welcher daher mit dem Winkel der Bogen derselbe ist.

15. Nimmt man auf den beiden Kreisen von dem Durchschnittspuncte an einen Quadranten, so steht der gemeinschaftliche Durchmesser in den Durchschnittspuncten senkrecht auf die Ebene des größten Kreises durch die Endpuncte der Quadranten, und die Durchschnittspuncte der beiden Kreise sind die Pole dieses großen Kreises. — Der Bogen zwischen den Endpuncten der Quadranten ist das Maaß des Winkels der beiden Kreisbogen. Denn er ist das Maaß des Winkels, welchen zwey auf den Durchschnitt ihrer Ebenen senkrechte mit einander machen.

Digitized by Google

Z. B. der Winkel des Aequators mit der Ekliptik wird gemessen durch den Bogen des Colurus der Sonnenstillstandspuncte zwischen beiden Kreisen. Die Nachtgleichenpuncte sind die Pole dieses Kreises; der Stillstandspunct ist 90° von jenen entfernt, und der Punct des Äquators, wo er von dem Colurus geschnitten wird, ebenfalls.

16. Drey größte Kreise, die sich je zwey in drey verschiedenen Richtungen schneiden, bilden auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreyeck. Zieht man von den Winkelpuncten die Halbmesser, so entsteht eine dreykantige Pyramide, deren Grundfläche ein Stück einer Kugelfläche ist.

In Fig. 97. sind ABD, ACD zwey Halbkreise, deren Mittelpunct O, Durchschnitt AOD ist. Durch BO und CO ist die dritte Kreisebene gelegt, auf welcher BC ein Kreisbogen durch die Puncte B, C ist. So ist ABC ein sphärisches Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel. Die Seiten AB, AC, BC sind die Maaßen der zugehörigen Winkel, AOB, AOC, BOC, und werden daher durch diese Winkel angegeben. Die Winkel BAC, ABC, ACB, unter welchen die Bogen sich schneiden, sind die Winkel der Ebenen ihrer Kreise. Der Halbmesser der Kugel sey welcher es sey, so verändert die Größe desselben nichts in der Bestimmung der Seiten, als Maaßen von Winkeln zweyer geraden Linien, und der Winkel der Bogen oder ihrer Ebenen.

17. Anstatt des Dreyecks ABC kann man auch das Nebendreyeck DBC nehmen, worin die Lage der Ebenen gegen einander dieselbe wie in jenem ist, zwey Seiten aber die Complemente zum Halbkreise von den Seiten an A geworden sind. Auch in dem Dreyecke DBC ist die Lage der Kreisebenen nicht verändert. Auf der halben Kugelfläche sind vier Nebendreyecke mit einem gemeinschaftlichen Winkelpuncte, zwey und zwey mit gleichen Verticalwinkeln, wie die Winkel zweyer geraden sich schneidenden Linien. Auf der andern Hälfte der Kugelfläche sind eben diese Dreyecke vorhanden. — Anstatt einer Seite kann man auch das Complement zum ganzen Kreise nehmen.

Digitized by Google

In der Astronomie kommen häufig sphärische Dreyecke vor, in welchen zwey Seiten größer als ein Halbkreis sind. Bey der Berechnung zeigt oft die positive oder negative Beschaffenheit der goniometrischen Größen, wie die Winkel oder Bögen beschaffen sind. Es kann aber auch unbestimmt bleiben, wie sie zu nehmen sind.

18. In rechtwinkligen sphärischen Dreyecken ist es leicht entschieden, ob die Winkel spitz oder stumpf sind. Es sey A B C (Fig. 98.) ein bey A rechtwinkliges sphärisches Dreyeck, das ist, der Winkel der Kreisebenen durch A B und A C sey ein rechter Winkel. Man vollende den Bogen A C zum ganzen Kreise A D E F A, und A B zum Halbkreise A B E. Ferner nehme man A D gleich einem Quadranten, A D G größer als A D, so wie A C kleiner ist. Die Seite A B mag kleiner oder größer als ein Quadrant seyn. Man ziehe die Bogen D B, G B. Da der Durchmesser durch D senkrecht auf die Ebene von A B E steht (Ebene, 25.), so ist der W. A B D ein rechter, (das 21.), also A B C spitz, und A B G stumpf. — Folglich ist in einem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck der Winkel, welcher einer Kathete gegen über liegt, spitz, oder ein rechter, oder stumpf, nachdem die gegen über stehende Kathete kleiner, oder so groß, oder größer als ein Quadrant ist. Umgekehrt gilt der Satz auch.

19. Die Hypotenuse eines rechtwinkligten sphärischen Dreyecks ist kleiner als ein Quadrant, wenn beide Katheten kleiner oder größer als ein solcher sind. Sie ist ein Quadrant, wenn eine der Katheten es ist. Sie ist größer, wenn eine Kathete kleiner, die andere größer als ein Quadrant ist. — Es seyn (Fig. 98.) B A C, B A D B A G bey A rechtwinkligte sphärische Dreyecke, in welchen A D ein Quadrant, A C kleiner, A G größer als ein solcher ist. Auch sey A B kleiner als ein Quadrant. Man lege durch D den Kreis, zu welchem B der Pol ist. Dieser steht auf die Ebene des Bogens B D senkrecht, und geht, da A D B spitz ist, zwischen B D und E D durch, trifft also den durch B und C darauf gezogenen, und darauf senkrechten Kreis jenseits A D E, den Bogen B G aber

Digitized by Google

zwischen B und G. Folglich ist BC kleiner als ein Quadrant, und BG größer, so wie BD selbst ein Quadrant ist. Die Hypotenuse BC gehört zu zwey Dreyecken mit gleichnamigen Katheten, die BG zu zwey Dreyecken mit ungleichnamigen; BD zu Dreyecken, in welchen eine Kathete ein Quadrant ist.

20. Die sphärischen Dreyecke werden wie die geradlinigen in rechtwinkligte und schiefwinkligte unterschieden. Die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über steht, heißt auch hier die Hypotenuse, die beiden anliegenden die Katheten. Wenn eine der Katheten ein Quadrant ist, so ist ihr einer Endpunct der Pol der andern Kathete, und das Dreyeck hat an dieser Kathete zwey rechte Winkel. Der gegen über liegende Winkel kann ein spitzer, ein rechter, oder stumpfer seyn. — Auch werden die Dreyecke mit einer Seite, die ein Quadrant ist, von den andern unterschieden. — Was gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige sphärische Dreyecke sind, ergiebt die Benennung.

21. Ein sphärisches Dreyeck wird durch drey Bestimmungsstücke, es mögen Seiten oder Winkel seyn, gegeben, zwey Fälle ausgenommen.

I. Wenn (Fig. 97.) die Seiten AB, AC, nebst dem W. BAC gegeben sind, so sind die Endpuncte des Bogens BC gegeben, das ist der Winkel BOG, am Mittelpuncte der Kugel, nebst der Lage der Ebene BOC.

II. Wenn die beiden Winkel A, B nebst der Seite AB (d. i. der W. AOB) gegeben werden, so ist die Lage der Ebenen AOC, BOC, also ihr Durchschnitt OC, und ihr Winkel C gegeben.

III. Wenn drey Seiten (d. i. die drey Winkel bey O) gegeben werden, so sind die drey Winkel bestimmt. Denn die Chorden der Seiten machen ein einziges gegebenes Dreyeck aus; daher auch die zugehörigen Bogen. — Euklides zeigt in seinen Elementen XI. 23. wie aus drey Flächenwinkeln der körperliche Winkel zusammen gesetzt wird.

Digitized by Google

IV. Durch die drey Winkel eines sphärischen Dreyecks sind auch die Seiten desselben bestimmt; d. i. durch die Winkel dreyer Ebenen werden auch ihre Durchschnittslinien bestimmt. Dieses beruht darauf, daß zwey Ebenen, die mit einer dritten gegebene Winkel machen, den Winkel ihrer Durchschnittslinien nicht ändern können, ohne ihren Neigungswinkel gegen einander zu ändern, welches weiterhin (32.) gezeigt werden wird.

V. Sind zwey Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel gegeben, so lassen sich daraus zwey verschiedene Dreyecke bilden. Dieses läßt sich auf dieselbe Art wie bey geradlinigen Dreyecken zeigen.

VI. Sind zwey Winkel und eine nicht eingeschlossene Seite gegeben, so sind durch diese Bestimmungen auch zwey verschiedene Dreyecke möglich. Dieses wird im folgenden (33.) bewiesen. Die Sätze sollten hier nur zur Übersicht neben einander gestellt werden.

22. In einem gleichschenkligen sphärischen Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich und umgekehrt.

Es sey in dem Dreyecke ABC (Fig. 99.) AB = AC. Man nehme willkürlich AD = AE, und ziehe die Bogen CD, BE, so sind die Dreyecke ABE, ACD einander gleich, daher auch die Dreyecke CBE, BCD. In jenen sind die Winkel ABE, ACD gleich, in diesen die Winkel CBE, BCD, woraus die Gleichheit der Winkel ABC, ACB folgt.

23. Sind die Winkel ABC, ACB sich gleich, so nehme man die Bogen BD, CE gleich groß, und es sind die Dreyecke CBE, BCD sich gleich, daher die Dreyecke ABE, ACD, woraus die Gleichheit der Seiten AB, AC folget.

24. Zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks zusammen genommen sind größer als die dritte. — Dieses beruht darauf, daß die drey den Seiten AB, AC, BC (Fig. 97.) zugehörigen Winkel am Mittelpuncte der Kugel einen körperlichen Winkel bilden. Von diesen drey Winkeln hat Euklides XI. 20. erwiesen, daß je zwey

Digitized by Google

zusammen genommen größer sind als der dritte. S. Winkel, körperlicher.

25. Die Summe der drey Seiten eines sphärischen Dreyecks ist kleiner als der Umfang des größten Kreises. — Euklides hat XI. 21. erwiesen, daß die drey Winkel eines dreykantigen körperlichen Winkels zusammen kleiner als vier rechte sind. — Wolf hat in den Elementis Sphaericorum, 62. 63. andere weniger kunstgerechte Beweise gegeben.

26. In jedem sphärischen Dreyeck steht die größere Seite dem größern Winkel gegen über, und der größere Winkel liegt der größern Seite gegen über. — Der Beweis ist völlig derselbe, wie für geradlinichte Dreyecke.

27. In einem sphärischen Dreyeck ist die Summe zweyer Winkel zwey rechten gleich, wenn die Summe der beiden gegen über stehenden Seiten dem Halbkreise gleich ist; jene Summe ist kleiner oder größer als zwey rechte, wenn die Summe der gegen über stehenden Seiten kleiner oder größer als der Halbkreis ist.

I. In dem Dreyeck ABC (Fig. 100.) sey AC + BC = dem halben Kreisumfange. Man verlängere AB und AC bis zu ihrem zweyten Durchschnittspuncte in D, so sind ABD und ACD Halbkreise, und es ist der Winkel D = A. Da CB = CD ist, so ist (22.) D = CBD, also A = CBD, und A + ABC = 2R.

II. In dem Dreyeck ABE sey AE + EB kleiner als der Halbkreis. Da AE + ED gleich ist dem Halbkreise, so ist EB < ED. Daher ist der Winkel D < EBD, das ist, A < EBD: folglich A + EBA < 2R.

III. In dem Dreyeck ABF sey AF + FB größer als der Halbkreis. Da AF + FD gleich ist dem Halbkreise, so ist FB größer als FD, und daher D > FBD, das ist A > FBD. Folglich ist A + ABF > 2R.

Wenn AF größer als der Halbkreis ist, so ist der W. ABF größer als zwey rechte. Dieser Fall braucht nicht betrachtet zu werden, weil in demselben statt des Bogens

Digitized by Google

AF seine Ergänzung zum ganzen Kreise genommen werden kann, wodurch der gegen über liegende Winkel kleiner als zwey rechte wird.

28. Wenn zwey Winkel eines sphärischen Dreyecks so groß, oder kleiner, oder größer als zwey rechte sind, so ist die Summe der gegen über stehenden Seiten so groß, oder kleiner oder größer als der Halbkreis.

Der Beweis ist der umgekehrte von dem in 27.

29. In jedem sphärischen Dreyeck, dessen Winkel jeder kleiner sind als zwey rechte, ist die Summe der drey Winkel kleiner als sechs rechte und größer als zwey rechte.

Denn da jeder der drey Winkel kleiner als zwey rechte ist, so sind erstlich alle drey kleiner als sechs rechte.

Zweytens, es seyn zwey Winkel zusammen größer, oder so groß als zwey rechte, so ist die Summe aller drey Winkel größer als zwey rechte.

Drittens, es seyn zwey Winkel zusammen kleiner als zwey rechte, wie EAB und ABE in dem Dreyeck ABE (Fig. 100.). Man setze zu ABE noch den Winkel EBC, so daß in dem Dreyeck ABC die Summe $A + ABC = 2R$ sey. Dadurch ist $AC + BC =$ dem Halbkreise, und $EC + BC$ kleiner als der Halbkreis; folglich $CBE + CEB < 2R$ nach (27.). Da $AEB + CEB = 2R$ ist, so ist $AEB > CBE$. Zufolge der Construction ist $A + ABE + CBE = 2R$, also $A + ABE + AEB > 2R$.

30. Der äußere Winkel in einem sphärischen Dreyeck, der durch die Verlängerung einer der drey Seiten entsteht, ist kleiner als die Summe der beiden innern entgegengesetzten. Denn jener macht mit seinem Nebenwinkel zwey rechte aus, diese beiden aber mit dem dritten übertreffen zwey rechte, und sind also größer als der äußere.

31. In den beiden sphärischen Dreyecken, ABC, ADE (Fig. 101.), die den Winkel A gemein haben, und worin die Winkel B und D sich gleich sind, sind die beiden andern C und E verschieden.

Digitized by Google

Denn man verlängere BC, DE bis zu ihrem Durchschnittspuncte in F, so ist in dem Dreyeck BFD, wegen der gleichen Winkel ABC, ADE, die Summe FBD + FDB = 2R, also BF + DF = dem Halbkreise (28.); daher in dem Dreyeck CFE die Summe der Seiten FC + FE kleiner als der Halbkreis, und die Summe der Winkel FCE + FEC kleiner als zwey rechte, oder BCE + AED größer als zwey rechte. Da BCE + ACB = 2R, so ist ACB kleiner als AED.

32. Hieraus folgt, daß die drey Winkel in einem sphärischen Dreyeck dasselbe völlig bestimmen. Denn zwey Dreyecke, wie ABC, ADE können wol in den Winkeln A = A; B = D, übereinkommen, aber nicht in dem dritten, wenn nicht D in B fällt. Dieses ist der Beweis zu 21. IV.

33. Mit zwey gegebenen Winkeln und einer von ihnen nicht eingeschlossenen Seite lassen sich zwey verschiedene sphärische Dreyecke zeichnen.

Es sey nämlich Fig. 102. ABC ein Dreyeck, worin A und B Winkel von gegebener Größe sind, und AC auch zu einem gegebenen Winkel am Mittelpuncte gehört. Nun sey der Bogen CD so genommen, daß BC + DC = dem Halbkreise ist, so ist der W. CDB = CBA, und die beiden Dreyecke ABC, ADB kommen in den Winkeln B und D, außer dem gemeinschaftlichen A überein, desgleichen in der Seite AC. Allein es giebt nicht noch ein Dreyeck, das auf diese Art mit ABC übereinstimmte. Denn wenn AEC ein solches wäre, so wäre BC + DC = BC + EC = DC + EC, jede Summe nämlich dem Halbkreise. Also wäre BC = EC und EC = DC, folglich wären die Winkel bey B, D, E rechte; das ist, C wäre der Pol von AB. Nur in diesem Falle lassen sich unendlich viele Dreyecke zeichnen, die alle in zwey Winkeln und einer Seite übereinkommen.

34. In der Trigonometrie werden die Formeln zur Berechnung aller Fälle gegeben werden, wo auch die Sätze, 21. IV. V. VI. noch insbesondere ihre Beweise aus diesen Formeln erhalten werden.

Digitized by Google

35. Die Fläche eines sphärischen Dreyecks läßt sich sehr leicht mit der Oberfläche der Kugel vergleichen. Es verhält sich die Oberfläche der Kugel zu dem Flächenraume des Dreyecks, wie sich verhalten 720° zu dem Überschusse der drey Winkel des Dreyecks über 180°. Oder, es sey der Halbmesser der Kugel $= r$, und $\pi : 1$ das Verhältniß des halben Umfanges zum Halbmesser, auch seyn die Winkel, A, B, C durch die Verhältnißzahlen in Beziehung auf π ausgedruckt, so ist die Fläche des Dreyecks $= r^2 (A + B + C - \pi)$. Es ist nämlich die Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$.

Der Beweis kann auf eine sehr leichte Art, ohne besondere Construction durch bloßes Zusammennehmen und Absondern der Theile geführt werden. Albert Girard, dessen in der Geschichte der Algebra, Th. I. S. 52. ff. rühmlich gedacht ist, hat den Satz erfunden, allein den Beweis, nach Montücla's Anzeige, auf eine sehr mühsame und dunkle Art geführt. Euler hat einen ziemlich faßlichen Beweis gegeben, in der Abhandlung, de mensura angulorum solidorum, Acta Acad. Petr. a. 1778. T V. P. II. Nur ist die Figur, weil sie die ganze Kugelfläche begreift, nicht deutlich genug. Sie enthält sieben Dreyecke und das entgegengesetzte auf der andern Halbfläche, welches sie alle einfaßt. Der folgende Beweis ist der Eulerische sehr vereinfacht. Ausführlich hat noch von dieser Aufgabe, mit Beyfügung literarischer Nachrichten, Kästner gehandelt, in der zweyten Sammlung geometrischer Abhandlungen, S. 415 — 439.

36. Es ist ABC (Fig. 103.) die Projection eines sphärischen Dreyecks auf die Kreisfläche ABDEA. Diese stellt zugleich die Oberfläche der Halbkugel vor, die von dem Kreise ABDEA begränzt wird. Sie besteht aus dem Sector ABDCA, dem Dreyeck ACE, und dem Dreyeck DCE. Das Dreyeck ACE macht mit dem ACB den Sector EBAE aus. Das Dreyeck DCE ist das Nebendreyeck von einem dem ACB gleichen Dreyeck in dem Sector, der durch die Verlängerung der Bogen CD und CE bis zu ihrem zweyten Durchschnitt ent-

Digitized by Google

steht. Denn CD und CE sind die Ergänzungen der Bogen AC, BC zum Halbkreise. Man bezeichne den Flächenraum des Dreyecks ABC durch Δ, die Flächen der Sectoren durch A, B, C, die Oberfläche der Kugel durch S, so ist $\frac{1}{2}S = A + (B - \Delta) + (C - \Delta) = A + B + C - 2\Delta$, also $\Delta = \frac{1}{2}(A + B + C - \frac{1}{2}S)$.

Bezeichnet man den halben Kreisumfang oder zwey rechte durch π, wenn der Halbmesser = 1 ist, und läßt A, B, C die Verhältnißzahlen für die Winkel A, B, C in Beziehung auf π seyn, setzt auch den Halbmesser der Kugel = r, so ist die Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$; der Sector $A = \frac{A}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2r^2 \cdot A$; also der Sector $B = 2r^2 \cdot B$; und der Sector $C = 2r^2 \cdot C$. So wird $\Delta = r(A + B + C - \pi)$. Folglich $s : \Delta = 4\pi : A + B + C - \pi$. Drückt man die Winkel A, B, C in Graden aus, so kommen 180 Gr. statt π. Dieses giebt die zuerst angeführte Proportion.

37. Die Erfindung des Inhalts eines sphärischen Dreyecks durch Rechnung ist schwieriger, da hier eine gedoppelte Integration nöthig ist. — Es ist die gerade AB (Fig. 104.) die Projection eines Kreises von einer Kugelfläche auf die Ebene des Kreises ADB, und CE die Projection eines andern, der jenen unter dem Winkel ACE schneidet. Durch D, den Pol von AB, sey der Quadrant DP gezogen, welcher CE in M schneidet. So wird das rechtwinklige sphärische Dreyeck CPM gebildet. Man ziehe einen benachbarten Quadranten Dp, so entsteht ein zweytes Dreyeck Cpm, dessen Unterschied von CPM, so fern dieser von der Quantität der Veränderungen unabhängig ist, das Differential des Dreyecks CPM giebt, woraus der Inhalt durch Integration herzuleiten ist. Dieser Unterschied aber ist selbst ein Theil des Sectors PDp, und muß durch Integration gefunden werden. Zuerst muß die endliche Gleichung zwischen den veränderlichen Kreisbogen CP, PM, die als Coordinaten zu betrachten sind, und dem gegebenen Winkel PCM be-

Digitized by Google

kannt seyn. Es ist tang PM = sin CP . tang PCM. (Trigonometrie, sphärische.). Man setze den Halbmesser der Kugel = 1; den Bogen CP = ω, PM = φ, so ist

$$\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,C \cdot \sin\omega,$$

und die Differentialgleichung ist

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \text{tang}\,C \cdot \cos\omega \cdot \partial\omega.$$

Das Differential des Flächenraums PMnp ist Mn × mn, weil das Verhältniß der endlichen Differenz und dieses Products sich dem der Gleichheit immer mehr nähert. Da Mn = Pp × cos φ ist (5.) so ist Mn × mn = cos φ × $\partial\varphi . \partial\omega$, wovon das Integral ist = sin $\varphi . \partial\omega$, weil $\partial\omega$ für den Sector PDp unveränderlich ist. Es ist also das Differential des Dreyecks = sin $\varphi . \partial\omega$, ohne eine Constante.*) Um dieses zu integriren, muß φ entweder durch ω, oder $\partial\omega$ durch $\partial\varphi$ und φ ausgedruckt werden. Dieses giebt aber eine Differentialformel, deren Reduction auf eine Elementarform beschwerlich ist. Da in dem Dreyeck aber noch eine veränderliche Größe, der Winkel CMP ist, so versuche man, ob sich das Differential des Dreyecks durch dieses bequemer ausdrucken lasse.

Es ist $\sin\varphi . \sin M = \sin\omega . \sin C$,

und $\cos M = \cos\omega . \sin C$;

also $\sin\varphi . \partial\omega = \frac{\sin C}{\sin M} \sin\omega . \partial\omega$,

und $\sin M . \partial M = \sin C . \sin\omega . \partial\omega$.

Dadurch ist $\sin\varphi . \partial\omega = \partial M$, folglich $\int \sin\varphi . \partial\omega = M +$ Const. Wenn P in C fällt, oder wenn das Dreyeck = 0 ist, so ist $M = \frac{1}{2}\pi - C$, also Const $= C - \frac{1}{2}\pi$. Folglich ist $\int \sin\varphi . \partial\omega$, oder der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks $CPM = M + C - \frac{1}{2}\pi$.

*) Oder: es ist (unten 42.) die Fläche der Zone zwischen dem Kreise, der durch AB senkrecht auf ADB steht, und dem parallelen durch M = $2\pi \sin\varphi$; also das endliche Segment PMnp = $\sin\varphi . \Delta\omega$. Da das letzte Verhältniß von PMnp zu PMmp = 1 : 1 ist, so ist das Differential des Dreyecks = $\sin\varphi . \partial\omega$.

Digitized by Google

38. Da ein schiefwinklichtes Dreyeck in zwey rechtwinklichte sich zerlegen läßt, so ist, wenn die Winkel desselben A, B, C sind, der Inhalt $= A + B + C - \pi$. Wird der Halbmesser $= r$ genommen, so ist der Inhalt des Dreyecks $= r^2(A + B + C - \pi)$.

39. Der Halbkreis ADB (Fig. 104.) drehe sich um den Halbmesser CD, bis daß A und B jeder in die Stelle des andern kommen. Der Bogen MDM, dessen Chorde MPM auf CD senkrecht ist, beschreibt dadurch einen Abschnitt der Kugelfläche. Es sey $AC = a$; $DP = x$, so ist diese Oberfläche $= 2\pi a x$ (Complanation, Th. I. S. 515.)

40. Die Oberfläche der halben Kugel ist $= 2\pi a a$, und die Zone zwischen den von AB und MM beschriebenen Kreisen $= 2\pi a(a - x)$.

41. Eine andere mit MM parallele Chorde sey NN, welche CD in Q schneide. Es sey $DQ = x'$, so ist die Fläche der Zone zwischen dem von M und N beschriebenen Parallelkreisen $= 2\pi a(x' - x)$.

42. Es sey der Winkel $ACM = \varphi$; $ACN = \varphi'$, so ist $\frac{a - x}{a} = \sin\varphi$, und $\frac{a - x'}{a} = \sin\varphi'$. Nun ist die Fläche der Zone $= 2\pi a a(\sin\varphi - \sin\varphi')$. Oder aus Goniometrie, 27.

die Zone $= 4\pi a a \sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi').\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$

43. Man gebe einem Grade des größten Kreises 15 Theile (Meilen), so hält der halbe Umfang 2700 Meilen, und es ist $a = \frac{2700}{\pi}$. Die Zone sey $= Z$, so ist

$$Z = \frac{2(2700)^2}{\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi') =$$

$$\frac{4(2700)^2}{\pi}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Digitized by Google

44. Exempel. Es sey $\varphi = 23°30'$; $\varphi' = 0$, so ist $Z = 1850578$ Quadratmeilen. Nämlich

$$\begin{aligned} \log. 2700 &= 3{,}4313638 \\ &\quad 3{,}4313638 \\ 1\sin\varphi &= 9{,}6006997 \\ \text{Subtr. } 1\pi &= 0{,}4971499 \\ \hline 1\tfrac{1}{2}Z &= 5{,}9662774 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}Z = 925289$; $Z = 1850578$.

Ferner sey $\varphi = 66°30'$; $\varphi' = 23°30'$, so ist $Z = 2405460$ Quadratmeilen.

$$\begin{aligned} 1\frac{2700^2}{\pi} &= 6{,}3655777 \\ 1\sin 21°30' &= 9{,}5640754 \\ 1\cos 45° &= 9{,}8494850 \\ \hline &\quad 5{,}7791381 \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}Z = 601365$; $Z = 2405460$.

Noch sey $\varphi = 90°$, $\varphi' = 66°30'$, so ist $Z = 384921$ Quadratmeilen.

45. Die Oberfläche der ganzen Kugel ist $= 4\pi aa$, viermahl so groß als die Fläche eines ihrer größten Kreise. In Quadratmeilen ist sie $\frac{2916000}{\pi} = 9281916$, wie man durch die Multiplication mit dem Bruche $\frac{1}{\pi}$ (Cyklotechnie, Th. I. S. 642.) genauer als mittelst der gemeinen Logarithmen findet. Damit stimmt die doppelte Summe der drey berechneten Zonen bis auf einen Unterschied von 2 in der letzten Ziffer überein.

46. Giebt man der Oberfläche der Kugel 1000000 Theile, so werden die Flächenräume in dem Verhältnisse $29{,}16 : \pi$ verändert. Die drey Zonen sind nun I. 199374;

Digitized by Google

II. 259156; III. 41470. Diese Zahlen lassen sich leicht unmittelbar durch die Formel $2\pi aa(\sin\varphi - \sin\varphi')$ finden, da $4\pi aa = 1000000$ genommen ist.

In dem astronomischen Jahrbuche für 1784. S. 177 ff. ist eine Tafel der Kugelzonen von halben zu halben Graden enthalten.

47. Der Inhalt des von dem Bogen MDM beschriebenen Kugelstücks ist $= \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$.

Denn es ist, wenn das Kugelstück $= Z$, und die Ordinate $MP = y$ ist, $\partial Z = \pi yy\partial x$ (s. Cubirung). Hier ist $yy = 2ax - xx$, also $\partial Z = \pi(2ax - xx)\partial x$ Folglich $Z = \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$, wo die Constans $= 0$ genommen wird.

48. Für die Halbkugel ist $x = a$, also ihr Inhalt $= \frac{2}{3}\pi a^3$, und die ganze Kugel $= \frac{4}{3}\pi a^3$. Der Inhalt eines Cylinders, dessen Halbmesser $= a$, und Höhe $= 2a$ ist, ist $2\pi a^3$, daher derselbe sich zur Kugel verhält wie 3 : 2.

49. Eine Kugel so zu theilen, daß das Verhältniß der beiden Abschnitte einem gegebenen $m:n$ gleich sey. — Diese Aufgabe führt auf eine cubische Gleichung für die Abscisse x oder DP. Es ist der zu x gehörige Abschnitt $= \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$ oder $\frac{1}{3}\pi x^2(3a - x)$. Zieht man diesen von der ganzen Kugel, $\frac{4}{3}\pi a^3$, ab, so ist der andere Abschnitt $= \frac{1}{3}\pi(4a^3 - 3ax^2 + x^3)$. Der Forderung gemäß ist nun

$$3ax^2 - x^3 : 4a^3 - 3ax^2 + x^3 = m:n.$$

Daraus entsteht die cubische Gleichung,

$$(m+n)x^3 - 3(m+n)ax^2 + 4ma^3 = 0.$$

Diese Gleichung hat der Natur der Aufgabe gemäß nur eine mögliche Wurzel. Sie wird entweder numerisch, oder durch eine Construction, dergleichen Th. I. S. 138 ff. angegeben ist, aufgelöset.

50. Archimedes, der in den zwey Büchern über Kugel und Cylinder bloß durch Hülfe der gemeinen Geometrie die Aufgaben von der Complanation und Cubirung der Kugel aufgelöset hat, trägt im 2. B. 5. S. auch diese

Digitized by Google

Aufgabe vor, und bringt ihre Auflösung auf diejenige zweyer andern, welche er am Ende der Schrift mitzutheilen verspricht, wo sie aber sich bald verloren haben. Eutocius fand nach langem Suchen ein Exemplar, worin die Auflösungen enthalten waren, von der Beschaffenheit, daß er sie für ächt erkannte. Er hat sie in seinem Commentar über des Archimedes Schrift aufbewahrt. Zwey ältere Geometer, Dionysiodorus und Diokles, haben andere Auflösungen gesucht, welche Eutocius daselbst mittheilt. Man sehe Haubers Ausgabe der archimedeischen Schrift, Tübingen 1798. S. 70. ff.

51. Eine Kugel durch eine Ebene so zu theilen, daß die Oberflächen ein gegebenes Verhältniß haben, ist sehr leicht. Es ist $(m+n)x = 2ma$. Archimedes hat diese Aufgabe auch aufgelöset, a.a.O. S. 4.

Berührungen einer Kugel mit andern und mit ebenen Flächen.

52. Über die Berührungen einer Kugel mit andern Kugeln oder mit Ebenen kann man eben solche Aufgaben machen als über die Berührungen eines Kreises mit andern Kreisen und mit geraden Linien. Fermat, der große Analyst des siebzehnten Jahrhunderts, hat einen Aufsatz de contactibus sphaericis geschrieben, der in der Sammlung seiner Werke, pag. 74—88. anzutreffen ist. Vermuthlich ist er dazu durch des Vieta Abhandlung über die Berührungen der Kreise veranlaßt worden. Der Gang seiner Auflösungen ist dem von Vieta genommenen ganz gleichstimmig. Auch bringt er seine Auflösungen über die Kugeln auf die von Vieta für Kreise gefundenen. Da die Werke des Fermat sehr selten sind, und die Auflösungen, welche er gegeben hat, durch sinnreiche Einfachheit eine sehr nützliche geometrische Übung sind, so will ich einen Auszug aus seinem Aufsatze mittheilen. Die Auflösungen der drey ersten Aufgaben sind von ihm zu wortreich, ohne darum lichtvoller zu seyn, abgefaßt, welches ich zu verbessern suchen werde.

Digitized by Google

53. I. Aufg. Zu vier gegebenen Puncten die Kugel zu finden, deren Oberfläche durch dieselben gehe.

Es seyn A, B, C, D (Fig. 106.) die gegebenen Puncte, von welchen man die drey ersten sich in der Ebene der Zeichnung, den vierten D darüber vorzustellen hat. Die Ebene dreyer derselben, als A, B, C, schneidet die Kugelfläche in einer Kreislinie (3.); beschreibt man also durch diese drey Puncte einen Kreis, so ist dieser auf der Oberfläche der Kugel. Der Mittelpunct desselben sey E; durch diesen Punct ziehe man EF senkrecht auf die Ebene des Kreises, so liegt der Mittelpunct der gesuchten Kugel auf dieser Linie. Durch irgend einen Punct G der EF ziehe man von dem vierten Puncte D die gerade DGH, welche die Ebene des Kreises ABC in H treffe. Die gerade durch E und H schneide den Kreis in I und K. Die Ebene der beiden geraden DH, IK geht durch EF. Man ziehe durch die Puncte D, I, K einen Kreis, so geht dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel, und ist ein größter Kreis. Folglich sind sowohl der Mittelpunct als der Durchmesser der gesuchten Kugel gefunden, als welche dieselben wie für den Kreis DIK sind.

Die Auflösung ist wesentlich dieselbe mit der von Fermat gegebenen, aber der Beweis ist ganz abgeändert. Auch gebraucht Fermat statt der hier gezogenen DH eine senkrechte von D auf EF, und zieht mit dieser die IK parallel.

54. II. Zu drey gegebenen Puncten und einer Ebene die Kugel zu finden, welche durch jene Puncte gehe, und diese berühre.

Es seyn A, B, C (Fig. 107.) die drey gegebenen Puncte. Durch diese ziehe man einen Kreis, und setze auf die Ebene desselben durch den Mittelpunct D die senkrechte DE, welche die gegebene Ebene in E treffe. In dieser DE (oder der verlängerten) liegt der Mittelpunct der Kugel. Da die Lage der berührenden Ebene gegeben wird, so ist sowohl ihre Durchschnittslinie mit der Ebene des Kreises ABC, als ihr Neigungswinkel gegeben, oder

Digitized by Google

die Lage der auf die Durchschnittslinie durch den Mittelpunct D senkrechten welche FG sey, und der Winkel FDH der auf die Ebene senkrechten DH mit der FG. Die FG schneide den Kreis in I, K, und die DH treffe die Ebene in H. Nun steht jeder größte Kreis auf eine berührende Ebene in dem Berührungspuncte senkrecht, weil der Durchmesser der Kugel auf sie senkrecht ist (9.); der Kreis durch die Puncte I, K, dessen Ebene durch DE geht, ist ein größter; also steht derselbe senkrecht auf die gegebene Ebene, und seine Ebene geht durch DH. Da die Kugel von der gegebenen Ebene berührt wird, so berührt dieser Kreis den Durchschnitt derselben mit der Ebene des Kreises, das ist, die HE (oder die verlängerte). Folglich ist die Aufgabe nun auf diese gebracht: einen Kreis zu finden, der durch zwey gegebene Puncte (I, K) gehe, und eine gegebene gerade (HE) berühre. Der Mittelpunct dieses Kreises und dessen Durchmesser kommen auch der gesuchten Kugel zu. Die Auflösung jener Aufgabe ist in dem Artikel, Kreis, 82. gewiesen.

55. III. Zu drey gegebenen Puncten und einer der Größe und Lage nach gegebenen Kugel diejenige Kugel zu finden, welche durch die drey Puncte gehe, und die Kugel berühre.

Die drey Puncte seyn A, B, C (Fig. 108.), der Mittelpunct der gegebenen Kugel D. Durch die drey Puncte ziehe man einen Kreis, und errichte in dem Mittelpuncte E auf die Ebene desselben die senkrechte EF, so liegt in dieser der Mittelpunct der gesuchten Kugel. Von D ziehe man durch einen Punct der EF die DGH, welche die Ebene des Kreises ABC in H treffe. Die (hier) verlängerte EH treffe den Kreis in I, K. Es sey der Kreis LM ein größter Kreis der gegebenen Kugel, und derjenige, dessen Ebene in die Ebene der geraden EF, IK fällt. In diesem liegt der Berührungspunct beider Kugeln, so wie er auch in dem größten Kreise durch EF und IK liegt. Denn der Berührungspunct zweyer Kugeln liegt mit den beiden Mittelpuncten in gerader Linie (11.). Die Aufgabe ist nun dahin gebracht, durch zwey Puncte

Digitized by Google

(I, K) einen Kreis zu ziehen, der einen gegebenen Kreis (L M) berühre. (Kreis, 89.).

56. IV. Zu vier gegebenen Ebenen eine Kugel zu finden, welche sie alle berühre.

Der Winkel zweyer berührenden Ebenen an einer Kugel wird durch die Ebene, welche durch ihren Durchschnitt und den Mittelpunct geht, halbirt (10.). Hier sind nun drey halbirende Ebenen gegeben, deren Durchschnittslinien in dem Mittelpuncte der Kugel zusammen kommen. Die senkrechten von diesem Puncte auf die berührenden Ebenen geben den Halbmesser der Kugel.

57. V. Zu drey gegebenen Ebenen und einem Puncte die Kugel zu finden, welche jene berührt und durch diesen geht.

Diese Aufgabe wird auf die zweyte gebracht. Es wird nämlich gegeben eine gerade DE (Fig. 107.), in welcher der Mittelpunct der Kugel liegt, nämlich die Durchschnittslinie zweyer halbirenden Ebenen; ferner ein Punct I, dadurch die auf ED senkrechte ID, und DK = DI, also der Punct K; dann auch noch eine berührende Ebene, welche von den drey gegebenen man nehmen mag.

58. VI. Zu drey Ebenen und einer Kugel diejenige Kugel zu finden, welche beiderley berühre.

Wird auf die Aufgabe V. gebracht.

59. VII. Zu zwey Puncten und zwey Ebenen die Kugel zu finden, welche durch jene gehe und diese berühre.

Wird auf die Aufgabe II. gebracht.

60. VIII. Zu zwey Puncten und zwey Kugeln die Kugel zu finden, welche durch jene gehe und diese berühre.

Wird auf die Aufgabe III. gebracht.

61. IX. Zu einem Puncte und drey Kugeln diejenige zu finden, welche durch jenen gehe und diese berühre.

Wird auf die Aufgabe VIII. gebracht.

62. X. Zu vier Kugeln die sie alle berührende zu finden.

Digitized by Google

Wird auf die Aufgabe IX. gebracht.
Die Auflösung ist der Vietäischen von drey Kreisen, die einen vierten berühren sollen, (Kreis 95.) ganz gleichstimmig. Dort sind drey Kreise, hier vier Kugeln.

63. Außer diesen Aufgaben sind noch fünf dieser Art. Es können nämlich noch ein Punct, mit zwey Ebenen und einer Kugel, oder zwey Ebenen und zwey Kugeln gegeben seyn. Die erstere dieser Aufgaben wird auf die VII. und die andere auf jene erstere gebracht. Noch sind drey Aufgaben übrig, zu deren Auflösung Fermat einige Lehrsätze gebraucht, welche von Kreisen und Linien in derselben Ebene auf Kugeln und auf Linien in verschiedenen Ebenen übergetragen werden.

64. Die Construction der Aufgabe (53. läßt sich ganz in einer Ebene ausführen. Es sey (Fig. 106.) A B C der Kreis durch drey der gegebenen Puncte, A, B, C. Die senkrechte von dem vierten Puncte D auf die Ebene dieses Kreises treffe sie in L, und die Höhe des Punctes D über der Ebene sey L D. Diese und der Punct L sind unmittelbar oder mittelbar, durch die Coordinaten des Punctes D gegeben. Die gerade E L (verlängert) schneide den Kreis in I und K. Da D L und F H beide senkrecht auf die Ebene des Kreises stehen, so sind sie einander parallel (Ebene, 10.), und liegen also in einer Ebene, und die Ebene der I K und L D geht durch E F, also durch den Mittelpunct der gesuchten Kugel. Der Kreis durch die Puncte D, I, K ist ein größter und der Halbmesser desselben dem Halbmesser der Kugel gleich. Man braucht also nur in der Ebene des Kreises A B C durch den Grundpunct L von D die senkrechte L D auf E L zu ziehen, darauf L D gleich der Höhe des Punctes D zu nehmen, und durch die drey Puncte, I, K, D einen Kreis zu beschreiben, so ist der Halbmesser desselben der gesuchte der Kugel.

Auf ähnliche Art wird man die Construction der andern Fälle auf Zeichnungen in einer Ebene bringen können.

65. Um den Zusammenhang des Halbmessers der Kugel mit den gegebenen Puncten zu übersehen, wird folgende Construction dienlich seyn.

Digitized by Google

Es seyn A, B, C, D (Fig. 109.) die vier gegebenen Puncte, welche nicht in einer Ebene liegen. Man nehme die Ebene dreyer, als A, B, C zur Grundebene, auf welche der vierte Punct D durch drey gegebene Coordinaten bezogen werde. So wird die Neigung der Ebene ACD gegen die ABC gegeben, zugleich mit der Lage des Punctes D in der Ebene ACD, durch den Punct auf AC, wo die senkrechte von D auf AC sie trifft, und durch die senkrechte selbst. Durch die Puncte A, B, C beschreibe man einen Kreis, dessen Mittelpunct E sey; gleichfalls durch A, C, D einen Kreis, dessen Mittelpunct F sey. Von E und F ziehe man auf AC senkrechte, so halbiren diese die AC, und treffen sie in demselben Puncte G. Der Winkel FGE ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC, ADC. Die Ebene dieses Winkels steht auf diese Ebenen senkrecht (Ebene, 32.). In derselben Ebene ziehe man auf GE und GF die senkrechten EH, FH, welche sich in H schneiden. Da die Ebene FGEH senkrecht auf ABC ist, und HE senkrecht auf GE steht, so ist HE senkrecht auf die Ebene ABC (Ebene, 25.). Eben so ist HF senkrecht auf die Ebene ADC. Dadurch sind die rechtwinkligen Dreyecke AEH, BEH, CEH sich gleich, so wie die rechtwinkligen Dreyecke, AFH, CFH, DFH. Folglich sind die HA, HB, HC, HD einander gleich, und H ist der gesuchte Mittelpunct der Kugelfläche durch A, B, C, D.

Man sieht nun leicht, wie die ganze Construction in einer Ebene ausgeführt werden kann. Das Dreyeck ACD wird in die Ebene von ABC gelegt, so wie das EGH. An dieses wird das Dreyeck FGH mit dem gehörigen Winkel FGH gefügt. An GE wird eine gerade, die der EA oder EB gleich ist, gesetzt, so wird der Halbmesser der Kugel HA oder HB erhalten.

66. Durch Rechnung allein wird der Halbmesser der Kugelfläche, welche durch vier gegebene Puncte geht, folgendermaßen gefunden. Es seyn die Coordinaten zu einem der Puncte, a, b, c, die correspondirenden (jenen parallelen) Coordinaten zu dem Mittelpuncte, x, y, z;

Digitized by Google

der Halbmesser der Kugel = R, so ist (krumme Fläche, 40.)

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = R^2,$$

oder $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Durch die vier Puncte werden vier solcher Gleichungen gegeben, aus welchen sich die drey unbekannten x, y, z wegschaffen lassen, worauf eine Gleichung für R durch gegebene Größen hervorgeht. Ist R gefunden, so werden auch aus den Gleichungen für x, y, z diese bestimmt, welches die Lage des Mittelpunctes giebt. — Durch das Abziehen einer der vier Grundgleichungen von den drey übrigen gehen die Quadrate von x, y, z heraus, und die Gleichungen für dieselben sind vom ersten Grade. Die Aufgabe ist also immer eine mögliche.

67. Eine andere Aufgabe über Berührungen der Kugeln ist, wie viele sich gleiche Kugeln um eine gegebene Kugel herum gelegt werden können, so daß sie diese berühren, und jede zugleich von den um sie liegenden berührt werde; auch welches das Verhältniß der Halbmesser sey, der innern berührten Kugel und der sie berührenden. Kästner hat diese Aufgabe aufgelöset, in den Dissertt. mathem. et physicis, Altenburgi, 1771. Es können entweder 4, oder 6, oder 12 Kugeln seyn. Von vier Kugeln berühren sich je drey einander, von sechs Kugeln je vier, von zwölf Kugeln je fünf. Die Berührungspuncte bilden in dem ersten Falle ein Tetraedrum, in dem zweyten ein Oktaedrum, in dem dritten ein Dodekaedrum. Die Halbmesser der um eine Kugel herumgelegten Kugeln sind größer als der Halbmesser dieser innern berührten.

68. Es kommt hier darauf an, die Oberfläche einer Kugel in eine Anzahl gleich großer und gleichseitiger Dreyecke zu theilen, deren Winkelpuncte die Berührungspuncte mit der innern Kugel sind. Die Abstände der nächsten Berührungspuncte sind nämlich alle einander gleich, und bilden also lauter gleiche und gleichseitige Dreyecke. Der Inhalt eines solchen Dreyecks muß daher ein völlig mes-

Digitized by Google

fender Theil der ganzen Oberfläche seyn, so wie die Winkel ein solcher Theil von 360 Graden seyn müssen. Jeder der gleichen Winkel sey = A, so ist der Inhalt eines Dreyecks = 3 A — π für den Halbmesser = 1 (35.). Die Anzahl der gleichen Dreyecke sey = n, und die Anzahl der Winkel um einen Winkelpunct sey = m, so ist $\frac{4\pi}{3A-\pi} = n$, da 4π die ganze Kugelfläche ist, und m A = 2π, wo 2π vier rechte Winkel bedeutet. Daraus ist $\frac{4m}{6-n} = n$. Da m nur die Werthe, 3, 4, 5 haben kann, so erhält n nur die Werthe 4, 8, 20.

Bey vier Dreyecken liegen drey Winkel, jeder von 120°, um einen Mittelpunct. So sind 12 Winkel in allen vier Dreyecken vorhanden, von welchem drey zu einem Winkel- oder Berührungspuncte gehören. Die Anzahl dieser Puncte, das ist, der berührenden Kugeln ist also vier.

Acht Dreyecke enthalten 24 Winkel, in jedem Winkelpuncte 4; die Anzahl der Winkelpuncte oder berührenden Kugeln ist also sechs.

Zwanzig Dreyecke enthalten 60 Winkel, in jedem Winkelpuncte 5; die Anzahl der Winkelpuncte oder berührenden Kugeln ist also zwölf.

69. Die Seiten der gleichen Dreyecke seyn jede = a, die Winkel = A, so ist $\cos A = \frac{\cos a - \cos a^2}{\sin a^2}$ $= \frac{\cos a}{1+\cos a}$ (Trigonometrie, sphärische), und

$1 - \cos A = \frac{1}{1+\cos a}$, oder $2 \sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} a^2}$,

das ist, $\cos \frac{1}{2} a = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} A}$.

70. Der Halbmesser einer der berührenden Kugeln sey = x, der innern berührten = 1, so ist

Digitized by Google

$\frac{x}{1+x} = \sin\frac{1}{2}a$, wie man durch eine leichte Zeichnung eines Durchschnitts durch die Mittelpuncte der innern berührten Kugel und zweyer äußern finden wird. Daher ist $x = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{1-\sin\frac{1}{2}a}$.

Für $n = 4$, ist $m = 3$; $A = 120°$; $\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Daher

$$x = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \sqrt{6}+2 = 4,4494\ldots$$

Für $n = 8$ ist $m = 4$; $A = 90°$; $\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2,4142\ldots$

Für $n = 20$ ist $m = 5$; $A = 72°$; $\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin 36°}$. Es ist $\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, nach Goniometrie, 168. Daraus ist $\sin\frac{1}{2}a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$, und $x = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{(5-\sqrt{5})}+\sqrt{(3-\sqrt{5})}$, so wird erhalten $x = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 1,1085$.

71. In dem astronomischen Jahrbuche für 1805. S. 135. hat Schubert eine Anwendung dieser Untersuchung auf die Frage gemacht, wie viel Sterne von jeder Größe vorhanden seyn würden, wenn sie alle gleichen Abstand von einander hätten, so groß als der Abstand unserer Sonne von einem der nächsten Fixsterne. Bey dieser An-

Digitized by Google

nahme bleiben Lücken, oder man muß eine unbestimmte Ungleichheit der Abstände gestatten. Die erste Kugelschicht um die innerste Kugel enthält solchergestalt 14 Kugeln, die zweyte 57, die dritte 130, die vierte 231, die fünfte 362, die sechste 521. — Die Kugel, wovon unsere Sonne der Mittelpunct ist, könnte auch eine der um eine Centralkugel herum gelagerten seyn.

In Zeughäusern werden die Kanonenkugeln in Schichten auf einander gelegt, die regelmäßig abnehmen, so daß die Haufen eine dreykantige gleichseitige Pyramide, oder eine vierkantige gleichseitige, oder ein an den Enden schief abgeschnittenes Prisma bilden. Die Zahlen der Kugeln in den Schichten machen eine arithmetische Reihe der zweyten Ordnung aus, daher sie leicht zu summiren sind. In der dreykantigen Pyramide seyn m Schichten, so ist die Anzahl der Kugeln $= \frac{1}{6} m(m+1)(m+2)$. In dem prismatischen Haufen seyn m Schichten, daher die unterste Schicht auf der einen Seite m Kugeln enthalte, die Anzahl der Kugeln auf der andern Seite sey n, so ist die Anzahl der Kugeln in dem Haufen $= \frac{1}{6} m(m+1)(3n-m+1)$. Nimmt man $m = n$, so ist die Anzahl $= \frac{1}{6} m(m+1) \times (2m+1)$, die Menge der Kugeln in der vierkantigen Pyramide.

Kugeldreyeck oder sphärisches Dreyeck, s. den vorhergehenden Artikel, und wegen der Berechnungen die sphärische Trigonometrie.

Kugelgewölbe mit quadrirbaren Öffnungen, s. Florentinische Aufgabe.

Kugelzahl, auch Circul- oder Kreiszahl, ist eine solche, deren Potenzen in der letzten Ziffer mit der Zahl übereinkommen. Dieses ist eine ganz unnütze Aussonderung in der ältern Arithmetik.

Kunstwort ist eine zum wissenschaftlichen Gebrauche bestimmte wörtliche Bezeichnung eines allgemeinen

Digitized by Google

Begriffes. Hier ist nur von der Bildung der mathematischen Kunstwörter die Rede.

Sparsamkeit in Kunstwörtern, eine solche Bildung derselben, wodurch sie schon einigermaßen verständlich werden, genaue Bestimmung und Gebrauch in immer ungeänderter Bedeutung, das sind einige von den Eigenschaften der mathematischen Sprache.

Die alten Geometer nahmen ihre Kunstwörter soviel als möglich aus der gemeinen Sprache her. Die griechischen Benennungen von Punct, Linie, Fläche (σημειον, γραμμη, ἐπιφανεια) weisen auf bezeichnen, schreiben, auswendig erscheinen; Mittelpunct des Kreises ist die Spur eines Stachels; der Cylinder ist vom Wälzen benannt. Im deutschen sind Punct und Linie gelehrte Wörter, und zugleich fremden Ursprungs; der Ausdruck, Fläche, enthält nichts, was auf äußeres Erscheinen an einem Körper deutete.

Den Kegelschnitten gaben die Geometer anfangs keine eigene Namen. Weil sie nur den gleichseitigen Kegel betrachteten, und die schneidende Ebene allemahl auf eine Seite von ihm senkrecht setzten, so war es ihnen genug, die Gestalten vermittelst der Beschaffenheit des Winkels am Scheitel des durch die Axe gelegten Dreyecks zu unterscheiden: Schnitt des rechtwinkligen, stumpfwinkligen, spitzwinkligen Kegels. Als man in der Folge sah, daß die Schnitte des ungleichseitigen Kegels, nach der Lage der schneidenden Ebene, ebenfalls diese Linien werden, gab man ihnen besondere Namen, die aus der gemeinen Sprache genommen wurden, und eine Vergleichung, einen Überschuß, einen Mangel anzeigen, nachdem das Quadrat der halben Ordinate so groß, größer, oder kleiner ist als das Rechteck aus einer gegebenen geraden in die Abscisse vom Scheitel an genommen

Eigene Namen giebt der Geometer den zusammengesetzten Begriffen nur, wenn er sie sehr oft gebraucht. Daher bekommen geradlinige Figuren von mehr als vier Seiten nur zweyerley Abtheilungen: ordentliche und unordentliche; ähnliche und unähnliche.

Digitized by Google

Man sucht immer mit den wenigsten Kunstwörtern auszukommen. Darum werden ältere bey Seite gelegt, wenn die Gegenstände auf eine neue und bessere Art betrachtet werden. Beyspiele giebt Euklids X. Buch, besonders in den zweyten Erklärungen, die nach dem 48. Satze folgen. S. Irrational.

Die Rechenmeister des 17ten Jahrhunderts gaben jeder Potenz und jeder Polygonalzahl eigene Namen. Diese sind gegenwärtig veraltet, weil man diese Zahlen bloß durch Zahlen unterscheidet.

Die besondern griechischen Wörter, wodurch Vieta ganz leichte und gewöhnliche Umwandlungen der Gleichungen bezeichnet, sind gar nicht üblich geworden. So auch nicht die besondern griechischen Benennungen der Logarithmen der trigonometrischen Linien, welche Nicolaus Kaufmann in seiner Ausgabe der trigonometrischen Tafeln einführen wollte.

In der Keplerischen Astronomie sind die Kunstwörter der Ptolemäischen, als Excentricität, excentrischer Kreis, Apsis u. m. beybehalten, nur ihre Bedeutung ist geändert, aber so, daß sie gleich klar ist.

Ich habe diese sehr gut ausgesuchten Beyspiele aus einem Aufsatze von Kästner in Eberhards philosophischem Magazin, 4. Bd. 3. St. genommen. Unser Wörterbuch giebt noch viele an die Hand. Das Kunstwort, Logarithmus, enthält zugleich eine Erklärung des Begriffs; Krümmungskreis zeigt gleich die Beziehung dieses Kreises auf eine krumme Linie an, und circulus osculator giebt sogar eine sinnliche Vergleichung. Konoid, Sphäroid, Cykloide, Epicykloide lassen durch die Umendung schon ihre Verwandschaft mit bekanntern Formen einsehen. Das Kunstwort, Sinus, enthält zwar eine sehr gesuchte Vergleichung in einer sehr wenig bekannten Sprache, wird aber, da es einmal eingeführt ist, als ein willkürliches Zeichen angesehen.

Die Kunstwörter, die aus dem Griechischen und Lateinischen herkommen, werden am besten größtentheils beybehalten. Sie gehören zu der allgemeinen Sprache der

Digitized by Google

Mathematiker. Übersetzungen, wie sie ehedem J. C. Sturm, und in unsern Zeiten Bürja, versucht haben, sind oft nicht gleich verständlich. Im wissenschaftlichen Vortrage darf der Geist durch Beschäftigung mit den Wortzeichen nicht zerstreut werden.

Künstlich ist ein Ausdruck, der verschiedene Entgegensetzungen in der Mathematik bedeutet. Man nennt künstliche Sinus und Tangenten die Logarithmen der numerischen Sinus und Tangenten, im Gegensatze gegen diese selbst, die alsdann natürliche heißen. In Sherwins mathematischen Tafeln sind diese von jenen durch die Beywörter Natural und Logarithmical unterschieden. — Der natürliche Tag ist die Zeit von Mitternacht zu Mitternacht oder von Mittag zu Mittag. Der künstliche Tag ist die Zeit des Aufenthalts der Sonne über dem Horizont. — Künstliche chronologische Abschnitte oder Perioden sind Wochen, Sonnen-Circul (Sonntagsbuchstabenperioden), Mondcirkel, Indictionenperiode; natürliche sind Jahre, und andere Perioden der Bewegungen der Himmelskörper. — Die künstliche Erdkugel ist eine Abbildung der wirklichen.

L.

Lage (Situs) ist die Art, wie Puncte und geometrische Größen neben einander gedacht werden. Die Lage eines Punctes gegen andere Puncte wird durch die Länge und Lage der geraden Linien von dem Puncte zu jenen angegeben; gegen eine Linie durch die gerade Linie, welche unter einem bestimmten Winkel an diese gezogen wird, und den Punct, wo sie dieselbe trifft; gegen Ebenen durch drey Coordinaten, ursprüngliche oder abgeleitete. - Die Lage zweyer geraden Linien, die in einer Ebene liegen, wird durch ihren Winkel und die Stelle des Scheitelpuncts bestimmt; die Lage einer geraden Linie gegen eine andere, die nicht in einer Ebene mit ihr liegt, durch den Winkel, welchen diese

Digitized by Google

se und eine jener erstern, durch irgend einen Punct der letztern, parallel gezogene mit einander machen, nebst dem Abstande dieses Punctes von der erstern Linie. — Die Lage einer geraden Linie gegen eine Ebene wird durch zwey Gleichungen zwischen drey Coordinaten angegeben, s. Linie; auch durch zwey Winkel und eine Länge, wie in der Astronomie durch Länge, Breite und linearischen Abstand. — Die Lage zweyer Ebenen gegen einander wird durch die Lage ihrer Durchschnittslinie und durch den Neigungswinkel bestimmt.

Leibnitz hat, wie Wolf in der Abhandlung de studio mathematico, §. 144. Elem. Mathes. T. V. anführt, in der neuern Analysis noch eine Rechnung der Lage (calculum situs) vermißt, die von der Rechnung der Größen ganz verschieden seyn müßte, welche aber weder von ihm, noch von andern ausgeführt worden sey. Wolf bemerkt bey dieser Gelegenheit, daß die algebraische Rechnung sich mit Größen, nicht mit der Lage beschäftige. Inzwischen mag man wohl behaupten, daß die trigonometrische (goniometrische) Rechnung, wie sie gegenwärtig behandelt wird, nebst der vollständigen Anwendung der algebraischen Gleichungen auf alle geometrische Untersuchungen, die von Leibnitz verlangte, und von Wolf noch gewünschte, Analysis der Lage sey. Die Lage beruht auf Längen und Winkeln. Jenes sind ja Größen, und diese werden durch stellvertretende Größen angegeben. Winkel können mittelst der goniometrischen Linien addirt oder subtrahirt werden, nur daß dabey die Rechnung mehr Schwierigkeit macht, als die geometrische Zusammensetzung. Ob hier und bey der Vergleichung der Winkel durch eine besondere Analysis Erleichterung verschafft werden könne, kann man nicht entscheiden, da es sich überhaupt selten bestimmen läßt, was zu erfinden möglich sey oder nicht. Doch müßte jene Analysis unserer bisherigen analog seyn, um mit ihr in Verbindung gebracht werden zu können. In dem mathem. Lexicon, Leipzig 1734, Artik. Lagerechnung, wird angeführt, daß Leibnitz von seiner Analysis der Lage bloß mündlich gegen Wolf etwas geäußert habe.

Digitized by Google

Es verdient angemerkt zu werden, daß Lambert, der mehrere von Leibnitz hingeworfene Ideen, z. B. die einer allgemeinen philosophischen Sprache, aufgefaßt und auszuführen gesucht hat, der Leibnitzischen Lagerechnung in seinen zahlreichen Schriften nie erwähnt. Soll man dies als ein Zeichen ansehen, daß er Leibnitzens Idee für nichts weiter als für eine Idee genommen hat?

D'Alembert sagt in der Encyclopédie, art. Situation: Die Analysis der Lage ist allerdings etwas, das der gewöhnlichen Algebra fehlt. Daher scheint eine Aufgabe oft mehr Auflösungen zu haben, als sie bey den eingeschränkten Bestimmungen, mit welchen man sie betrachtet, haben muß. Er führt hierauf zum Beyspiele die Aufgabe an, welche in diesem Wörterbuche, Th. I. Anwendung der Analysis auf die Geometrie, 8. Aufg. aufgelöset ist. Dann fährt er fort: "es ist wahr, daß dieser Reichthum der Algebra, wodurch sie mehr giebt, als man verlangt, bewundernswerth und in mehreren Rücksichten vortheilhaft ist; aber eben dadurch wird oft für eine Aufgabe, die nach dem strengen Wortverstande nur eine Auflösung zuläßt, eine Gleichung mit mehreren Abmessungen gefunden, und kann dadurch gewissermaßen nicht auflösbar werden. Es wäre zu wünschen, daß man Mittel fände, die Lage mit in die Rechnung zu bringen; dadurch würde diese meistens sehr abgekürzt werden; aber der Zustand und die Beschaffenheit der Analysis scheinen dieses nicht zu gestatten."

Ich sehe es unbedingt als eine merkwürdige und schätzbare Eigenschaft der Algebra an, daß sie die vorgelegte Frage berichtigt, wenn sie in einem zu eingeschränkten Sinne abgefaßt ist. Mag doch der Fragende unter allen Auflösungen diejenige herausſuchen, welche ihm nach seinen besondern Absichten die passende ist. Von dieser Art sind die Aufgaben, welche d'Alembert in dem angeführten Werke, am Ende des Artikels, équation, angiebt. Eher möchte hieher die Aufgabe von dem Stoße mehrerer Körper auf einen zugleich gehören. Dynamique, par d'Alembert, art. 176. 2de édit.

Digitized by Google

Carnot in seiner Géométrie de position (à Paris 1803. 489 pages in 4. 15 pl.) bemerkt in der Einleitung, daß der Gegenstand seines Werkes von dem Zwekke der Analysis der Lage zwar verschieden, aber doch demselben analog sey. Leibnitz wollte, sagt er hierauf, daß man in den Ausdruck der Bedingungen einer geometrischen Aufgabe die Verschiedenheit in der Lage der gleichnamigen (correspondirenden) Theile der verglichenen Figuren einführen sollte, damit man, wenn sie durch einen gut auszeichnenden Charakter wären gesondert worden, sie desto leichter in der Rechnung einzeln darstellen könnte (isoler). Nun aber werde diese Verschiedenheit der Lagen oft durch bloße Veränderungen der Zeichen + und — angegeben; und gerade die Theorie dieser Veränderungen sey es, welche den Gegenstand seiner Untersuchungen ausmache, und die er Géométrie de position nenne.

Wenn dieses Leibnitzens Meinung mit der Lagenrechnung war, so, dächte ich, wäre sie durch die trigonometrische und analytisch-geometrische Rechnungs-Methode, nach ihrer gegenwärtigen Behandlungsart, völlig erreicht. Allein Leibnitz scheint eine unmittelbare Einführung der Lagen in die Rechnung sich als möglich gedacht zu haben.

Von Carnots Werke wird einige Nachricht hier dem Leser willkommen seyn, da ich in den Artikeln, Anwendung der Analysis auf die Geometrie, und entgegengesetzte Größen, noch nichts darüber mittheilen konnte. Des Verfassers Zweck war, eine neue Behandlungsart bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie anzugeben, wodurch diese Verbindung eine weitere Ausdehnung erhielte. Ihm sey Géométrie de position une théorie, dont l'objet spécial est d'exprimer en effet, par des tableaux comparatifs, dans des figures de même genre la diversité de positions de leurs parties correspondantes, après avoir préalablement formé le tableau général de leurs propriétés communes. Ich gebe hier die eigenen Worte des Verfassers, um seinen Sinn auch nicht im geringsten verfehlen zu lassen. Die

Digitized by Google

Vergleichungstafeln stellen den Zusammenhang der Beziehungen dar, die zwischen den verschiedenen Theilen derselben Figur vorhanden sind, und die Abänderungen, wodurch sich die darauf bezogenen Figuren sowohl von jenen, als eine von der andern unterscheiden. Es sind dabey noch besondere Zeichen eingeführt, um die verschiedene Lage der Theile auch ohne Anschauung der Figur darzustellen. Der Vf. fand, wie es sehr natürlich ist, bey der Anwendung der Lehre von den entgegengesetzten Größen, so wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, nach welcher sie solche sind, die zusammengerechnet sich einander ganz oder zum Theil aufheben, Schwierigkeiten. Dadurch gerieth er auf die andere Art der Entgegensetzung, nämlich die in den verschiedenen Verbindungen mehrerer zusammengehörigen Größen, die sich in weiter nichts unterscheiden, als durch die Art, womit die Größen in die analytischen Formeln in Rücksicht auf Addition oder Subtraction eingehen. Was in diesem Wörterbuche, Art. entgegengesetzte Größen, Normalfall heißt, nennt Carnot Système primitif, und die damit verwandten, aus jener durch bloße Veränderung in den Vorzeichen einer oder mehrerer in den analytischen Formeln vorhandenen Größen abgeleiteten, Fälle nennt er Systêmes corrélatifs. Bey der Bestreitung der gewöhnlichen Vorstellung in der vorläufigen Abhandlung wird Carnot die Entgegensetzung darin noch nicht allgemein genug betrachtet haben, daß er sie auf den Fall einschränkt, da zwey Linien von einem Puncte aus nach entgegengesetzten Richtungen genommen werden, da sie auch Statt findet, wenn sie nach derselben Richtung gezogen sind, aber in Beziehung auf eine andere, als positiv betrachtete, Linie entgegengesetzte Lage haben.

Das Werk enthält außer eigenen neuen, die Polygone und Polyedren betreffenden Sätzen noch manche von ältern Geometern aufgenommene, hier neu bewiesen. Es ist allen denen sehr zu empfehlen, welche die Anwendung der Algebra auf die Geometrie studieren wollen.

Digitized by Google

Lambertiſche Reihe iſt eine Reihe, welche aus dreygliedrigen algebraiſchen Gleichungen eine ihrer Wurzeln darſtellt. Lambert hat ſie in den Abhandlungen der Baſeler Geſellſchaft, die den Titel: Acta helvetica physico-mathematico-botanico-medica, haben, im dritten Theile angegeben. Ich führe ſie hier aus einer Abhandlung von Euler, Observationes circa radices aequationum, Novi Comment. Acad. Petrop. T. XV. an.

Es ſey $1 = \frac{A}{y^{\alpha}} + \frac{B}{y^{\mu}}$, ſo iſt

$$y = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{1+\lambda-2\mu}{2\lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2$$

$$+ \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2.3\lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2.3.4\lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4$$

$+$ etc.

In dem Artikel, Reihe, wird der Beweis von dieſer Formel gegeben werden, und zwar als eines beſondern Falles einer allgemeinen Aufgabe für vielgliedrige Gleichungen.

Euler kommt auf dieſe Reihe, die er als ſehr merkwürdig rühmt, durch die Unterſuchung über die Formeln für die Summen der Potenzen von den Wurzeln einer Gleichung, diejenigen, die in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis, 53. aufgeführt ſind, vergl. Artik. Combination, 43. Eulers Formel iſt aber viel zuſammengeſetzter als die dortige. Man gebe der Reihe an dem erſtern Orte, außer der Einheit nur zwey Glieder, und ſetze ſie $= 0$, ſo erhält man eine Gleichung von der Form der Lambertiſchen. Die Formeln daſelbſt geben die Summe der Potenzen von a, b, c, d, etc. deren reciproke Werthe entgegengeſetzt genommen, nämlich $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$,

Digitized by Google

$-\frac{1}{d}$, etc. die Wurzeln der Gleichung ſind. Allein es iſt wohl zu merken, daß jene Formeln ganze Potenzen der Wurzeln vorausſetzen, und nicht geſtatten, die Exponenten von A, B, C, D, etc. negativ, oder dieſe als Diviſoren zu nehmen, um die Reihen ohne Ende fortzuſetzen. Es verbietet dieſes auch die Geſtalt der Formeln, welche von ſelbſt mit dem nten Gliede abbrechen, da das nächſtfolgende den Diviſor o erhalten würde. Dieſes darf man nicht überſpringen, da es entweder unendlich groß ſeyn würde, wenn der Dividendus endlich iſt, oder unbeſtimmt, wenn dieſer Null iſt. Euler läßt die Reihe für x^n, die er aus der Gleichung, $1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$ hergeleitet hat, unendlich fortlaufen, welche aber nun, wie er zu erweiſen ſucht, nicht ein Aggregat von Potenzen, ſondern die nte Potenz der größten Wurzel iſt. Dieſe Verwandlung iſt doch befremdend. Wie die Sache ſich verhalte, will ich an einem Beyſpiele zeigen.

Es ſey $(1 + az)(1 + bz)(1 + cz) = 1 + Az + Cz^2$, weil der Coefficient von z^2 Null ſeyn ſoll. Zufolge der Formeln (Combinat. Analyſis, 53.) iſt

$$a^n + b^n + c^n = \frac{n}{n} A^n + \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-2.}{1} A^{n-2} C$$
$$+ \frac{n}{n-4} \cdot \frac{n-4.n-5.}{1.2} A^{n-6} C^2$$
$$+ \frac{n}{n-6} \cdot \frac{n-6.n-7.n-8.}{1.2.3} A^{n-9} C^3 + \text{etc.}$$

Die Verſetzungszahlen der Combinationen von A und C ſind der zweyte Factor des Coefficienten, worin der höchſte partielle Factor gegen den Diviſor in dem erſtern Factor ſich aufhebt. Hier ſind, wie ſchon bemerkt iſt, $-\frac{1}{a}$,

Digitized by Google

$-\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}$ die Wurzeln der Gleichung, $1 + Az + Cz^3 = 0$. Man ſetze $z = -\frac{1}{x}$, ſo ſind a, b, c die Wurzeln der Gleichung, $1 - \frac{A}{x} - \frac{C}{x^3} = 0$, oder dieſer, $x^3 - Ax^2 - C = 0$. Hieraus ergiebt ſich, mittelſt der Umwandlungs- oder Umkehrungsformel, in dem Artikel, Reihe,

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n.n-5.}{1.2} A^{n-6}C^2 + \frac{n.n-7.n-8.}{1.2.3} A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

Dieſes iſt allerdings dieſelbe Reihe, wie die für $a^n + b^n + c^n$; allein darum haben beide Reihen nicht gleiche Werthe. Es kann x^n nicht dem Aggregat der drey Potenzen gleich ſeyn, da x eine der a, b, c iſt. Allein die Reihe für das Aggregat bricht ab, wenn der Exponent von $C = \frac{n}{3}$ oder die nächſt kleinere ganze Zahl iſt. Die Reihe für x^n geht ins Unendliche fort. Jene bis zu ihrem letzten Gliede fortgeſetzt giebt den vollſtändigen Werth des Aggregats; dieſe nur einen genährten einer der Wurzeln, oft nur einen ſich wenig annähernden, oder wohl gar divergirenden. Es kommt dabey auf die Beſchaffenheit von $\frac{C}{A^3}$ an. Die Coefficienten nehmen zuerſt ab, wachſen aber weiterhin immer fort.

Später hin hat Euler die Lambertiſche Reihe noch einmahl vorgenommen, in den Actis Acad. Petrop. T. III. P. II. a. a. 1779. De serie Lambertina ejusque insignibus proprietatibus. Er giebt der trinomiſchen Gleichung dieſe Form,

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) \sqrt{x^{\alpha+\beta}}.$$

Digitized by Google

Daraus iſt

$$x^n = 1 + nv + \tfrac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \text{etc.}$$

Man vergleiche noch Resolution des équations numériques, par la Grange, Note XI. p. 248. *f.*

Lateralis acquatio iſt daſſelbe was eine einfache Gleichung oder eine vom erſten Grade. Dieſe hat nur eine Wurzel und kann durch bloße gerade Linien conſtruirt werden. Das Kunſtwort iſt veraltet; linearis würde ſchicklicher ſeyn.

Latus, Seite, iſt erſtlich die Seite einer geradlinigten Figur; zweytens die Wurzel einer Potenz, weil bey den Quadraten und Würfeln die Seiten derſelben in Zahlen ausgedruckt die Wurzeln der Zahlen ſind, welche den Inhalt des Quadrats und des Würfels angeben.

Latus rectum iſt bey Kegelſchnitten der Parameter; Latus transversum iſt die Hauptaxe an der Ellipſe und Hyperbel. Griechiſch nach Apollonius, der dieſe Benennungen eingeführt hat, ἡ ὀρθία und ἡ πλαγία. Jener giebt er in ſeiner Conſtruction eine auf dieſe ſenkrechte Lage: dieſe iſt gegen die Grundfläche des Kegels ſchief. Apoll. Con. Libr. I. prop. 12. 13.

Latus mecodynamicum kommt in der Schifffahrtskunſt vor, worin dadurch der Unterſchied der Länge zweyer Örter angegeben wird.

Lehnſatz, ſ. Lemma.

Lehrſatz, Theorema, ein Satz, der aus vorher erwieſenen Sätzen auf eine genaue, und man mag auch hinzuſetzen, kunſtgerechte, Art erwieſen wird. Von den Beweiſen ſ. den Artik. Beweis.

Digitized by Google

Lemma ist bey den alten Geometern ein Hülfssatz, der nicht in den gemein bekannten Elementen enthalten aber zum Erweise eines vorgetragenen Satzes nöthig ist. Pappus hat zu dem Werke des Apollonius von den Kegelschnitten und zu andern geometrischen Schriften der Alten Lemmata mit den Beweisen geliefert. Diese unterscheiden sich gänzlich von den Erläuterungen, die Eutocius den Schriften des Archimedes und Apollonius beygefügt hat.

Lemma heißt aber auch nun überhaupt ein Satz, der nicht unmittelbar in die Reihe der Sätze und Aufgaben, mit welchen man sich beschäftigt, gehört, aber zum Erweise oder Verständniß derselben nöthig ist. So kann man in der analytischen Geometrie einen Satz aus der Algebra, der Analysis oder der Trigonometrie gebrauchen; in der angewandten Mathematik Sätze aus der reinen, oder aus einem andern Zweige derselben. In dem letztern Sinne, da man aus einer andern Gattung von Lehren eines Satzes benöthigt ist, kann man nur Lemma durch Lehnsatz übersetzen. Das griechische Wort λημμα kommt her von λαμβανειν, nehmen.

Lemniscata ist eine krumme Linie des vierten Grades, deren Gleichung ist $(xx+yy)^4 = aa(xx-yy)$. Sie hat die Gestalt der Ziffer ∞, und zwar in der angegebenen Lage, wenn die Abscissen x auf der Durchschnittslinie nach der Länge genommen werden. Nämlich, wenn der Anfang der Abscissen in den gemeinschaftlichen Punct beider Theile gesetzt wird, so sind für gleiche und entgegengesetzte x gleiche und entgegengesetzte y auf beiden Seiten. Ist $y = 0$, so ist entweder $x = 0$, oder $x = a$, so daß $2a$ der größte Durchmesser ist. Die Benennung bezieht sich auf die Gestalt der Curve. Lemniscus heißt im Griechischen die Schleife an einem Bande, womit ein Kranz oder dergleichen befestigt ist.

Jakob Bernoulli ist zuerst auf die Lemniscata gerathen, als er eine algebraische Curve suchte, mittelst de-

Digitized by Google

ren er die Isochrona paracentrica construiren könnte. (Acta Erud. 1694. Sept. Oper. T. I. Nro. LX.). Der Conte Fagnano, dessen analytische Untersuchungen im 2ten Th. S. 771. angeführt sind, fand, daß in der Lemniscata sich unzählig viele Paare von Bogen angeben lassen, die einander entweder gleich sind, oder von welchen der eine doppelt so groß als der andere ist. Daraus leitete er ein Verfahren her, auch für manche andere Verhältnisse die Bogen anzugeben. Euler hat dieses noch weiter getrieben, und Formeln gefunden, die es für irgend ein Verhältniß der Bogen leisten, in einer Abhandlung: Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. Novi Comm. Ac. Petrop. T. VI. a. a. 1756. 1757.

Das Interesse der Untersuchung beruht hier bloß auf der Schwierigkeit. Die Bogen einer Curve mögen für sich allein sich nicht rectificiren, oder mit einer gegebenen geraden Linie vollständig vergleichen lassen, allein dem ungeachtet mag es möglich seyn, darauf Bogen anzugeben, die ein rationales Verhältniß haben. So ist die Lunula Hippocratis mit dem Quadrate des Halbmessers vergleichbar, obgleich die ganze Kreisfläche es nicht ist. Fagnano fand, daß dieses in den drey Curven, der Ellipse, der Hyperbel und unserer Lemniscata geschehen kann.

Man setze in der Gleichung für diese Curve $a = 1$, und $xx + yy = zz$, so ist

$$z^4 = xx - yy = 2xx - zz = zz - 2yy.$$

Daraus ist

$$x = z\sqrt{\frac{1+zz}{2}}; \qquad y = z\sqrt{\frac{1-zz}{2}}.$$

Die Differentiation giebt

$$\partial x = \frac{(1+2zz)\,\partial z}{\sqrt{2(1+zz)}}; \qquad \partial y = \frac{(1-2zz)\,\partial z}{\sqrt{2(1-zz)}}.$$

Das Differential eines Bogens, dessen Coordinaten sind x und y, ist $= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, s. Rectification. Folg-

Digitized by Google

lich ist das Differential eines Bogens der Lemniscata, nach gehöriger Reduction der beiden Brüche auf einen Nenner,

$$\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)} = \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}.$$

Diese Differentialformel läßt sich nicht integriren. Man löse sie in zwey Factoren auf, $\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Verwandelt man den ersten Factor der ersten Form in eine Reihe, so hängt das Integral der ganzen Reihe vom Kreise ab; nimmt man dasselbe mit der zweyten Form vor, so hängt das Integral von den Logarithmen ab. Das Integral ist also eine eigenartige Größe, die weder durch Rectification des Kreises noch durch logarithmische Functionen ausgedruckt werden kann.

Es sey CMNA (Fig. 110.) ein Quadrant der Lemniscata, wo C der Mittelpunct ist. Zu dem Puncte M gehören die Abscisse CP = x; PM = y, die Chorde CM = z. Eine andere Chorde sey CN = u, so ist der Bogen $CM = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, und Bogen $CN = \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Nun ist die Frage, welche Function von z die Größe u seyn müsse, damit der Bogen CM dem Bogem AM gleich sey. Dieses trifft ein, wenn man nimmt $u^2 = \frac{1-zz}{1+zz}$. Denn daraus ist erstlich $u\partial u = -\frac{2z\partial z}{(1+zz)^2}$, und wenn durch den Werth von u dividirt wird, $\partial u = -\frac{2z\partial z}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$.

Digitized by Google

Ferner ist $u^4 = \frac{1-2z^2+z^4}{1+2z^2+z^4}$, also $1-u^4 = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$, und $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{2z}{1+zz}$. Die Substitution dieser Werthe giebt den Bogen . .

$$CN = -\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} + \text{Const.} = -\text{Bog. CM} + \text{Const.}$$

Folglich ist B. CN + B. CM = Const. In dem Puncte C ist $z = 0$. Für diesen Werth von z ist $u = 1 = CA$. Also ist Const. = Bog. CMNA. Demnach ist B. CN + B. CM = B. CMNA, und B. CM = B. AN.

Nimmt man die Chorde des Bogens $CN = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, so ist $\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, daher der B. CN = 2 B. CM.

Für höhere Vielfache wird die Function von z viel zusammengesetzter, weßwegen Liebhaber dieser Untersuchungen die Eulerische Abhandlung nachsehen müssen.

Die Tangente des Winkels, welchen die berührende mit der Abscissenlinie macht, ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-2zz}{1+2zz} \cdot \sqrt{\frac{1+zz}{1-zz}}$. Für $z = 0$ ist dieser Quotient $= 1$; die Curve schneidet die Abscissenlinie in C unter einem halben rechten Winkel, wie voraus zu sehen war.

Es sind mehrere Curven, welche die Form einer Schleife oder wie die Ziffer 8 haben. Die Gleichung $ay = x\sqrt{(aa-xx)}$ giebt eine solche. Diese Curve läßt sich leicht quadriren. Es ist nämlich $ay\partial x = x\partial x\sqrt{(aa-xx)}$, wovon das Integral ist $-\frac{1}{3}(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \text{Const} = -\frac{1}{3}(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^3$, wenn die Area mit $x = 0$ anfängt. Die unbestimmte

Digitized by Google

Area ist $= \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}\left(a - \frac{xx}{a}\right)\sqrt{(aa-xx)}$.

Der ganze Flächenraum ist $= \frac{4}{3}a^2$.

Die zuerst betrachtete Lemniscata, welche wegen der Eigenschaft ihrer Bogen eigentlich die merkwürdige ist, läßt sich auch quadriren. Die etwas weitläufigere Rechnung wird zum Beyspiele in dem Artikel, Quadratur, verspart.

Die Cassinische Curve (s. Cassinoide) nimmt in einem Falle auch eine Figur wie die Ziffer 8 an.

Limes, s. Gränze. Zu diesem Artikel mag hier noch folgendes beygefügt werden.

Gränzen einer Wurzel in ganzen Zahlen, sind diejenigen ganzen Zahlen, zwischen welche eine oder auch mehrere Wurzeln enthalten sind. Wie sie gefunden werden, ist in dem Artik., Gleichung, 231. gewiesen.

Gränzen einer unbestimmten Aufgabe sind diejenigen Werthe der einen unbestimmten Größe, zwischen welchen alle ihre möglichen Werthe enthalten sind. Eine solche Aufgabe heißt selbst Problema limitatum. Z. B. wenn $ay = x\sqrt{(aa-xx)}$, wie an der einen Lemniscata, so kann $+y$ nicht größer als $\frac{1}{2}a$ werden, weil für größere Werthe von y die Gleichung für x unmögliche Wurzeln erhält. Auch kann x nicht größer als a genommen werden, weil sonst die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist. Alle Ordinaten an Curven, die in sich wiederkehren, haben beschränkte Werthe für die Coordinaten.

Eine limitirte, oder begränzte, Aufgabe ist auch eine zwar bestimmte Aufgabe, die aber nur eine einzige Auflösung, oder eine gewisse Anzahl Auflösungen zuläßt, wohin alle Aufgaben gehören, welche auf bestimmte Gleichungen führen. Z. B. ein Dreyeck in zwey Theile nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, so daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct in der Ebene des Dreyecks gehe, wobey nur zwey Auflösungen möglich sind,

Digitized by Google

dagegen ohne diese Bedingung unzählig viele Lagen der theilenden Linie Statt haben.

Linearisch wird von Zahlen, von Aufgaben und von Gleichungen gebraucht.

Eine **linearische Zahl** ist eine solche, die geometrisch durch eine gerade Linie vorgestellt wird, dagegen Flächenzahlen und Körperzahlen durch Flächen und Körper abgebildet werden. Dieses ist gegenwärtig veraltet.

Eine **linearische Aufgabe** ist eine solche, welche geometrisch durch den Durchschnitt zweyer geraden Linien aufgelöset werden kann. Von dieser Art sind alle Aufgaben, welche nur auf Gleichungen vom ersten Grade führen.

Eine **linearische Gleichung** zwischen zwey veränderlichen Größen ist eine solche, worin die eine derselben nur in der ersten Potenz vorkommt, dergleichen $Py + Q = 0$ ist, wo P und Q Functionen von der andern veränderlichen Größe x allein sind.

Eine **linnarische Differentialgleichung** ist eine solche, worin die eine der veränderlichen Größen und ihr Differentiale bloß in der ersten Potenz vorkommen, als diese: $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, wo P und Q Functionen von x allein sind. Auch mag die andere ebenfalls bloß in der ersten Potenz vorhanden seyn, wie in der Gleichung $(\alpha + \beta x + \gamma y)\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\partial y$. Wie eine solche Differentialgleichung des ersten Grades aufgelöset wird, ist in dem Artikel, Integralgleichung, 10, 37. gewiesen, an dem erstern Orte durch Sonderung der veränderlichen Größen, an dem andern durch Hinzusetzung eines integrirenden Factors. Die Integration einer solchen Differentialgleichung vom zweyten Grade ist daselbst, 94. 95. gelehrt. Von höhern Differentialgleichungen sind eb. das. 101. die vornehmsten Schriften angezeigt. Dazu nehme man noch eine Abhandlung von Condorcet in den Mém. de l'Ac. de Paris, 1769.

Man hat auch **linearische Gleichungen mit endlichen Differenzen** besonders untersucht, wie es

Digitized by Google

von la Grange in den Miscell. Taurinenſ. T. I. und von la Place daſelbſt T. IV. geſchehen iſt. Von lineariſchen Gleichungen mit endlichen und unendlich kleinen Differenzen giebt Condorcet eine Methode der Auflöſung an, in dem Dictionn. encycl. mathém. art. Linéaire. Daſelbſt auch von lineariſchen Gleichungen mit endlichen und partiellen Differenzen.

Linie iſt eine Länge ohne Breite. So erklärt Euklides die Linie. Sie hat nur Theile, die auf einander folgen, nicht zugleich neben einander liegen. Wenn man auf die Entſtehung dieſes Begriffs Rückſicht nehmen will, ſo iſt die Linie die Gränze der Fläche, abgeſondert von der Fläche gedacht. Daher hat ſie keine Theile neben einander zugleich mit denen nach und vor einander, weil ſie ſonſt einen Theil der Fläche ausmachte. Eine Linie iſt eine Größe von einer Dimenſion oder Abmeſſung, ſo wie eine Fläche eine Größe von zwey, ein Körper von drey Dimenſionen iſt.

1. Die Linien ſind entweder gerade oder krumme. Die krummen ſind entweder einfach krumme, (die in einer und derſelben Ebene liegen), oder gedoppelt krumme, ſolche, von welchen kein Theil in einer Ebene liegt, ſ. krumme Linien von gedoppelter Krümmung.

2. Die gerade Linie iſt diejenige, welche zwiſchen den auf ihr befindlichen Puncten gleichförmig (auf einerley Art) liegt. So erklärt ſie Euklides, deſſen Erklärung ich im Original hieher ſetze, weil ſie nicht immer richtig überſetzt wird. Εὐθεια γραμμη ἐξιν, ἥτις ἐξ ἰσουτοις ἐφ' ἑαυτης σημειοις κειται. Die Gleichförmigkeit der Lage der Theile iſt es, was die gerade Linie von den krummen unterſcheidet. In der geraden Linie haben nicht allein die an einander gränzenden, ſondern auch abgeſonderte Theile einerley Lage gegen einander, wenn die Zwiſchenräume gleich groß genommen werden. Bey ungleichen Zwiſchenräumen iſt die Verſchiedenheit des Ab-

Digitized by Google

standes der Theile von einander das einzige unterscheidende in der Lage.

3. Diese Identität in der Lage der Theile einer geraden Linie gegen einander, sowohl der benachbarten als der entfernten, ist die Ursache, warum es sich nicht zeigen läßt, wie sie gezeichnet oder construirt werden kann. Der kleinste Theil ist wie der größere beschaffen; von keiner andern Größe oder Lage abhängig, wie es schon bey dem Kreise, der einfachsten Figur nach der geraden Linie, der Fall ist. Euklides setzt es daher als Postulate an, von jedem Puncte bis nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen; desgleichen eine gerade begränzte Linie stetig gerade fort zu verlängern. Das heißt, man muß den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. Sie ist eine ursprüngliche Vorstellung des reinen Verstandes, die nicht aus der Erfahrung geschöpft wird. Ein straff ausgespannter Faden versinnlicht nur den Begriff, aber giebt ihn uns nicht. Wir nennen einen solchen Faden gerade, weil wir an ihm die ideale Gleichförmigkeit der Lage seiner Theile sehen. Wenn wir den abstracten Begriff von gleichförmiger Lage nicht hätten, so würden wir an einem straffen Faden oder einem geraden Stocke nichts als einen Faden oder Stock erblicken, wie es ohne Zweifel selbst bey dem Elephanten oder einem andern wohl unterscheidenden Thiere der Fall ist.

4. Auf der Gleichförmigkeit der Lage in einer geraden Linie beruht es, daß zwischen zwey Puncten nur Eine gerade Linie Statt findet, oder daß sie durch zwey Puncte in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung völlig bestimmt (individualisirt) wird. Gäbe es mehrere gerade Linien zwischen zwey Puncten in derselben Ebene, so würde ihre Verschiedenheit von der Ungleichheit in der Lage der Theile entstehen; es wären keine gerade Linien.

Eine krumme Linie hingegen kann man, ohne ihre Figur zu ändern, durch zwey gegebene Puncte derselben in unendlich viele Lagen bringen. Dabey aber ist uns die Vorstellung von einer Linie durch jene zwey Puncte gegenwärtig, welche sich nicht dreht, das ist von einer geraden,

Digitized by Google

der nur auf eine einzige Art zwischen den beiden Puncten möglichen Linie.

5. Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwey Puncte, in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung nur auf eine einzige Art gezogen werden kann. Zwey Puncte durch eine gerade Linie verbinden, heißt dann, diejenige Linie zwischen ihnen sich gedenken, welche nur auf eine einzige Art zwischen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene gerade Linie verlängern, heißt nur, ihre Begränzung aufheben. Diese Vorstellungen scheinen die griechischen Geometer bey den Beweisen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklärung der geraden Linie leitet Euklides etwas her, sondern aus dem Grundsatze, daß zwey gerade Linien keinen Raum einschließen. Das ist aber im Grunde nichts anders als der Satz, es ist nur eine einzige gerade Linie zwischen zwey Puncten. Die Erklärung der geraden Linie steht inzwischen nicht bloß wegen der methodischen Form da, sondern sie dient, den abstracten Begriff von der geraden Linie zu erwecken, und den Geist von den groben sinnlichen Vorstellungen abzuziehen.

6. Man hat es auch zum auszeichnenden Merkmahl der geraden Linie gemacht, daß sie die kürzeste sey, die sich zwischen zwey gegebenen Puncten ziehen läßt. Daß sie kürzer ist als eine aus geraden Linien zusammengesetzte zwischen denselben Endpuncten, läßt sich aus Euklides I. 20. vollkommen beweisen, braucht also nicht zur Erklärung gemacht zu werden. Daraus läßt es sich auch für krumme Linien zeigen, wenn diese als Gränzen einer aus geraden Linien zusammengesetzten betrachtet werden. (Vergl. Bogen). Allein Archimedes läßt sich hierauf nicht ein. In der Vorrede zu den Büchern über Kugel und Cylinder sagt er: Ich nehme an (λαμβανω δε), daß unter den Linien, die durch dieselben Puncte begränzt werden, die gerade die kürzeste ist; daß die übrigen, so fern sie in einer und derselben Ebene liegen, ungleich sind; ferner, daß von Linien, die nach derselben Seite hin hohl sind, diejenige,

Digitized by Google

welche von der andern und der geraden durch die gemeinschaftlichen Endpuncte eingeschlossen wird, die kleinere ist.

7. Proklus in seinem Commentar über das erste Buch des Euklides sagt, es werde durch dessen Erklärung der geraden Linie angezeigt, daß die gerade Linie allein es sey, welche dem Abstande zwischen zwey Puncten auf derselben gleich ist. Allein dieses ist in der That eins durch das andere wechselseitig erklären. Er führt noch verschiedene Erklärungen der geraden Linie an, als daß sie nicht eine solche sey, die zum Theil in einer Ebene, zum Theil außer derselben liege; daß alle ihre Theile auf einerley Art mit einander zusammen treffen (similiter congruunt, in der lateinischen Übersetzung); daß sie durch ihre Endpuncte ganz bestimmt wird; daß sie ihre Lage nicht ändert, wenn ihre Endpuncte unverrückt bleiben; daß sie mit einer ihr gleichartigen Linie (quae specie similis est) keinen Raum einschließt. Alles dieses, fügt er hinzu, drückt Eigenschaften der geraden Linie aus, welche darauf beruhen, daß sie einfach ist, und den kürzesten Weg von einem Endpuncte zum andern ausmacht. Plato's Erklärung der geraden Linie, daß sie diejenige sey, in welcher die mittleren Puncte die äußern beschatten, scheint dem Proklus zu behagen, weil sie ein Bild abgebe, wie in der wirklichen Welt die Wirkungen von den ersten Ursachen durch die Mittelursachen abhangen. Als ein Neuplatonischer Philosoph macht er die gerade Linie zum Symbol der unveränderlichen, unbefleckten, unaufhörlichen, allmächtigen, in allen Dingen wirksamen Vorsicht; den Kreis zum Symbol der in sich selbst zurückgewandten Wirksamkeit, die nach einem verständigen Zwecke alles regiert. Da nun der höchste Werkmeister aller Dinge diese beide Principien, das Gerade und das Kreisförmige, in sich selbst erzeugt hatte (praeposuisset), so brachte er zwey Einheiten aus sich hervor, von welchen die eine kreisförmig wirkt, und den Grund der verständigen Wesen enthält; die andere geradlinicht wirkend die sinnlichen Dinge entstehen läßt. Da aber die Seele (die Weltseele) ein Mittelding zwischen verständigen Wesen

Digitized by Google

und sinnlichen Dingen ist, so sey diese, so fern sie mit einer verständigen Natur in Verbindung steht, kreisförmig wirksam; so fern sie das Sinnliche regiert, sorge sie für dessen Wohlseyn geradlinicht.

Ich würde diese Spielerey nicht angeführt haben, wenn sie nicht in Absicht unserer neuesten, auf ähnliche Art spielenden Philosophie, eine Bestätigung der Bemerkung giebt, daß nicht leicht von einem neuern Philosophen etwas wunderliches hervorgebracht werden könne, welches nicht schon ein älterer gesagt hätte. Auch sieht man, wie sehr die Mathematik zu Proklus Zeit gesunken war, daß sie sich zu solchen Albernheiten hergeben mußte.

8. Die Lage zweyer geraden Linien in einer Ebene gegen einander wird durch die Theile derselben schon bestimmt wenn sich diese, als begränzt gedacht, auch nicht schneiden. Ihre Lage ist, ohne Rücksicht auf ihren Abstand, dieselbe mit der Lage der sich schneidenden Theile. Auch ist die Länge der Schenkel eines Winkels zweyer geraden Linien etwas ganz gleichgültiges für die Größe desselben. Hingegen bey krummen Linien, die sich in einem Puncte schneiden, kann ihre Lage daselbst gegen einander aus der Lage der noch so wenig entfernten Theile nicht bestimmt werden. Es geschieht durch die Lage der sie daselbst berührenden geraden. S. Winkel.

9. Wenn zwey gerade Linien, A, B, nicht in einer Ebene liegen, so läßt sich ihre Lage gegen einander nur durch eine vermittelnde gerade C bestimmen. Man ziehe nämlich durch einen Punct der einen, A, eine parallele C mit der andern B, so wird durch den Winkel der beiden Linien, A und C, und die Lage der Ebene, worin B und C liegen, nebst dem Abstande der B und C, die Lage von B gegen A offenbar.

Der Winkel der Linien A und C ist zugleich der Winkel der geraden A und B, die nicht in einer Ebene liegen. So wie der Winkel verschiedener Parallelen in einer Ebene mit einer sie schneidenden geraden derselbe ist, wie auch die Durchschnittspuncte liegen,

Digitized by Google

so ist auch der Winkel aller parallelen, die in verschiedenen Ebenen sich befinden, mit einer ihnen nicht parallelen gleich dem Winkel, den eine von ihnen, die mit letzterer in einer Ebene liegt, mit derselben macht. Auf die Lage im ganzen Raume kommt es in beiden Fällen nicht an. Ein Beyspiel findet sich in der Parallaxenrechnung, Astron. Jahrbuch für 1800. S. 135.

10. Die Behandlung aller Linien geschieht entweder geometrisch, oder analytisch. Jene gebraucht die geometrischen Elementarlehren nebst der Lehre von den Proportionen, und die darauf gegründeten geometrischen Sätze; diese die allgemeinen Rechnungsmethoden, oder die Analysis, insbesondere die Eigenschaften der Gleichungen, und die trigonometrischen Formeln. Die analytische Methode greift viel weiter als die geometrische, besonders wegen der Hülfsmittel, welche die Analysis des Unendlichen an die Hand giebt.

11. Die Analysis stellt die Lage der Puncte jeder Linie durch Coordinaten dar. S. Coordinaten. Bey Linien, die ganz in einer Ebene liegen, werden zuweilen auch drey Folgen von Coordinaten gebraucht, wie bey krummen Linien von gedoppelter Krümmung, wenn nämlich mehrere mit einander verbunden sind, die nicht in derselben Ebene liegen. Alsdann ist es nöthig, für diejenigen, die nicht in der Grundebene liegen, drey Axen und drey Folgen der Coordinaten zu gebrauchen.

12. Da in den Artikeln von den krummen Linien die Methoden der analytischen Behandlung derselben gewiesen sind, so bleibt hier nur übrig, diese auch auf die gerade Linie anzuwenden. Diese gewährt theils eine veränderte Ansicht zur Bestimmung der Lage gerader Linien neben der geometrischen Bestimmungsart, theils ist sie nothwendig bey den Anwendungen der Analysis auf geometrische Fragen, da hier sowohl gerade als krumme vorkommen.

Analytische Betrachtung der geraden Linie.

13. Eine gerade Linie DD (Fig. 111.) schneide die Abscissenlinie XX' in C. Der Anfang der Abscissen sey

Digitized by Google

in A, die Ordinate daselbst AB; ein Paar Coordinaten AP und PM, so ist $AC : AB = CA + AP : PM$, und $PM = \frac{AB}{AC}$. $AP + AB$. Es sey $\frac{AB}{AC} = a$; $AB = b$; $AP = x$; $PM = y$, so ist die Gleichung für die gerade Linie,

$$y = ax + b.$$

Hier ist a die Tangente des Winkels, unter welchem die gerade Linie die Abscissenlinie schneidet, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist. Das gegebene Glied b der Gleichung bestimmt einen Punct der Linie; dieses und die Tangente a die Lage derselben völlig. Alle gerade Linien, in deren Gleichung der Coefficient von x derselbe ist, (wenn nämlich y zum Coefficienten die Einheit hat), sind sich parallel.

Die Größen a und b können auch entgegengesetzt oder negativ genommen werden. Dieses zeigt eine Lage an, welche der in der Figur gewählten entgegengesetzt ist. Ein negatives a bedeutet einen stumpfen Winkel ACB auf der Seite der positiven y, oder einen spitzen auf der Seite der negativen y. Ist b negativ, so liegt der Punct B auf der Seite der negativen y. Die Abscisse kann jeden Werth, positiven oder negativen, erhalten; dadurch wird die ganze unbegränzte gerade mittelst ihrer Gleichung dargestellt.

14. Man ziehe die Ordinate QN zu der Abscisse AQ, und Mm parallel mit PQ; setze $PQ = \Delta x$; $Nm = \Delta y$, so ist $\Delta x : \Delta y = AC : AB = 1 : a$. Dieses Verhältniß ist unveränderlich, und daher ist in der stetigen Folge der Coordinaten auch $\partial x : \partial y = 1 : a$, oder $\partial y = a\partial x$. Die Unveränderlichkeit des Differential-Verhältnisses charakterisirt die gerade Linie, wie die Veränderlichkeit eine krumme.

15. Vermittelst des Differential-Verhältnisses $\partial x : \partial y$ läßt sich die Lage einer krummen Linie in einem gegebenen Puncte derselben durch die Lage einer geraden darstellen. Die Coordinaten der krummen Linie seyn x und z, der ge-

Digitized by Google

raden x und y, bey einer gemeinschaftlichen Abscissenlinie mit demselben Anfangspuncte. An einer gemeinschaftlichen Ordinate, $z = y$, sey das Differentialverhältniß an der Curve, $\partial x : \partial z$ gleich dem $\partial x : \partial y$ an der geraden, so weicht unter allen geraden, durch den Endpunct der Ordinate gezogenen, jene gerade am wenigsten von der Curve ab, oder berührt sie. Denn an jeder schneidenden ist das Verhältniß der Differentiale gleich einem Verhältnisse endlicher Differenzen $\Delta x : \Delta z$ an der Curve, also von dem $\partial x : \partial z$ verschieden, daher jene gerade, an welcher $\partial x : \partial y$ gleich ist $\partial x : \partial z$, keine schneidende ist. Die schneidenden kommen der Curve zwischen den Durchschnittspuncten desto näher, je näher diese an einander fallen; die nicht schneidende, oder die berührende am nächsten. S. berührende Linie, 12.

16. Es seyn in einer Ebene zwey gerade Linien mittelst ihrer Gleichungen gegeben: I. $y = ax + \alpha$; II. $y' = bx + \beta$; es ist der Winkel derselben anzugeben.

Der Winkel der erstern mit der Abscissenlinie sey $= A$; der andere $= B$, so ist $\text{tang } A = a$; $\text{tang } B = b$. Nun ist $\text{tang } (A - B) = \frac{a - b}{1 + ab}$ (Goniometrie, 33.).

Durch diese Tangente wird der Winkel beider Linien, welcher $A - B$ ist, gegeben.

17. Wenn $ab = -1$ ist, so ist $\text{tang } (A - B)$ unendlich groß, und die beiden Linien schneiden sich rechtwinklicht.

18. In dem Durchschnitte beider ist

$$ax + \alpha = bx + \beta, \text{ also } x = \frac{\beta - \alpha}{a - b} = -\frac{\alpha - \beta}{a - b}.$$

Daraus ist y oder $y' = \frac{a\beta - \alpha b}{a - b}$.

19. Eine gerade CP (Fig. 112.) wird auf die Ebene AMN bezogen durch drey rechtwinklichte Coordinaten,

Digitized by Google

$AM = x$; $MN = y$, und $NP = z$. Sie treffe die Ebene der x, y in C; die durch sie und PN gelegte, auf die Ebene der x, y senkrechte Ebene CPN schneide diese in CN, und die CN die Linie der Abscissen x in B. Der Winkel der CP mit der Ebene der x, y ist PCN (Ebene, 27.). Es sey $AB = f$; $BC = g$; $ABN = \eta$; $PCN = \vartheta$, so ist

I. $y = (x + f) \operatorname{tang} \eta$.

II. $z = \left(g + \frac{x+f}{\operatorname{cos} \eta}\right) \operatorname{tang} \vartheta$.

Oder

I. $y = x \operatorname{tang} \eta + f \operatorname{tang} \eta$.

II. $z = x \cdot \frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{cos} \eta} + \frac{f + g \operatorname{cos} \eta}{\operatorname{cos} \eta} \operatorname{tang} \vartheta$.

Die erste Gleichung ist für die Projection der CP auf die Ebene der x, y; die zweyte für die Projection derselben auf die Ebene der x, z.

20. Sind nun zwey Gleichungen zwischen drey Coordinaten für eine gerade Linie gegeben, nämlich

I. $y = ax + \alpha$; II. $z = bx + \beta$,

so ist $\operatorname{tang} \eta = a$; $f \operatorname{tang} \eta = \alpha$; $f = \frac{\alpha}{a}$.

Ferner $\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{cos} \eta} = b$, also $\operatorname{tang} \vartheta = b \operatorname{cos} \eta$

$= \frac{b}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang} \eta^2)}} = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa)}}$. Oder auch, weil $\sin \vartheta = \frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang} \vartheta^2)}}$ ist,

$\sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa + bb)}}$.

Endlich ist $\frac{f + g \operatorname{cos} \eta}{\operatorname{cos} \eta} \operatorname{tang} \vartheta = \beta$, oder

Digitized by Google

$g \operatorname{col} \eta = \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}$, und $g = \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \times \sqrt{(1 + aa)}$.

21. Die Projection der geraden CP auf die Ebene der x, z mache mit der Axe der x den Winkel η', und der Neigungswinkel der CP gegen dieselbe Ebene sey ϑ', so ist $\operatorname{tang} \eta' = b$; und $\sin \vartheta' = \frac{\alpha}{\sqrt{(1 + aa + bb)}}$.

Denn man hat nur nöthig in (20.) die Gleichungen I. und II. mit einander zu vertauschen, das ist, die Grössen a, α, b, β, y, z mit b, β, a, α, z, y. Dadurch erhält man auch die Werthe der f' und g', welche für die Ebene der x, z dasselbe bedeuten, was f, g für die Ebene der x, y.

22. Auch ist $\sin \vartheta' = \sin \eta . \operatorname{col} \vartheta$. Denn da $\sqrt{(1 + aa + bb)} = \frac{b}{\sin \vartheta}$ ist, so ist $\sin \vartheta' = \frac{a \sin \vartheta}{b} = \frac{\operatorname{tang} \eta . \sin \vartheta}{\operatorname{tang} \vartheta : \operatorname{col} \eta} = \sin \eta . \operatorname{col} \vartheta$.

23. Es sey η'' der Winkel, welchen die Projection der CP auf die Ebene der y, z mit der Axe der y macht, und ϑ'' der Neigungswinkel der CP gegen dieselbe Ebene, so ist $\operatorname{tang} \eta'' = \frac{b}{a}$, und $\sin \vartheta'' = \frac{1}{\sqrt{(1 + aa + bb)}}$.

Denn man nehme die Werthe von z und x durch y, so ist I. $z = \frac{b}{a} y + \frac{a\beta - b\alpha}{a}$; und II. $x = \frac{y}{a} - \frac{\alpha}{a}$. Daraus folgt, wie in (20.), $\operatorname{tang} \eta'' = \frac{b}{a}$; und $\sin \vartheta'' = \frac{1 : a}{\sqrt{(1 + (b : a)^2 + (1 : a^2))}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + aa + bb)}}$.

Digitized by Google

24. Auch ist $\sin\vartheta'' = \cos\eta.\cos\vartheta$. Denn es ist

$$\sin\vartheta'' = \frac{\sin\vartheta}{b} = \frac{\cos\eta.\sin\vartheta}{\tang\vartheta} = \cos\eta.\cos\vartheta.$$

25. Aus den doppelten Werthen der Sinus der Neigungswinkel folgt auch auf zweyerley Art

$$(\sin\vartheta)^2 + (\sin\vartheta')^2 + (\sin\vartheta'')^2 = 1.$$

Man vergleiche den Artikel, krumme Fläche, 6.

26. Für den Punct C, wo die gerade Linie die Ebene der x, y trifft, seyn die Coordinaten p, q, jene, nämlich AD, auf der Axe der x, diese, die CD, der Axe der y parallel. Dann sind die Gleichungen für die gerade Linie CP folgende;

I. $y - q = a(x - p)$; II. $z = b(x - p)$.

Es ist nämlich für diesen Punct $z = o$, also $x = -\frac{\beta}{b}$;

und $y = -\frac{a\beta}{b} + \alpha$, das ist, $p = -\frac{\beta}{b}$, und

$q = -\frac{a\beta}{b} + \alpha$. Setzt man in den Gleichungen (20.) für die gerade CP anstatt α und β ihre Werthe aus diesen Gleichungen, so entstehen die angegebenen.

Oder es ist, nämlich in dem Falle der Fig. 112, $p = -g\cos\eta - f$, und $q = -g\sin\eta$. Jene Gleichung multiplicire man durch $\tang\eta$, so wird $p\tang\eta = -g\sin\eta - f\tang\eta = q - y + x\tang\eta$, (19. I.). Da $\tang\eta = a$, so ist $y - q = a(x - p)$. Zweytens ist aus (19. II.), $z = (g\cos\eta + f + x).\frac{\tang\vartheta}{\cos\eta}$.

Setzt man hier $-p$ statt $g\cos\eta + f$, und b statt $\frac{\tang\vartheta}{\cos\eta}$, so wird $z = b(x - p)$.

Die erste Formel fließt aus der Projection, $BM : MN = BD : DC$, als woraus ist $MD : MN + DC =$

Digitized by Google

$BM : MN = 1 : \text{tang}\,\gamma = 1 : a$. Da p und q in dem Falle der Figur negative Werthe haben, so sind $x - p$ und $y - q$ arithmetische Summen.

27. Es seyn zwey Puncte der geraden CP jeder durch seine drey Coordinaten gegeben. Diese seyn p, q, r; p′, q′, r′, so sind für diese Coordinaten die Gleichungen:

$$q = ap + \alpha; \qquad r = bp + \beta;$$
$$q' = ap' + \alpha; \qquad r' = bp' + \beta.$$

Daraus werden die Größen a, b, α, β bestimmt. Es ist

$$a = \frac{q' - q}{p' - p}; \qquad b = \frac{r' - r}{p' - p}.$$
$$\alpha = \frac{p'q - pq'}{p' - p}; \qquad \beta = \frac{p'r - pr'}{p' - p}.$$

Nun sind die beiden Gleichungen für die gerade CP,

I. $(p' - p)y = (q' - q)x + p'q - pq'$.
II. $(p' - p)z = (r' - r)x + p'r - pr'$.

28. Alle geraden Linien, in deren Gleichungen, durch welche sie auf drey gegen einander senkrechte Ebenen bezogen werden, die Coefficienten von x, y, z dieselben sind, oder auf solche gebracht werden können, sind einander parallel. Denn da die Neigungswinkel dieser Linien gegen die drey Ebenen, und die Winkel ihrer Neigungs-Ebenen mit den Axen der Coordinaten mit einander übereinkommen, so liegt der Unterschied der Lage nur allein in der Verschiedenheit der Puncte, in welchen sie die Ebenen der Coordinaten treffen. Verschiebt man eine dieser Linien, mit Beybehaltung der gedachten Winkel, bis der Punct, wo sie eine der Coordinaten-Ebenen trifft, mit dem für eine der andern zusammen fällt, so fallen die Linien in eine zusammen, eben so wie gerade in einer Ebene, die von einer dritten unter demselben Winkel nach derselben Seite hin geschnitten werden, wenn man mit ihnen auf ähnliche Art verfährt.

Oder deutlicher durch einen geometrischen Beweis. Es

Digitized by Google

seyn AB. CD (Fig. 113.) zwey gerade Linien, ihre Neigungsebenen, senkrecht auf die Ebene der x, y seyn BAE, DCF, und die Winkel BAE, DCF seyn sich gleich, so wie die Winkel der Neigungsebenen mit der Axe der x, nämlich EAX, FCX. Man ziehe AG senkrecht auf eine der parallelen AE, CF, so ist sie auch auf die andere senkrecht, und daher steht AG senkrecht auf die Ebenen BAE, DCF (Ebene 25.), und daher sind diese sich parallel (daf. 27.). Die Ebene BAG schneide die DCF in GH, so ist GH parallel der AB (daf. 19.). Da auch GF der AE parallel ist, so ist W. HGF = BAE (daf. 13.). Da W. BAE = DCF gesetzt ist, so ist W. HGF = DCF, und CD parallel der GH. Da auch AB parallel der GH ist, so sind AB und CD sich parallel (daf. 12.).

Der Satz läßt sich auch ganz kurz aus (13. a. a. O.) durch einen indirecten Beweis herleiten.

29. Umgekehrt, wenn zwey gerade parallel sind, so sind in ihren Gleichungen die Coefficienten von x, y, z dieselben, oder können übereinstimmig gemacht werden.

Denn es seyn (Fig. 113.) die geraden AB, CD parallel. Die senkrechten von den Puncten B und D beider auf die Ebene der x, y sind parallel (Ebene, 10.), also sind die Ebenen dieser senkrechten und der AB, CD parallel (daf. 18.), das ist, die Neigungsebenen BAE, DCF sind parallel. Daher sind ferner AE, CF parallel, und dadurch sind sowohl die Winkel EAX, FCX, als die Neigungswinkel BAE, DCF (daf. 13), einander gleich.

30. Die Gleichungen für eine gerade, die einer gegebenen durch einen bestimmten Punct parallel sey, zu finden.

Die Gleichungen für die gegebene seyn,

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$

Für die gesuchte,

$$\text{II. } y = ax + \alpha'; \qquad z = bx + \beta'.$$

In beiden Paaren sind nämlich die Coefficienten von x

Digitized by Google

dieſelben, weil die beiden geraden parallel ſeyn ſollen. Die Coordinaten zu dem gegebenen Puncte der zweyten ſeyn p, q, r, ſo iſt

$$q = ap + a' ; \qquad r = bp + \beta'.$$
$$\text{alſo } \alpha' = q - ap; \qquad \beta' = r - bp.$$

Die Gleichungen für die geſuchte gerade ſind daher,

III. $y = ax + q - ap$; IV. $z = bx + r - bp$.

31. Für zwey gerade Linien ſeyn gegeben die Gleichungen:

I. $y = ax + \alpha$; $\qquad z = bx + \beta$,
II. $y = cx + \gamma$; $\qquad z = dx + \delta$.

Wenn dieſe ſich ſchneiden, ſo ſind in dem Durchſchnittspuncte die Coordinaten für beide dieſelben; alſo iſt, wenn dieſe Coordinaten p, q, r, ſind

$$(c - a)p = \alpha - \gamma ; \quad (d - b)p = \beta - \delta,$$

Daher die Bedingungsgleichung für dieſen Fall,

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Der Werth der Ordinate x zu dem Durchſchnittspuncte, nämlich p, iſt $= \frac{\alpha - \gamma}{c - a} = \frac{\beta - \delta}{d - b}$, woraus die beyden y und z folgen, daher der Durchſchnittspunct ſelbſt ſich ergiebt.

32. Aus den Gleichungen für zwey gerade Linien ihren Winkel herzuleiten.

Die Gleichungen ſeyn

I. $y = ax + \alpha$; $\qquad z = bx + \beta$.
II. $y' = cx' + \gamma$; $\qquad z' = dx' + \delta$.

Durch den Anfangspunct der Abſciſſen A (Fig. 114.) ziehe man mit den beiden gegebenen Linien die parallelen AP, Ap. Für dieſe ſind die Coefficienten von x in ihren Gleichungen dieſelben wie in den gegebenen Gleichun-

Digitized by Google

gen (29.); aber die gegebenen Glieder fallen weg, da für $x = o$ die Ordinaten y und $z = o$ sind. Für die AP ist also I. $y = ax$; $z = bx$, und für die Ap ist II. $y' = cx'$; $z' = dx'$. Die Coordinaten sind in Fig. 114. für jene die auf einander senkrechten AM, MN, NP; und für diese, Am, mn, np. Man verbinde Nn, Pp, so ist $\cos PAp = \frac{AP^2 + Ap^2 - Pp^2}{2AP \cdot Ap}$ (Trigonometrie, oder Dreyeck, 19. 20.); und $AP^2 = x^2 + y^2 + z^2$; auch $Ap^2 = x'x' + y'y' + z'z'$. Da die Puncte, P, p, willkürlich genommen werden können, ohne die Lage der beiden Linien zu ändern, so setze man $z = z'$, und es ist $x : x' = d : b$. In den Werthen von AP und Ap setze man für y, z; y', z' ihre Werthe durch x, x', so ist

$$AP^2 = (1 + aa + bb)xx;$$
$$Ap^2 = (1 + cc + dd)x'x'.$$

Da PN, pn parallel sind (Ebene, 10.) und gleich genommen worden, so ist $Pp = Nn$, und $Nn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, folglich $AP^2 + Ap^2 - Pp^2 = 2zz + 2xx' + 2yy' = 2(bd + 1 + ac)xx'$. Daher ist

$$\cos PAp = \frac{1 + ac + bd}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + c^2 + d^2)}}.$$

33. Die Projection des Winkels PAp auf die Ebene der x, y ist der Winkel NAn. Für diesen ist $b = o$, und $d = o$, weil für denselben $z = o$ ist. Also ist

$$\cos NAn = \frac{1 + ac}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + c^2)}}.$$

Unmittelbar wird dieser Cosinus folgendergestalt gefunden. Es ist $\text{tang } MAN = \frac{y}{x} = a$, und $\text{tang } mAn = \frac{y'}{x'} = c$. Nun ist $\text{tang } NAN = \frac{c - a}{1 + ac}$,

Digitized by Google

und $(\sec NAn)^2 = \frac{1 + a^2c^2 + a^2 + c^2}{(1 + ac)^2} = \frac{(1 + a^2)(1 + c^2)}{(1 + ac)^2}$; das ist $\cos NAn = \frac{1 + ac}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + c^2)}}$. (Goniometrie, 33, 14.).

34. Die Winkel, welche die AP mit den Ebenen der x, y; x, z; y, z macht, seyn ϑ, ϑ', ϑ'', wie (20—23.). Die Winkel, welche Ap mit eben den Ebenen macht, seyn ζ, ζ', ζ''. Für die Sinus dieser Winkel sind eben die Formeln, durch c und d, wie für die Sinus jener Winkel durch a und b in (20. 21. 23.). Aus diesen beiderseitigen Werthen ist aber der Werth von $\cos PAp$ zusammengesetzt. Führt man also statt derselben die Sinus ein, so wird erhalten:

$$\cos PAp = \sin\vartheta.\sin\zeta + \sin\vartheta'.\sin\zeta' + \sin\vartheta''.\zeta''.$$

35. Die Neigungs-Ebene der AP schneide die Axe der x unter dem Winkel η, und diejenige der Ap schneide dieselbe unter dem Winkel ε; es ist durch diese Winkel, nebst den Neigungswinkeln ϑ und ζ,

$$\cos PAp = (\cos(\varepsilon - \eta) + \operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}\zeta)\cos\vartheta.\cos\zeta.$$

Denn es ist $\operatorname{tang}\eta = a$; $\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\eta} = b$ (20.), und eben so $\operatorname{tang}\varepsilon = c$; $\frac{\operatorname{tang}\zeta}{\cos\varepsilon} = d$. Dadurch ist

$$1 + ac + bd = 1 + \operatorname{tang}\eta.\operatorname{tang}\varepsilon + \frac{\operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta.\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{\cos\eta.\cos\varepsilon + \sin\eta.\sin\varepsilon + \operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta.\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{\cos(\varepsilon - \eta) + \operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta.\cos\varepsilon}.$$

Digitized by Google

Ferner ist $1 + aa + bb = 1 + \text{tang}\,\eta^2 + \frac{\text{tang}\,\vartheta^2}{\text{cos}\,\eta^2}$.

$= \frac{1 + \text{tang}\,\vartheta^2}{\text{cos}\,\eta^2} = \frac{1}{\text{cos}\,\eta^2 . \text{cos}\,\vartheta^2}$.

Eben so ist

$$1 + cc + dd = \frac{1}{\text{cos}\,\varepsilon^2 \text{cos}\,\zeta^2}.$$

Dadurch verwandelt sich die Formel (32.) in die hier aufgestellte.

Diese Aufgabe ist die umgekehrte von derjenigen, die in der praktischen Geometrie vorkommt, da aus dem gemessenen Winkel PAp zweyer nicht horizontalen Visirlinien AP, Ap der auf den Horizont reducirte Winkel NAn gefunden werden soll. Man sehe meine analytische Trigonometrie, S. 204. Kästners astronom. Abhandl. I. Samml. S. 38. Mayers prakt. Geometrie. II. Th. S. 59.

36. Es sind in einer Ebene zwey gerade Linien gegeben; durch ihren Durchschnitt eine gerade zu ziehen, welche mit ihnen gegebene Winkel mache.

Man nehme die Ebene der beiden geraden zu der Ebene der Coordinaten x, y; die eine der beiden geraden zur Axe der x; den Durchschnitt beider zum Anfangspuncte der Abscissen. Die zweyte der gegebenen mache mit der Axe der x den Winkel η. Für die erstere Linie sind die beiden Gleichungen: $y = 0$, und $z = 0$. Für die zweyte sind sie: $y = ax$, und $z = 0$, wo $a = \text{tang}\,\eta$, (20.). Für die gesuchte Linie seyn die Gleichungen: $y = bx$; $z = cx$. Die gegebenen Winkel seyn A und B, jener mit der erstern Linie oder mit der Axe der x, dieser mit der andern, die mit derselben Axe den Winkel η macht. In Beziehung auf die erstere Linie, mit welcher die gesuchte Linie den Winkel A machen soll, ist in der Formel (32.) statt a, b, c, d zu setzen 0, 0, b, c; und in Beziehung auf die zweyte, oder für den Winkel B ist daselbst

Digitized by Google

statt jener Größen zu setzen a, o, b, c. Solchergestalt ist

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{(1+bb+cc)}};$$

$$\cos B = \frac{1+ab}{\sqrt{(1+aa)(1+bb+cc)}}.$$

Daraus ist $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sqrt{(1+aa)}}{1+ab}$; und

hieraus $b = \frac{\cos B}{\cos A} \cdot \frac{\sqrt{(1+aa)}}{a} - \frac{1}{a}$. Ferner

$$cc = \frac{1}{\cos A^2} - 1 - bb = \tang A^2 - b^2.$$

Damit die Aufgabe möglich sey, muß die Summe je zweyer der drey Winkel. A, B, γ größer seyn als der dritte, zufolge Euklides XI. 20.

37. Die Aufgabe läßt sich auch durch die sphärische Trigonometrie auflösen, da hier in einem sphärischen Dreyeck aus den drey Seiten die senkrechte auf eine derselben und das eine Segment auf eben dieser gesucht werden.

38. Es ist b die Tangente des Winkels, welchen die Neigungs-Ebene der gesuchten Linie mit der Axe der x macht. Der Neigungswinkel derselben gegen die Ebene der x, y sey ϑ, so ist $\sin\vartheta = \frac{c}{\sqrt{(1+bb+cc)}}$, da in (20.) die Coefficienten a, b hier mit b und c zu vertauschen sind. Es ist also $\sin\vartheta = c \cdot \cos A$.

Lage der Ebenen und geraden Linien gegen einander.

39. Durch eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Punct eine Ebene zu legen.

Die Gleichungen für die gerade seyn

$$y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$

Die Gleichung für die gesuchte Ebene sey

$$Ax - By + Cz - D = o.$$

Digitized by Google

Da die Ebene durch einen gegebenen Punct gehen soll, so ist, wenn die diesen Punct bestimmenden Coordinaten p, q, r sind,

$$Ap - Bq + Cr - D = o.$$

Aus dieser Gleichung und der allgemeinen ist

$$A(x-p) - B(y-q) + C(z-r) = o.$$

Werden hier für y und z ihre Werthe aus den Gleichungen für die gerade gesetzt, so ist

$$(A - Ba + Cb)x = Ap - B(q-\alpha) + C(r-\beta).$$

Wird x dieser Gleichung gemäß genommen, so sind die dazu gehörigen Werthe von y und z an der geraden Linie zugleich Coordinaten an der Ebene. Da aber x daraus nur einen einzigen Werth erhält, so muß sowohl der Factor von x als der zweyte Theil der Gleichung jeder für sich $= o$ seyn. Dadurch erhält $x = \frac{o}{o}$ jeden Werth, wie es sowohl für die gerade Linie als die Ebene seyn muß. So erhalten wir zwey Gleichungen:

$$A - Ba + Cb = o,$$

$$Ap - B(q-\alpha) + C(r-\beta) = o.$$

Aus diesen und der Gleichung,

$$Ap - Bq + Cr - D = o,$$

werden die Coefficienten der Gleichung für die Ebene bestimmt. Einer derselben kann willkürlich angenommen werden, da die Coefficienten dieser Gleichung durch gemeinschaftliche Multiplication und Division unendlich vieler Abänderungen fähig sind. Durch Elimination von C oder B aus den beiden ersten Gleichungen wird erhalten:

$$A(bp - r + \beta) = B(a\beta - ar + bq - b\alpha).$$

$$A(ap - q + \alpha) = C(a\beta - ar + bq - b\alpha).$$

Setzt man für zwey der Größen A, B, C, ihren Werth durch die dritte in die Gleichung, $Ap - Bq + Cr - D = o$, so wird D auch durch diese dritte gegeben,

Digitized by Google

oder die dritte auch durch D, welche alsdann willkürlich genommen wird.

Wie aus den Coefficienten die Lage der Ebene durch den Neigungswinkel gegen die Ebene der x, y, durch den Winkel der Durchschnittslinie mit der Axe der x und durch den Durchschnittspunct mit derselben bestimmt wird, ist in dem Artikel, krumme Fläche, 5. gezeigt.

40. Zwey gerade Linien sind durch ihre Gleichungen gegeben, die Gleichung für die durch jede besonders gelegten, sich parallelen Ebenen zu finden.

Die Gleichungen für die beiden geraden seyn

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$
$$\text{II. } y = cx + \gamma; \qquad z = dx + \delta.$$

Die Gleichungen für die beiden parallelen Ebenen seyn

$$\text{I. } Ax - By + Cz - D = 0;$$
$$\text{II. } Ax - By + Cz - E = 0.$$

Denn da die Ebenen sich parallel seyn sollen, so sind die Winkel, von welchen ihre Lage abhängt, dieselben, und nur der Durchschnittspunct mit der Axe der x ist verschieden. (Krumme Fläche, 5. 8.).

In die Gleichung für die erste Ebene setze man die Werthe von y und z für die erste der geraden, so ist

$$(A - Ba + Cb)x - B\alpha + C\beta - D = 0.$$

Damit x jeden Werth haben könne, muß seyn, wie in (39).

$$\text{I. } A - Ba + Cb = 0;$$
$$\text{II. } B\alpha - C\beta + D = 0.$$

Auf gleiche Weise sind für die zweyte Ebene die beiden Gleichungen:

$$\text{III. } A - Bc + Cd = 0;$$
$$\text{IV. } B\gamma - C\delta + E = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen werden unter den fünf Größen, A, B, C, D, E vier bestimmt, indem eine derselben willkürlich ist.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen I. III. folgt durch Elimination von C oder B,

$$-\frac{B}{A} = \frac{b-d}{ad-bc}; \quad +\frac{C}{A} = \frac{a-c}{bc-ad}.$$

In die Gleichungen II. IV. setze man für B und C ihre Werthe durch A, so wird erhalten:

$$\frac{D}{A} = \frac{(b-d)\alpha-(a-c)\beta}{ad-bc}.$$

$$\frac{E}{A} = \frac{(b-d)\gamma-(a-c)\delta.}{ad-bc}.$$

41. Die Gleichungen für eine gerade Linie zu finden, welche auf eine durch ihre Gleichung bestimmte Ebene senkrecht steht.

Es sind (Fig. 115.) AM, MN, NP (oder x, y, z) die rechtwinklichten Coordinaten an die Ebene BOPOB in einem Puncte P derselben. Ihr Durchschnitt mit der Ebene AMN ist BB. Diese schneidet die Axe der x in C unter dem Winkel BCM $= \eta$, und ist gegen die Ebene AMN (der x, y) unter dem Winkel PON $= \vartheta$ geneigt. Dieser Winkel ist derjenige, welchen die von dem Grundpuncte N auf BB senkrecht gezogene NO mit der von P nach O gezogenen PO macht. (Die Ebene PON steht senkrecht auf die Ebene AMN oder ACOB, und die auf ON senkrechte BO steht senkrecht auf jene Ebene PON, also auf die gerade PO in dieser Ebene. Daher ist PON der Winkel der Ebenen ACB und BOPOB. S. Ebene, 21. 25. 7. 4.) In der Ebene NOP ziehe man DP senkrecht auf OP, so ist DP senkrecht auf die Ebene BOPOB. Die Gleichungen für diese DP sind nun anzugeben.

Die DP treffe die (hier) verlängerte ON in F, so ist PFO ihr Neigungswinkel gegen die Ebene AMN oder ACB. Dieser ist daher $= 90° - \vartheta$. Die nach der Axe der x oder AL hin verlängerte NO schneide dieselbe in K, so ist AKO $= 90° - \eta$, und der Winkel LKO $= 90° + \eta$.

Digitized by Google

Es kommen nun anstatt η und ϑ in (20.) hier $90° + \eta$ und $90° + \vartheta$, wenn die Schenkel der Winkel nach derselben Richtung genommen werden, das ist KL und KN in (Fig. 115.) wie BM und BN in Fig. 112; so auch FP und Fk in der verlängerten KF in Fig. 115. wie CP und CN in Fig. 112. Daher sind die Gleichungen für die auf die Ebene BOPOB in P senkrechte DE diese:

$$y = f - \cot\eta \,.\, x.$$

$$z = g + \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta} \,.\, x.$$

Die unveränderlichen f und g werden durch die Coordinaten zu einem Puncte P bestimmt. Sind diese p, q, r, so ist

$$q = f - p\cot\eta\,; \qquad r = g + p.\frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}.$$

also

$$f = q + p\cot\eta\,; \qquad g = r - p.\frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}.$$

42. Die Gleichung für die gegebene Ebene sey

$$Ax - By + Cz - D = 0,$$

so ist $\cot\eta = \frac{B}{A}$, und $\frac{\cot\vartheta}{\sin\eta} = \frac{C}{A}$ (krumme Fläche, 5.), also sind die Gleichungen für die gesuchte senkrechte,

$$y = f - \frac{B}{A}x\,; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

oder

$$y = q - \frac{B}{A}(x-p)\,; \qquad z = r + \frac{C}{A}(x-p).$$

43. Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen für die gerade die Gleichung für die auf sie senkrechte Ebene,

$$x - \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z - \frac{D}{A} = 0,$$

Digitized by Google

oder

$$Ax - By + Cz - D = o.$$

44. Von dem Puncte F, wo die in P auf die Ebene senkrechte die Ebene der x, y trifft, ziehe man auf AM die senkrechte FG, so ergeben sich die Coordinaten AG und GF folgendergestalt.

$$AG = p - \frac{A}{C} r; \qquad GF = q + \frac{B}{C} r.$$

Denn für den Punct F ist $z = o$; also ist daselbst $x = p = -\frac{A}{C} r$, und daraus $y = q + \frac{B}{C} r$.

45. Aus der Gleichung für die Ebene,

$$Ax - By + Cz - D = o,$$

folgen die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C}$; $\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{A}{C}$. Daher sind die Coordinaten für den Punct, wo die Normale die Ebene der x, y trifft, $AG = p + \frac{\partial z}{\partial x} r$; $GF = q + \frac{\partial z}{\partial y} r$. Ist nun die Ebene eine berührende an einer krummen Fläche, so kommen die partiellen Differentialquotienten, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, an beiden überein (Krumme Fläche, 113.); und es werden die Coordinaten für den Punct, wo die Normale an die Curve die Ebene der x, y trifft, durch dieselben Formeln wie für die Ebene gefunden. Die Gleichungen für die Normale selbst kommen an beiden auch überein.

46. Den Winkel zweyer Ebenen, die durch ihre Gleichungen gegeben sind, zu finden.

Der Winkel der Ebenen ist der Winkel der geraden, auf den Durchschnitt der Ebenen senkrechten (Ebene, 4.), oder der Winkel der auf die Ebenen selbst senkrechten. Nun

Digitized by Google

wird aus den Gleichungen für diese senkrechten ihr Winkel durch die Formel (32.) gefunden, das ist der verlangte Winkel der Ebenen.

Die Gleichungen für die beiden Ebenen seyn:

$$\text{I.}\quad Ax - By + Cz - D = 0.$$
$$\text{II.}\quad A'x - B'y + C'z - D' = 0.$$

Nun sind die Gleichungen für die auf die erstere senkrechten,

$$y = f - \frac{B}{A}x; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

und für die auf die zweyte Ebene senkrechten,

$$y = f' - \frac{B'}{A'}x, \qquad z = g' + \frac{C'}{A'}x,$$

wo f' und g' willkürliche Linien sind, eben so wie f und g. Man kann sie also auch = o nehmen. Nämlich alle gerade Linien, in deren Gleichungen die Coefficienten von x und y und z dieselben sind, sind sich parallel (28.), das ist die geraden, deren Gleichungen sind,

$$\text{I.}\quad y = -\frac{B}{A}x; \qquad z = +\frac{C}{A}x;$$
$$\text{II.}\quad y = -\frac{B'}{A'}; \qquad z = +\frac{C'}{A'}x,$$

sind, die erstere der erstern, die zweyte der zweyten jener Normalen parallel, daher ihr Winkel derselbe ist.

In (32.) mache man die gehörigen Substitutionen, so ist der Cosinus des Winkels der Ebenen

$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(AA+BB+CC)(A'A'+B'B'+C'C')}}.$$

47. Die erste Ebene schneide die Axe der x unter dem Winkel η, und sey gegen die Ebene der x, y unter dem Winkel ϑ geneigt. Für die zweyte Ebene seyn diese Winkel η' und ϑ', so ist $\frac{B}{A} = \frac{\cos\eta}{\sin\eta}$; $\frac{C}{A} = \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}$;

Digitized by Google

$\frac{B'}{A'} = \frac{\cos\eta'}{\sin\eta'}$; $\frac{C'}{A'} = \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta'}$ (krumme Fläche, 5.).

Setzt man in der Formel (46.) für A, B, C und A', B', C' die ihnen proportionalen, so ist der Cosinus des Winkels der beiden Ebenen

$$= \frac{\sin\eta.\sin\eta' + \cos\eta\cos\eta' + \cot\vartheta.\cot\vartheta'}{\sqrt{(1+\cot\vartheta^2)(1+(\cot\vartheta')^2}}$$

$$= (\cos(\eta-\eta') + \cot\vartheta.\cot\vartheta')\sin\vartheta.\sin\vartheta'.$$

Die sphärische Trigonometrie giebt dasselbe Resultat.

48. Wenn $AA' + BB' + CC' = 0$ ist, so ist der Winkel der beiden Ebenen ein rechter, und umgekehrt.

49. Die zweyte Ebene sey parallel der Ebene der y, z, so sind η' und $\vartheta' = 90°$, also $\frac{B'}{A'} = 0$, und $\frac{C'}{A'} = 0$. Dividirt man in der Formel (46.) Zähler und Nenner durch A', so ist $\frac{A}{\sqrt{(AA+BB+CC)}} =$ dem Cosinus der geneigten Ebene mit der Ebene, welche der Ebene der x, y parallel ist.

Die zweyte Ebene sey der Ebene der x, z parallel, so ist $\eta' = 0$, oder $= 180°$, und $\vartheta' = 90°$. Nun ist $\frac{A'}{B'} = 0$; $\frac{C'}{B'} = 0$. Daher ist $\frac{-B}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$ = dem Cosinus der geneigten Ebene mit der Ebene, welche der Ebene der x, z parallel ist. Das Vorzeichen — ist gesetzt, weil der Winkel der beiden Ebenen stumpf ist, wenn η und ϑ spitz sind, wie in der Rechnung angenommen worden. Da die Wurzelgröße beiderley Vorzeichen zuläßt, so muß es den Umständen nach bestimmt werden.

Die zweyte Ebene sey der Ebene der x, y parallel, so ist $\vartheta' = 0$, und η' bleibt unbestimmt. Es ist nun C' unendlich groß. Daher ist der Cosinus ihres Winkels mit

Digitized by Google

der geneigten Ebene $= \frac{C}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$. Alles übereinstimmig mit den Formeln in dem Artikel, krumme Fläche, 6.

50. Den Abstand zweyer gegebenen parallelen Ebenen zu finden.

Die Gleichungen für beide sind nur in dem unveränderlichen Gliede verschieden. Die Coordinaten an der einen seyn x, y, z; an der andern p, q, r; die Gleichung für jene sey

$$Ax - By + Cz - D = o,$$

so ist sie für die andere,

$$Ap - Bq + Cr - E = o.$$

Aus beiden Gleichungen wird erhalten,

$$A(x-p) - B(y-q) + C(z-r) = D - E.$$

Der Abstand beider Ebenen ist die senkrechte, welche von einem Puncte der einen auf die andere gefällt wird. Für diese senkrechte sind die Gleichungen:

$$y' = f - \frac{B}{A}x'; \qquad z' = g + \frac{C}{A}x',$$

wo die Coordinaten durch Strichelchen von denen an der erstern Ebene unterschieden sind. In den Puncten, wo die senkrechte die Ebenen trifft, ist

$$y = f - \frac{B}{A}x; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

$$q = f - \frac{B}{A}p; \qquad r = g + \frac{C}{A}p.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$A(y-q) = -B(x-p),$$
$$A(z-r) = C(x-p);$$

und aus diesen

$$C(y-q) = -B(z-r).$$

Digitized by Google

Setzt man successiv die Werthe von $y - q$; $z - r$; $x - p$, in die vorher erhaltene Gleichung, so wird

$$x - p = \frac{A(D-E)}{AA+BB+CC}.$$

$$y - q = \frac{-B(D-E)}{AA+BB+CC}.$$

$$z - r = \frac{C(D-E)}{AA+BB+CC}.$$

Die drey Linien, $x-p$; $y-q$; $z-r$, bilden die drey Seiten eines rechtwinklichten Parallelepipedum, dessen Diagonale die gerade durch die Endpuncte der Ordinaten z und r sind, oder das Stück der zwischen den beiden Ebenen enthaltenen gemeinschaftlichen senkrechten. Dieser Abstand beider sey $= P$, so ist

$$P^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2,$$

folglich

$$P = \frac{D-E}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}.$$

51. Die gefundene Formel für P giebt überhaupt den Abstand eines, durch die Coordinaten p, q, r gegebenen Punctes, von einer durch die Gleichung, $Ax - By + Cz = D$, gegebenen Ebene an. Man hat nur den gegebenen Punct zu betrachten als gehörig zu der mit jener parallelen Ebene, deren Gleichung ist $Ap - Bq + Cr = E$, wo E durch die Coefficienten A, B, C und die Ordinaten p, q, r bestimmt wird.

52. Zur Erläuterung der Auflösung für den Abstand eines gegebenen Punctes von einer gegebenen Ebene folgt hier noch eine geometrisch-analytische Auflösung derselben Aufgabe, zuerst für den Fall, da der gegebene Punct in der Ebene der x, y liegt.

Es sey BOPOB (Fig. 115.) die gegebene Ebene, für welche die Gleichung ist

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

Digitized by Google

In der Ebene der x, y sey ein Punct F gegeben, durch die Coordinaten AG = p; GF = q. In F sey FH senkrecht auf die Ebene AGF, und treffe die geneigte Ebene in H. Es sey FH = k, so ist

$$Ap - Bq + Ck - D = o.$$

Von F werde FP senkrecht auf die Ebene BOP gezogen, und HPO durch H und P bis an O auf BB; auch FO nach O. Die Ebene FHO steht auf beyde Ebenen, die BOFOB und BOPOB, senkrecht, wegen der auf jene und diese senkrechten FH und FP. Daher ist der Durchschnitt CO dieser Ebenen senkrecht auf die Ebene FOH, das ist auf FO und HO, also ist der W. FOH der Neigungswinkel der Ebene BOP gegen die COF oder der x, y.

Nun ist $FP = FH.\cos HFP = FH.\cos FOP = k.\cos\varphi$. Es ist $\cos\varphi = \frac{C}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$ (krumme Fläche, 5.) also $FP = \frac{Ck}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$, oder

$$FP = \frac{D - (Ap - Bq)}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}.$$

Betrachtet man F als einen Punct in einer mit BOP parallelen Ebene, so ist aus (50.), da $z = o$ ist, $Ap - Bq = E$, und $P = \frac{D - E}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$.

53. Der gegebene Punct sey I, in der Höhe FI über der Ebene der x, y, und FI = r. Man verlängere FI bis an H in der geneigten Ebene, und ziehe Ip senkrecht auf dieselbe, so ist $Ip = \frac{k-r}{k} FP =$

$$\frac{C(k-r)}{\sqrt{(AA + BB + CC)}} = \frac{D - Ap + Bq - Cr}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}.$$

Betrachtet man I als einen Punct in einer mit BOP

Digitized by Google

durch I parallelen Ebene, so ist $Ap - Bq + Cr = E$ (50.) und der Abstand des Punctes von der Ebene BOPOB ist $= \frac{D-E}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$.

54. Den Abstand zweyer parallelen Ebenen, die durch zwey gegebene gerade Linien gelegt sind, zu finden.

Aus den Gleichungen für die beiden geraden (40.), und den Werthen der Coefficienten in den Gleichungen für die Ebenen daselbst, setze man in (52.) die Werthe der letztern, so ist der Abstand

$$P = \frac{(b-d)(\alpha-\gamma) - (a-c)(\beta-\delta)}{\sqrt{((ad-bc)^2 + (b-d)^2 + (a-c)^2)}}.$$

55. Den kürzesten Abstand zweyer geraden Linien zu finden, die nicht in derselben Ebene liegen.

Dieser ist der Abstand der beiden durch sie gelegten, einander parallelen Ebenen. Denn näher als dieser Abstand ist, können sich zwey Puncte dieser Linien nicht kommen.

56. Die Puncte des kürzesten Abstandes der beiden geraden in (55) zu finden.

Die gegebenen Gleichungen für die beiden geraden seyn, wie in (40.),

I. $y = ax + \alpha$; $z = bx + \beta$.

II. $y = cx + \gamma$; $z = dx + \delta$.

Die daraus hergeleiteten Gleichungen für die parallelen, durch sie gelegten Ebenen sind (eben das.).

III. $Ax - By + Cz - D = o$,

IV. $Ax - By + Cz - E = o$.

Die Gleichungen für irgend eine auf die Ebenen senkrechte gerade sind (42.)

V. $y = f - \frac{B}{A}x$. VI. $z = g + \frac{C}{A}x$,

worin f und g unveränderliche, aber noch nicht bestimmte

Digitized by Google

Größen sind. Diese senkrechte muß nun zugleich durch einen Punct der einen wie der andern gegebenen geraden gehen. Die beiden Puncte, wodurch sie geht, haben auf den beiden geraden den Abstand der parallelen Ebenen, also den möglich kürzesten.

An dem Puncte, wo die senkrechte die erste der geraden schneidet, sind die Coordinaten gemeinschaftlich. Also ist

$$ax + \alpha = f - \frac{B}{A}x;$$

$$bx + \beta = g + \frac{C}{A}x.$$

Schafft man x weg, so wird erhalten

VII. $(f-\alpha)(Ab-C) = (g-\beta)(Aa+B)$.

An dem Puncte, wo die senkrechte die zweyte der geraden schneidet, ist

$$cx + \gamma = f - \frac{B}{A}x;$$

$$dx + \delta = g + \frac{C}{A}x.$$

Daraus ist durch Wegschaffung von x,

VIII. $(f-\gamma)(Ad-C) = (g-\delta)(Ac+B)$.

Aus den beiden Gleichungen VII. VIII. zwischen f und g wird jede dieser Größen bestimmt. Durch diese Werthe ergiebt sich aus einer der beiden Gleichungen für x an dem Durchschnittspuncte der einen oder der andern geraden mit der auf die Ebenen senkrechten der zugehörige Werth von x. Eben so der Werth von x an der andern geraden. Daraus werden ferner vermittelst der Gleichungen für die beiden geraden die Coordinaten y und z gefunden, wodurch jeder der beiden Puncte des kürzesten Abstandes bekannt wird.

57. Durch Hülfe der Differentialrechnung nach der Theorie vom Größten und Kleinsten wird die Aufgabe (56.) folgendergestalt aufgelöset.

Digitized by Google

Die Gleichungen für die beiden geraden seyn:

I. $y = ax + \alpha$; $z = bx + \beta$.
II. $y' = cx' + \gamma$; $z' = dx' + \delta$.

Der Abstand der Puncte, wozu die Ordinaten z, z' gehören, ist (wie in 50.)

$$= \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]},$$

Für y und y'; z und z' setze man ihre Werthe aus jenen Gleichungen, so ist der Abstand der beiden Puncte =

$$\sqrt{[(x-x')^2 + (ax - cx' + \alpha - \gamma)^2 + (bx - dx' + \beta - \delta)^2]}.$$

Dieser Abstand sey = u. Damit er ein Kleinstes sey, muß $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, und auch $\frac{\partial u}{\partial x'} = 0$ seyn, das ist, die beiden partiellen Differentialquotienten sind jeder = 0 (Größtes und Kleinstes, 51.). Es ist daher, wenn in den Differentialquotienten der Divisor weggelassen wird,

I. $x - x' + a(ax - cx' + \alpha - \gamma) + b(bx - dx' + \beta - \delta) = 0.$

II. $x - x' + c(ax - cx' + \alpha - \gamma) + d(bx - dx' + \beta - \delta) = 0.$

Aus diesen beiden Gleichungen werden die Werthe der Abscissen x und x' bestimmt. Setzt man diese in die Formel für u, so wird der kürzeste Abstand der beiden geraden erhalten; und eben diese geben durch die Gleichungen für die beiden geraden die Coordinaten y, z; y', z'.

Linie, abbildende, ist eine solche, welche durch ihren Zug in den Ordinaten eine Folge von Größen abbildet, die ursprünglich numerisch sind, oder als geometrische Größen in einem andern Zusammenhange mit den zu ihnen gehörigen vorkommen. Dergleichen sind erstlich die gerade Linie, deren Ordinaten eine arithmetische Progression abbilden, wenn die Abscissen in arithmetischer genommen werden.

Digitized by Google

Ferner die logarithmische Linie, deren Ordinaten in geometrischer Progression stehen, wenn die Abscissen in arithmetischer sind. Nach der einen Gegend ist die Abscissenlinie die Asymptote dieser Curve; nach der andern wachsen die Ordinaten ins Unendliche. Ihre Subtangente hat eine unveränderliche Länge, s. berührende Linie, 21.

Man nehme auf einer geraden Linie die Abscissen gleich den Bogen eines Kreises von gegebenem Halbmesser, und setze darauf als Ordinaten die zugehörigen Sinus, so entsteht die Sinuslinie (Linea sinuum). Leibnitz hat diese Darstellung angegeben. Die Linie der Sinus schlängelt sich um die Abscissenlinie herum, indem mit jedem Halbkreise die Ordinaten ins Entgegengesetzte übergehen. Die Abscissenlinie erstreckt sich ins Unendliche fort, da die Bogen jedes Vielfache des Umfanges mit einem Bogen darüber enthalten können.

Die Area der Sinuslinie ist quadrirbar. Es sey nämlich a der Halbmesser des Kreises, s ein Bogen desselben, als Abscisse, zu der Ordinate y, so ist das Differential der Area $= y\partial s$ (Quadratur), das ist $= \frac{a y \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (Differentialformeln, 29.). Das Integral oder die Area ist $=$ Const. $- a\sqrt{(a^2 - y^2)} = a^2 - a\sqrt{(a^2 - y^2)}$, wenn sie für $y = o$ und $s = o$ anfängt. Für $y = a$, ist die Area $= a^2$; also ist der Theil der Area von $s = o$ bis zu $s = \pi a$ oder dem halben Kreisumfange $= 2a^2$.

Die Gleichung für die Sinuslinie ist $y = a . \text{Arc} \frac{s}{a}$.

Man nehme $a = 1$, und setze φ statt s, so ist (Differentialformeln, 48.)

$$y = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

Auf gleiche Art wird die Linie der Cosinus, der Sinusversus, der Tangenten, der Cotangenten, der Secanten und der Cosecanten gebildet. Die Linie der Cosinus ist dieselbe mit derjenigen der Sinus, nur daß der Anfang der

Digitized by Google

Abscissen eine andere Stelle hat. — Die Linie der Sinusversus schlängelt sich an derselben Seite der Abscissenlinie hin. — Die Linie der Tangenten erstreckt sich für den ersten Halbkreis neben einer Asymptote auf beiden Seiten in entgegengesetzten Gegenden; für die folgenden Halbkreise auf gleiche Art. Die Linie der Cotangenten des ersten Halbkreises liegt zwischen zwey Asymptoten in entgegengesetzten Gegenden. — Die Linie der Secanten erstreckt sich auch an einer Asymptote in entgegengesetzten Gegenden für den ersten Halbkreis, bleibt aber für den dritten Quadranten auf der Seite der negativen Abscissen, so daß sie hier, und auch auf der positiven Seite zwischen zwey Asymptoten gegen die Abscissenlinie convex ist.

Es sey v der linearische Sinusversus eines Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a\partial v}{\sqrt{(2av - vv)}}$, (Differentialformeln, 35.). Das Differential der Area für die Linie der Sinusversus ist $= \frac{av\partial v}{\sqrt{(2av - vv)}}$. Aus Integralformel, 71. ist das Integral $= C - a\sqrt{(2av - vv)} + a\int \frac{a\partial v}{\sqrt{(2av - vv)}} = C - a\sqrt{(2av - vv)} + as$. Es ist aber $C = o$, also ist die Area $= a(s - \sqrt{2av - vv}))$, wo die Irrationalgröße der linearische Sinus des Bogens s ist.

Es sey t die linearische Tangente des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2 + t^2}$, (Diff. Formeln, 31.), und das Differential von der Area der Linie der Tangenten $= \frac{a^2 t\partial t}{a^2 + t^2}$.

Die Area $= \frac{1}{2}a^2 \log.\,nat. \frac{a^2 + t^2}{a^2} =$

$a^2 \log. \frac{\sqrt{(a^2 + t^2)}}{a} = a^2 \log. sec. Arc. \frac{s}{a}$.

Digitized by Google

Es sey z die Secante des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2 \partial z}{z\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, also das Differential von der Area der Linie der Secanten $= \frac{a^2 \partial z}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, und die Area $= a^2 \log.\text{nat.} \frac{z + \sqrt{(z^2 - a^2)}}{a}$. Es sey $\varphi = \frac{s}{a}$, so ist die Area $= a^2 \log.\text{tang}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$.

Literal-Algebra ist diejenige, worin eine Aufgabe allgemein durch Buchstabenzeichen vorgetragen und aufgelöset wird, im Gegensatze gegen die numerische, worin die bekannten Größen durch Zahlen gegeben, und bloß die unbekannten durch Buchstaben bezeichnet werden. S. Algebra, Th. I. S. 43.

Localzeichen oder **Localausdruck** ist eine kurze Bezeichnung eines bestimmten oder unbestimmten Gliedes aus einer Potenz einer Reihe, es sey mit der zugehörigen Potenz der veränderlichen Progressionalgröße, oder auch des Coefficienten dieser Potenz allein. — **Localformel** ist ein analytischer Ausdruck, der aus Gliedern mit Localzeichen besteht. Eben dergleichen Symbole können auch bey der Entwickelung von Producten und Quotienten vorkommen.

Es sey nämlich

$$ax^m + bx^{m+d} + cx^{m+2d} + dx^{m+3d} + \text{etc.} = p,$$

so wird die nte Potenz dieser Reihe bezeichnet durch

$$p^n = p^{n\tau 1} + p^{n\tau 2} + p^{n\tau 2} \ldots\ldots^{e} \ldots + p^{n\tau(r+1)}\text{etc.}$$

wo die einzelnen Glieder den ersten, zweyten, dritten ... $(r+1)$ten Terminus der nten Potenz von p bedeuten. Hierin sind die zugehörigen Potenzen von x mit einbegriffen. Ohne diese ist die Symbolisirung folgende:

Digitized by Google

$p^n = p^n \times 1\, x^{mn} + p^n \times 2\, x^{mn+d} + p^n \times 3\, x^{mn+2d}$
$\ldots\ldots + p^n \times (r+1)\, x^{mn+rd} + \text{etc.}$

Hier bedeuten $\times 1$, $\times 2$, $\times 3 \ldots \times (r+1)$, den ersten, zweyten, dritten ... $(r+1)$ Coefficienten in der Potenz p^n.

Bey der Entwickelung eines Products werden anstatt der Potenz einer Reihe die Bezeichnungen der Factoren vorgesetzt. Z. B. die ganzen Reihen, welche in einander multiplicirt werden, seyn durch P, Q, R bezeichnet, so ist PQR r4 das vierte Glied des Products, wenn es nämlich nach den Potenzen von x, der veränderlichen Größe, geordnet ist.

Soll die Reihe P durch die Reihe Q dividirt werden, so bedeutet $\frac{P}{Q}$ r r das rte Glied des Quotienten. Sondert man die Potenz der veränderlichen Größe ab, so wird das Symbol $\times$ auf gleiche Art wie bey Potenzen gebraucht, und die Potenz von x zugesetzt.

Hindenburg hat diese Bezeichnungsart eingeführt. Infinitomii dignitatum formulae p. 71; 93 — 98; 136 — 141. und verbessert Nov. Systema permutationum, p. XXXIII. Sie sind sehr nützlich bey zusammengesetzten combinatorischen Rechnungen, um das Gesetz der Formation faßlich zu machen, und dann die Glieder einzeln zu entwickeln.

Locus geometricus, s. Ort, geometrischer.

Logarithmus ist die Zahl, welche anzeiget, das wie vielfache ein Verhältniß in Absicht auf ein anderes Grundverhältniß ist, wodurch alle Verhältnisse gemessen werden. Nämlich wenn das Grundverhältniß ist a : b, so ist das gedoppelte $a^2 : b^2$; das dreyfache $a^3 : b^3$, das mfache $a^m : b^m$, so wie auf der andern Seite das halbgetheilte ist $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$; das dreygetheilte $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$; das ngetheilte $a^{\frac{x}{n}} : b^{\frac{x}{n}}$; ferner noch das mfache und zugleich

Digitized by Google

n getheilte ist $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$. Der letzte Ausdruck stellt alle an dern Fälle vor, wenn n oder m = 1 genommen werden. Die Zahl $\frac{m}{n}$ ist der Logarithmus des Verhältnisses $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$, in Beziehung auf das a : b.

Auf diese Erklärung bezieht sich die Bildung des Kunstwortes, welches aus dem griechischen λογων ἀριθμος, zusammengezogen ist, und einen Verhältnißzähler oder Verhältnißmesser bezeichnet.

1. Der Exponent des Grundverhältnisses a : b sey = e, so ist $e^{\frac{m}{n}}$ der Exponent des $\frac{m}{n}$fachen, oder des $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$. Nun ist $e^{\frac{m}{n}}$ ein Glied in der geometrischen Reihe, welche aus der Grundreihe, $1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^x$: etc. entsteht, wenn zwischen je zwey Gliedern n — 1 Glieder eingeschaltet, oder wenn statt jedes Gliedes n Glieder, alle gleichfalls in geometrischer Fortschreitung, genommen werden. Der Exponent von e bezeichnet zugleich die Stelle des Gliedes in der geometrischen Reihe, wenn die Stelle der Einheit durch o angegeben wird. Also ist Logarithme einer Zahl die Stelle derselben in einer geometrischen Progression, $1 : e : e^2$: etc. so fern sie in dieser unmittelbar, oder in einer daraus durch Einschaltung gebildeten Reihe, vorkommt. Ist die Zahl so beschaffen, daß sie durch keine noch so weit getriebene Einschaltung in der Reihe ihre Stelle findet, so ist ihr Logarithme oder ihre Stellenzahl $\frac{m}{n}$ eine Irrationalzahl, zu welcher nur zwey, immer mehr und mehr einander näher kommende, rationale sich angeben lassen, eine nächst kleinere und eine nächst größere. Dieses ist z. B. der Fall bey allen ganzen Zahlen, die in die geometrische Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : etc. eingeschaltet werden sollen. Die

Digitized by Google

Form der eingeschalteten Glieder ist in dem Artikel, geometrische Reihe, 11. angegeben.

2. Man betrachte das Glied $e^{\frac{m}{n}}$ als eine Zahl, die aus einer Zahl e durch die Erhebung auf die Potenz vom Grade m, und Ausziehung der Wurzel vom Grade n, entsteht, so ist der Exponent $\frac{m}{n}$ der Potenz von e zugleich der Logarithme dieser Potenz. Dieser, aus der ursprünglichen, von dem Erfinder gefaßten Vorstellung, hergeleitete Begriff wird als der für die Berechnung der Logarithmen selbst, und für ihre Anwendung bequemste, fernerhin angenommen werden.

Der Logarithme einer Zahl z wird bezeichnet durch log. z, oder l. z.

3. Es sey nun a eine willkürlich festgesetzte Zahl, sie mag rational oder irrational, größer oder kleiner als die Einheit seyn, z irgend eine andere unbestimmte, und $a^x = z$, so ist x der Logarithme der Zahl z in Beziehung auf die Grundzahl a, oder die Wurzel, von welcher z als eine Potenz angesehen wird.

4. Jede Zahl kann unter der Form a^x vorgestellt werden. Denn sie findet nothwendig ihre Stelle in der geometrischen Reihe $1 : a : a^2 : a^3$ etc. oder der damit rückwärts verbundenen, $1 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3}$ etc. wenn darin eine unbestimmt große Anzahl Glieder eingeschaltet werden. Es lassen sich bey einer endlichen Anzahl eingeschalteter Glieder immer zwey Glieder angeben, zwischen welche die Zahl z fällt, wenn sie nicht genau unter jenen enthalten ist, und diese kommen ihr desto näher, je größer die Anzahl der eingeschalteten Glieder ist. Stellt man sich die Anzahl derselben unendlich groß vor, so ist die Reihe eine stetige, in welcher die Zahl z irgendwo vorkommt. Bey der wirklichen numerischen Bestimmung lassen sich nur zwey Gränzen angeben, aber doch so nahe an einander, daß der Unterschied kleiner wird, als jeder irgends für die vorgesetzte Genauigkeit nachtheilige Fehler seyn mag.

Digitized by Google

5. Die Verbindung einer geometrischen Reihe mit der arithmetischen Reihe der Stellenzahlen ihrer Glieder, oder die Verbindung der Zahlen, als Potenzen einer gegebenen Zahl betrachtet, und der Exponenten, macht ein logarithmisches System aus. Die Stelle der Einheit in der geometrischen Reihe wird durch o bezeichnet. Das Glied, dessen Stelle die Einheit ist, oder die gemeinschaftliche Wurzel der Potenzen, welche für die Zahlen gesetzt werden, heißt die Grundzahl oder Basis des logarithmischen Systems. Diese ist willkürlich; so daß es unendlich viele logarithmische Systeme giebt. Es kommt nur darauf an, auszumachen, welches das bequemste ist, es sey zur Anwendung oder zur Berechnung der Logarithmen.

6. Wenn vier Zahlen geometrisch proportional sind, so sind ihre Logarithmen arithmetisch proportional und umgekehrt. Denn die Glieder gleicher Verhältnisse stehen in der geometrischen Reihe, in welcher sie vorkommen, gleich weit von einander ab; daher haben die zugehörigen Logarithmen, als Glieder einer zugeordneten arithmetischen Reihe, gleiche Abstände, und sind daher arithmetisch proportional. Die beiden Reihen, die geometrische und die arithmetischen, mögen discrete seyn, d. i. solche, in welchen der Unterschied der Glieder eine endliche Größe ist, oder eine stetige, in welcher zwischen je zwey Gliedern der Grundreihe unendlich viele Glieder eingeschaltet sind. Immer geben gleiche Abstände gleiche Verhältnisse, und zu gleichen Verhältnissen gehören gleiche Abstände.

7. Hieraus ersieht man am deutlichsten, wie die Logarithmen die Multiplication in eine Addition und die Division in eine Subtraction verwandeln. Denn es sey die Proportion $A : B = C : D$, so ist

$$\log. A - \log. B = \log. C - \log. D,$$

wo das Zeichen — blos einen Unterschied anzeigt, ohne zu bestimmen, welche von beiden Größen die größere sey. Daher ist nun

$$\log. D = \log. B + \log. C - \log. A,$$

Digitized by Google

das ist, $\log. \frac{B \times C}{A} = \log. B + \log. C - \log. A.$

Ist $A = 1$, so ist $\log. B \times C = \log. B + \log. C.$

8. Daher ist überhaupt der Logarithme eines Products die Summe von den Logarithmen der Factoren.

9. Der Logarithme einer Potenz ist das so vielfache des Logarithmen der Wurzel als es der Grad der Potenz von der Einheit ist.

So ist $\log. 5^3 = 3 \log. 5$; $\log. 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log. 5$; und allgemein $\log. z^m = m \log. z$.

10. Umgekehrt, der Logarithme einer Wurzel ist der sovielte Theil des Logarithmen der Zahl, woraus die Wurzel genommen wird, als die Einheit es von dem Grade der Wurzel ist. Z. E. $\log. 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log. 5$; allgemein $\log. z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log. z$.

11. Daher ist $\log. z^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log. z$. Denn es ist $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$ (s. Potenz); also ist

$$\log. z^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} \log. z^m = \frac{m}{n} \log. z.$$

12. Es sey $A : B = C : 1$, also $\frac{A}{B} = C$. Nun ist $\log. A - \log. B = \log. C$. Oder der Logarithme eines Quotienten ist der Unterschied der Logarithmen des Dividendus und Divisors. Ist jener kleiner als dieser, so findet der Quotient C seine Stelle in dem zweyten Theile der geometrischen Reihe, $1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3}$: etc., oder $1 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3}$: etc. und der Logarithme desselben ist negativ, das heißt, ihn zu einem andern addiren,

Digitized by Google

ist diesen vermindern, so wie ihn subtrahiren ist, eben diesen vergrößern. Nämlich eine Zahl N mit einem Bruche $\frac{A}{B}$ multipliciren oder dividiren, ist dasselbe als sie mit dem Bruche $\frac{B}{A}$ dividiren oder multipliciren. Ist $\frac{A}{B}$ ein eigentlicher Bruch, so behält man den negativen Logarithmen $\log. A - \log. B$ bey, und addirt ihn bey der Multiplication der Zahl N zu $\log N$, subtrahirt ihn bey der Division, welches eben so viel ist, als in dem erstern Falle den positiven Logarithmen des Bruches $\frac{B}{A}$ oder $\frac{1}{C}$ subtrahiren, oder in dem andern Falle ihn addiren. — Bey der Anweisung zum Gebrauch der logarithmischen Tafeln wird ein Verfahren gewiesen werden, das negative ganz zu vermeiden.

13. Sofern man die Logarithmen als Exponenten von den Potenzen einer gegebenen Zahl ansieht, folgt alles dieses aus der Lehre von der Multiplication und Division der Potential- und Wurzelgrößen. Es ist

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wo m und n auch gebrochene Zahlen seyn können, wie sie es in Rechnungen meistentheils sind. Ist nun $A = a^m$; $B = a^n$, so ist $\log. A \times B = m + n$; $\log. \frac{A}{B} = m - n$.

Ist in der letztern Formel $m < n$, so ist $\frac{B}{A} = a^{n-m}$, und $\log. \frac{B}{A} = n - m$. Das ist, man braucht nur die Multiplication und Division mit einander zu vertauschen, wenn man statt des negativen Logarithmen den positiven gebrauchen will.

Digitized by Google

14. Der Logarithme eines Verhältnisses A : B ist der Unterschied der Logarithmen der beiden Glieder, oder es ist log. (A : B) = log. B — log. A. Dieses folgt aus (13.), weil Verhältnisse durch ihre Exponenten bestimmt werden. Oder insbesondere für Verhältnisse folgendergestalt.

Es sey a : b das Grundverhältniß, mit welchem das A : B verglichen wird, und b = ea. Man bilde die Reihe $a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^ma \ldots e^na \ldots$ etc. und setze, daß $A = e^ma$; $B = e^na$ ist, es sey nun in der ursprünglichen Reihe oder in der ausgefüllten. Die Größe jedes Verhältnisses wird durch den Abstand der Glieder gemessen, es sey durch Wiederholung des Verhältnisses a : b oder 1 : e allein, oder zugleich durch dessen Theilverhältnisse. Dieser Abstand ist aber n — m, da die Abstände von dem Anfangsgliede n und m sind.

15. Aus der erstern Begründung der logarithmischen Rechnung erhellt, warum die Einheit in der geometrischen Reihe zum Logarithmen die Einheit erhalten muß. Denn da ein Product zweyer Factoren die vierte Proportionale zur Einheit und zu den beiden Factoren ist, so müßte man von der Summe der Logarithmen der Factoren den Logarithmen der Einheit abziehen, und dieses bey jedem noch hinzukommenden Factor wiederholen. Eben so da ein Quotient die vierte proportionale zum Dividendus, Divisor und der Einheit ist, so müßte hier der Logarithme der Einheit zu dem Unterschiede der Logarithmen jener addirt werden.

Betrachtet man die Logarithmen als Exponenten einer Potenz, so daß $z = a^m$, so ist nothwendig m = 0, wenn z = 1 ist.

16. Es ist nun die Frage, den Logarithmen x für jede gegebene Zahl z, oder umgekehrt diese für jenen zu finden. Aus der Differentialformel für den Logarithmen einer Zahl (Differ. Formeln, 14.) lassen sich die Reihen für beide leicht herleiten, allein da $a^x = z$ eine Gleichung zwischen endlichen Größen ist, so muß die Entwickelung der x durch z, oder der z durch x auch blos durch die Ana-

Digitized by Google

lyſis des Endlichen geſchehen. Nebſt dieſer Methode hat man inzwiſchen auch den Weg durch die Analyſis des Unendlichen kennen zu lernen.

17. Ehe wir jene Entwickelung unternehmen, wird es zur beſſern Einſicht dienen, aus der Lehre von den geometriſchen Reihen den Satz zu bemerken, daß die Stellenzahlen gleich großer Glieder in zweyen Reihen, deren Anfangsglied einerley iſt, ein gegebenes Verhältniß haben (geometr. Reihe, 22.). Wenn alſo die Reihen ſind:

$$1 : a : a^2 : a^3 \ldots a^x : \text{etc.}$$

$$1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^u : \text{etc.}$$

und es iſt $a^x = e^u$, ſo iſt $x : u$ ein gegebenes Verhältniß, was auch die Zahlen a^x und e^u ſeyn mögen, ſo daß dieſes Verhältniß blos von den Grundzahlen a und e abhängt. Hieraus erhellt, daß die Function einer Zahl, welche den Logarithmen derſelben in verſchiedenen Syſtemen darſtellt, einen von der Zahl ſelbſt unabhängigen Factor haben muß, der durch die Baſis des Syſtems beſtimmt wird.

18. In der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : \text{etc.}$ ſchalte man zwiſchen je zwey Gliedern $n - 1$ Glieder ein, ſo iſt das erſte derſelben $= a^{\frac{1}{n}}$, und die Reihe iſt nun ...

$1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} \ldots a^{\frac{u}{n}} : \text{etc.}$, wo $\frac{u}{n}$ nun die Stelle eines unbeſtimmten Gliedes z angiebt. Man ſetze $\frac{u}{n} = x$, und $z = 1 + y$, ſo iſt $a^x = 1 + y$ oder $a^{\frac{u}{n}} = 1 + y$. Daraus iſt $a^{\frac{1}{n}} = (1+y)^{\frac{1}{u}}$. Den Theil rechter Hand entwickele man nach dem binomiſchen Lehrſatze, und multiplicire beide Theile, den einen mit nx, den andern mit u, ſo iſt

$$n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1)\,x = y + \left(\frac{1}{u} - 1\right).\frac{y^2}{1.2}$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{1}{u}-1\right)\left(\frac{1}{u}-2\right)\cdot\frac{y^3}{1.2.3}$$
$$\left(\frac{1}{u}-1\right)\left(\frac{1}{u}-2\right)\left(\frac{1}{u}-3\right)\cdot\frac{y^4}{1\ldots4}$$
$$+ \text{ etc.}$$

In dieser Gleichung hat $1+y$ blos solche Werthe, die in der Reihe $1 : a : a^2 : a^3 :$ etc. und der daraus durch Einschaltung entstandenen vorkommen. Wird n vergrößert, so verändern sich beide Theile der Gleichung.

19. Damit y jede Zahl bedeuten könne, muß die Reihe eine stetige seyn. Dadurch werden u und n beide unendlich groß, wobey sie aber jedes endliche Verhältniß erhalten können. So wie für endliche n und u der Quotient $\frac{u}{n}$ die Stelle x des Gliedes $1+y$ in Beziehung auf den Abstand der Basis a von 1 als Einheit anzeigt, so zeigt eben dieser Quotient, auch bey unendlichen Werthen von u und n, diesen Abstand an.

20. Nimmt man demnach u und n unendlich groß, so verwandelt sich die Reihe in der Gleichung rechter Hand in diese:

$$y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + \text{etc.}$$

In dem Producte $n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ wird der eine Factor unendlich groß, der andere unendlich klein, da $a^{\frac{1}{n}}$ sich der Einheit desto mehr nähert, je größer der Grad der Wurzel ist. Das Product bleibt inzwischen eine endliche Größe. Denn es ist gezeigt, daß ein Logarithme eine Function der Zahl multiplicirt mit einer unveränderlichen, dem System eigenen Größe ist. Da nun x gleich ist der Reihe $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ etc. dividirt durch die

Digitized by Google

Gränze von $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, so muß das reciproke dieses Products jener eigenthümliche Factor seyn.

21. Es läßt sich auch folgendergestalt darthun, daß die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ eine endliche bestimmte Größe ist. — Man nehme irgend eine Wurzel aus a, und setze diese, $a^{\frac{1}{m}} = 1 + q$, so ist

$$a^{\frac{1}{mn}} = (1 + q)^{\frac{1}{n}}, \text{ und}$$

$$a^{\frac{1}{mn}} - 1 = \frac{1}{n}q + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right).\frac{q^2}{1.2} + \text{etc.}$$

also

$$mn(a^{\frac{1}{mn}} - 1) = m\left(q + \left(\frac{1}{n} - 1\right).\frac{q^2}{1.2} + \text{etc.}\right).$$

Die Reihe enthält zwey Theile, einen, der von n abhängig ist, und einen, der von n nicht abhängt. Jener wird immer kleiner, je größer n genommen wird; dieser bleibt ungeändert, bey demselben Werthe von m. Sondern wir den letztern von der ganzen Reihe ab, so haben wir die Gränze der ganzen Reihe. Sie ist $= m\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \text{etc.}\right)$. Damit diese aber auch berechnet werden könne, muß sie convergiren, oder q muß ein eigentlicher Bruch seyn. Man kann m so groß nehmen, daß diese Forderung erfüllt wird. So ist $m\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \text{etc.}\right)$ die Gränze des Products $mn(a^{\frac{1}{mn}} - 1)$, das ist der von n unabhängige Theil desselben. Jene Reihe ist nun auch die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, welches dieselbe Form mit jenem hat.

Digitized by Google

Es ist einerley, ob der unendliche Exponent der Wurzel durch die unendliche Zahl n oder durch mn bezeichnet wird.

22. Exempel. In dem Briggischen System ist, zufolge der berechneten größern Tafeln, $0,0001 = \log. 1,00023029$ nahe, oder für $n = 10000$, und $a = 10$, ist $a^{\frac{1}{n}} = 1,00023029$ nahe. Also ist $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = 2,3029$. Ferner ist $0,00001 = \log. 1,000023026$ nahe, also ist für $n = 100000$ das Product $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = 2,3026$ nahe. Demnach ist in diesem System dieses Product, oder der beständige Divisor in dem Werthe des Logarithmen x zu der Zahl $1 + y$ etwas kleiner als 2,3026.

23. Die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ bezeichne man durch $\frac{1}{M}$, so ist der Logarithme der Zahl $1 + y$, oder

$$x = M(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}$$

Wie die Zahl M aus der Basis a leichter als nach der Formel (21.) gefunden werden möge, müssen fernere Untersuchungen ergeben.

24. Die Zahl M heißt der Modulus des logarithmischen Systems, in welchem a die Basis ist. Entweder ist die Basis gegeben, so ist der Modulus zu finden; oder umgekehrt, der Modulus wird angenommen, so ist die Basis daraus herzuleiten.

25. Wenn $M = 1$ genommen wird, so heißen die Logarithmen die natürlichen. In jedem andern System heißen die Logarithmen künstliche, weil sie aus jenen durch die Multiplication mit einem Modulus hergeleitet werden. Die natürlichen Logarithmen haben die einfachste Form. Es ist nämlich

Digitized by Google

$$\log. nat. (1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}$$

26. Die natürlichen Logarithmen heißen bey den ältern Geometern, und noch gewöhnlich bey den Engländern, die hyperbolischen, in Beziehung auf eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, welche in dem Artikel, Quadratur, vorkommen wird. Hier nur vorläufig zur Erläuterung des Ausdrucks folgendes. In Tab. XIII. Fig. 74. zum zweyten Theile sey SAs eine gleichseitige Hyperbel, so daß die Ordinaten AE, ML an die Asymptote CS senkrecht darauf sind. Nimmt man CE zur Einheit, so ist die Area AELM gleich dem natürlichen Logarithmen der Abscisse CL. An den ungleichseitigen Hyperbeln sind die Werthe der Flächenräume, wie AELM, künstliche Logarithmen, wenn CE die Einheit ist. Man sieht, daß die Benennung, hyperbolische Logarithmen, eine willkürliche engere Bedeutung hat.

27. Die Logarithmen derselben Zahl in verschiedenen Systemen verhalten sich wie die Moduli der Systeme, vergl. 17.

Wenn die Zahlen wenig von der Einheit verschieden sind, so verhalten sich ihre Logarithmen nahe wie die Unterschiede der Zahlen von der Einheit.

Das Verhältniß des natürlichen Logarithmen einer Zahl zu dem Überschusse derselben über die Einheit, nähert sich immer mehr und mehr dem Verhältniß der Gleichheit, je kleiner der Überschuß ist.

28. Zu einem gegebenen Logarithmen x wird die zugehörige Zahl $1+y$ durch folgende Reihe gefunden:

$$1+y = 1 + cx + \frac{c^2x^2}{1.2} + \frac{c^3x^3}{1.2.3} + \frac{c^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{c^5x^5}{1..5} + \frac{c^6x^6}{1..6} + \text{etc.}$$

wo c das Umgekehrte des Modulus ist.

Digitized by Google

Denn es seyn in der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 :$ etc. . . $n - 1$ Glieder zwischen je zwey Gliedern eingeschaltet, und $n(a^{\frac{x}{n}} - 1) = p$, so ist $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n}$, und

$1 + y = a^x = a^{\frac{u}{n}} = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^u$. Durch Entwickelung der Potenz des Binomium ist

$$1 + y = 1 + \frac{u}{n}p + \frac{u.u-1.}{n.2n}p^2 + \frac{u.u-1.u-2.}{n.2n.3n}p^3 + \frac{u...u-3.}{n...4n}p^4 + \text{etc.}$$

Die Gränze der Coefficienten von p ist nach ihrer Folge

$\frac{u}{n}$; $\frac{u^2}{1.2n^2}$; $\frac{u^3}{1.2.3n^3}$; $\frac{u^4}{1.2.3.4n^4}$, etc.

oder x; $\frac{x^2}{1.2}$; $\frac{x^3}{1.2.3}$; $\frac{x^4}{1.2.3.4}$; etc.

Die Gränze des Products p sey $= c$, so wird für eine stetige Reihe der Zahlen und Logarithmen die angegebene Reihe erhalten.

29. In dem natürlichen System ist

$$1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1..5} + \text{etc.}$$

30. Die Basis des natürlichen Systems der Logarithmen werde hinführo ausschließlich durch e bezeichnet; es ist

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1..5} + \frac{1}{1...6} + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Es gehört nämlich zu der Basis als Zahl der Logarithme $= 1$. Die numerische Entwickelung giebt

$$e = 2{,}718281\ 828459\ldots$$

31. Da $e^x = 1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ so folgt, daß

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

32. Dieses hängt mit dem binomischen Lehrsatze folgendermaßen zusammen. Das Binomium $1 + qt$ werde auf die Potenz mit dem Exponenten $\frac{p}{q}$ erhoben, so ist

$$(1 + qt)^{\frac{p}{q}} = 1 + pt + \frac{p.p-q.}{1.2}t^2 + \frac{p.p-q.p-2q.}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}$$

Diese Reihe werde ferner auf die Potenz mit dem Exponenten x erhoben, so ist dieselbe auch $= (1 + qt)^{\frac{px}{q}}$.

Folglich ist

$$\left(1 + pt + \frac{p.p-q.}{1.2}t^2 + \frac{p.p-q.p-2q.}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}\right)^x = 1 + px.t + \frac{px.px-q.}{1.2}t^2 + \frac{px.px-q.px-2q.}{1.2.3}t^3 + \text{etc.}$$

In dieser Gleichung setze man $q = 0$, und $pt = c$, so ist

Digitized by Google

$$\left(1+\frac{c}{1}+\frac{c^2}{1.2}+\frac{c^3}{1.2.3}+\frac{c^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right)^x$$
$$=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1...4}+\text{etc.}$$

Hier ist die Reihe $1+c+\frac{c^2}{1.2}+$ etc. die Basis, also der erste Theil der Gleichung die Zahl, ihr Logarithme $=x$, durch welchen die Zahl mittelst des zweyten Theils ausgedruckt wird. Setzt man $pt=1$, so wird die Reihe (31.) erhalten. Die Potentialgröße $(1+qt)^{\frac{p}{q}}$ kommt der Basis immer näher, je kleiner q genommen wird. Die Größe der Basis aber kommt auf den Werth des Products p t an.

33. Den Logarithmen x aus dieser Gleichung durch die Zahl z oder vielmehr durch $z-1=y$ auszudrucken, muß für x eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten, $x=y-Ay^2+By^3-Cy^4+$ etc. gesetzt werden. Die Coefficienten der Reihe nach den Potenzen von y geben die Gleichungen zur Bestimmung der Werthe von A, B, C, etc. doch nur durch Induction. Inzwischen ist diese Rechnung viel leichter als die von Vega in der Einleitung zu seiner vollständigen Sammlung logarithmischer Tafeln geführte.

34. In einem künstlichen System sey die Basis $=a$, der Modulus $=M$, so ist $M=\frac{1}{\text{log. nat. } a}$, und log. nat. a ist die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}}-1)$.

Denn es ist $x=M\,\text{log. nat.}(1+y)$. Nun ist, wenn $1+y=a$ genommen wird, $x=1$, daher ist $\frac{1}{\text{log. nat. } a}=M$.

35. Auch ist $M=\text{log. artif. e}$.

Denn es ist $\text{log. art. e}=M\,\text{log. nat. e}=M$.

Digitized by Google

36. Die Berechnung der Logarithmen in einem künstlichen System beruht also auf der Bestimmung des natürlichen Logarithmen der Basis. Aus der unten folgenden Methode zur leichten Berechnung der Logarithmen wird sich ergeben, daß log. nat. $10 = 2,302585\ 092994\ldots$ ist. Dieser ist die Gränze des Products $n(10^{\frac{1}{n}} - 1)$, und $\frac{1}{2,3025\ldots}$ ist der Modulus des Briggischen Systems, das ist, $M = 0,434294\ 481903\ldots$ Mit dieser Zahl sind die natürlichen Logarithmen zu multiplicieren, um die Briggischen zu erhalten. Die natürlichen werden aus den Briggischen durch die Multiplication mit der Zahl $2,302585\ldots$ gefunden.

37. Es ist

log. Brigg. $2,302585\ldots = 0,36221\ 56886\ldots$ zufolge Euler in Theoria Comet. et Planetarum, p. 18. Also ist log. Brigg. $M = 9,63778\ 43114 - 10$.

In Lamberts Zusätzen zu den ... Tafeln, S. 134 ist durch einen Schreibfehler Basis statt Modulus logarithmorum Briggianorum gesetzt.

38. Die Zahl, deren Logarithme zu finden ist, sey kleiner als die Einheit, oder $z = 1 - y$. Dadurch wird der Exponent x von a^x negativ, wenn a größer als die Einheit ist, wie es die bisherige Rechnung erheischt, da $a^x = 1 + y$ gesetzt ist. Man setze nun $a^{-x} = 1 - y$, wo x und y absolute Zahlen bedeuten, oder $a^x = \frac{1}{1-y}$. Ferner sey, wie vorher, $x = \frac{u}{n}$, also $a^{\frac{u}{n}} = \frac{1}{1-y}$, und $a^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{n}} = (1-y)^{-\frac{1}{n}}$. Daraus ist, auf ähnliche Art wie in (18.),

Digitized by Google

$$n\left(a^{\frac{x}{n}}-1\right)x = y + \left(\frac{1}{u}+1\right)\cdot\frac{y^2}{1.2} + \left(\frac{1}{u}+1\right)\left(\frac{1}{u}+2\right)\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \left(\frac{1}{u}+1\right)\left(\frac{1}{u}+2\right)\left(\frac{1}{u}+3\right)\cdot\frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Man nehme auf beiden Seiten die Gränzen, für ein unendliches n, und es ist

$$x = \frac{1}{c}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

Dieses ist der absolute Werth von x, für eine Reihe mit Exponenten, die kleiner als 1 sind. In Beziehung auf den Theil der ganzen Reihe, worin die Exponenten größer als 1 sind, ist x negativ, oder

$$\log.(1-y) = -\frac{1}{c}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \text{etc.}\right).$$

Man kann aber auch die Logarithmen in dem Theile der Reihe mit Exponenten unter 1 als positiv annehmen, wodurch die Logarithmen in dem andern Theile negativ werden. Das ist der Fall in dem Neperischen System.

39. Auf gleiche Art ist die Reihe für die Zahl $1-y = z$ durch ihren Logarithmen,

$$1-y = 1 - cx + \frac{c^2x^2}{1.2} - \frac{c^3x^3}{1.2.3} + \frac{c^4x^4}{1...4} - \frac{c^5x^5}{1...5} + \text{etc.}$$

In dem Beweise (28.) wird $1-y$ statt $1+y$, und $-x$ oder $-\frac{u}{n}$ statt x oder $\frac{u}{n}$ gesetzt. In dem andern Beweise (32.) zeigt ein negatives x ein Glied der abnehmenden Reihe nach 1 an, und in der binomischen Formel werden die Coefficienten mit einer ungeraden Anzahl Factoren negativ, wofern der zweyte Theil des Binomium positiv ist.

Digitized by Google

40. Aus den Formeln (23. und 38.) sieht man, wie sich die Logarithmen von $1+y$ und $1-y$ unterscheiden, auch in Ansehung der Größe.

41. Die Integration giebt aus der Differentialgleichung zwischen x und z die Reihen für Logarithme und Zahl ganz leicht. Diese Gleichung ist schon in dem Artikel, Differentialformeln, 14. gefunden. Um hier den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, folgt hier die Herleitung derselben, zugleich auf eine etwas veränderte Art, wie sie schon in frühern Zeiten William Jones*) gefunden hat, aus dessen nachgelassenen Papieren sie in den Philos. Transact. Vol. 61. mitgetheilt ist.

Es sey $z = a^x$; die zusammen gehörigen endlichen Veränderungen von z und x seyn Δz und Δx. Es ist also $z + \Delta z = a^{x+\Delta x} = a^x . a^{\Delta x}$. Man setze $a = 1 + b$, so ist

$$z + \Delta z = a^x\left(1 + \Delta x . b + \frac{\Delta x . \Delta x - 1}{1 . 2} . b^2 + \frac{\Delta x . \Delta x - 1 . \Delta z - 2}{1 . 2 . 3} . b^3 + \text{etc.}\right).$$

Daraus ist

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = a^x\left(b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{4}b^4 + \tfrac{1}{5}b^5 - \text{etc.} + P\Delta x\right),$$

wo P eine aus b und Δx zusammengesetzte Function ist. Hieraus ist der Differentialquotient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\left(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}\right).$$

Die in z multiplicirte Reihe setze man $= \frac{1}{M}$, so ist die

*) William Jones ist 1675 geboren, und 1749 als Vice-Präsident der Königl. Gesellschaft zu London gestorben. Sein Sohn war der in unsern Zeiten durch seine Bemühungen um die Ostindische Literatur berühmt gewordene Sir William Jones.

Digitized by Google

Differentialgleichung zwischen Logarithme und Zahl,

$$\partial x = \frac{M\partial z}{z}.$$

42. Diese Gleichung zu integriren setze man $z = 1 + y$, so ist $\partial x = \frac{M\partial y}{1+y}$. Den zweyten Theil der Gleichung verwandle man in eine Reihe durch die Division, so ist

$$\partial x = M(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \text{etc.})\partial y.$$

Die Integration giebt sogleich

$$x = \text{Const.} + M(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}).$$

Wenn $y = 0$, so ist $z = 1$, und $x = 0$, also ist Const. $= 0$, und es ist

$$x = M(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \text{etc.}).$$

das ist

$$\log. z = M[(z-1) - \tfrac{1}{2}(z-1)^2 + \tfrac{1}{3}(z-1)^3 - \text{etc.}].$$

43. Um die Zahl z durch ihren Logarithmen x auszudrucken, setze man $z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$ wo das erste Glied $= 1$ gesetzt ist, weil $z = 1$ ist, wenn $x = 0$ genommen wird. Die als der Werth von z angenommene Reihe setze man in die Differentialgleichung, $z\partial x = M\partial x$, so ist

$$M\partial z = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.})\partial x.$$

Die Integration giebt

$$Mz = \text{Const.} + x + \tfrac{1}{2}Ax^2 + \tfrac{1}{3}Bx^3 + \tfrac{1}{4}Cx^4 + \tfrac{1}{5}Dx^5 + \tfrac{1}{6}Ex^6 + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Wenn $x = 0$ ist, so ist $z = 1$, also Const. $= M$. Man setze, wie oben geschehen ist, $M = \frac{1}{c}$, so ist

$$z = 1 + c(x + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Bx^3 + \frac{1}{4}Cx^4 + \text{etc.}).$$

Diese Reihe ist mit der angenommenen Reihe für z identisch, da beide für jeden Werth von x einerley z geben müssen. Folglich ist $A = c$; $B = \frac{1}{2}Ac$; $C = \frac{1}{3}Bc$; $D = \frac{1}{4}Cc$; $E = \frac{1}{5}Dc$, u. s. f. wo das Gesetz der Formation offenbar ist. Es ist also

$$z = 1 + cx + \frac{1}{1.2}c^2x^2 + \frac{1}{1.2.3}c^3x^3 + \frac{1}{1.2.3.4}c^4x^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}c^5x^5 + \text{etc.}$$

44. Man erhält dasselbe, wenn man das Differential der für z angenommenen Reihe und die Reihe selbst in die Differentialgleichung, $\partial z = cz\partial x$, setzt. Die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x geben die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten in jener Reihe.

Man kann auch in der Gleichung $\partial z = c(1 + y)\partial x$, oder $\partial y = c\partial x + cy\partial x$, den Werth von z durch Integration stückweise finden, und jeden Theil nach der Reihe in das Glied $cy\partial x$ setzen, welches durch Integration den folgenden Theil giebt. So ist der erste Theil von $y = cx$. Durch diesen wird $cy\partial x = c^2x\partial x$, wovon das Integral ist $\frac{1}{2}c^2x^2$, der zweyte Theil von y. S. Kästners Analysis des Unendlichen, 221. Das Verfahren ist demjenigen ähnlich, welches Newton bey der Auflösung endlicher oder differentieller Gleichungen zu gebrauchen pflegt. Es gewährt aber nicht die faßliche Übersicht wie das mit unbestimmten Coefficienten.

Digitized by Google

Cotes in seiner Harmonia mensurarum kehrt die Reihe $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.} = x$ dadurch um, daß er ihre Potenzen berechnet, und diejenigen Factoren zu diesen Potenzen sucht, wodurch das Aggregat $= y$ wird. Diese Rechnung ist unbequem und nicht befriedigend.

45. Da Differentiale von der Form $\frac{\partial z}{z}$ häufig vorkommen, so würde man auf die Logarithmen gerathen seyn, wenn auch Neper nicht sie zur Abkürzung beschwerlicher Multiplicationen und Divisionen ersonnen hätte. Die Vergleichung des Integrals $(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \text{etc.}$ mit der Binomialformel würde darauf geleitet haben, daß das Integral der Exponent x einer Potenz a^x seyn müsse.

In der Analysis sind Logarithmen mehr als in der Arithmetik, wo sie bloß Stellvertreter von Multiplicatoren und Divisoren sind. In jener sind sie Functionen einer veränderlichen Größe, die nach einer gewissen Form aus dieser zusammengesetzt werden.

Differenzen der Logarithmen.

46. Man nehme die Zahlen z, $z+1$, $z+2$, $z+3$, etc. deren natürliche Logarithmen seyn x, x', x'', x''', etc. Die ersten Differenzen seyn Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, etc. Die zweyten $\Delta^2 x$, $\Delta^2 x'$, etc. Die dritten $\Delta^3 x$, etc. Es ist nun $\Delta x = \log. \frac{z+1}{z} = \log. (1 + \frac{1}{z})$, also

$$\Delta x = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$\Delta x' = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2(z+1)^2} + \text{etc.}$$

indem bey dem zweyten Gliede der ersten Differenzen die Zahl $z+1$ statt z kommt. Zieht man das vorhergehen-

Digitized by Google

de Differenzglied von dem folgenden ab, wie es immer geschieht, so ist

$$\Delta^2 x = -\frac{1}{z(z+1)} + \frac{2z+1}{2z^2(z+1)^2} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 x' = -\frac{1}{(z+1)(z+2)} + \frac{2z+3}{2(z+1)^2(z+2)^2} - \text{etc.}$$

Daraus ist

$$\Delta^3 x = +\frac{2}{z(z+1)(z+2)} - \frac{6z^2+12z+4}{2z^2(z+1)^2(z+2)^2} + \text{etc.}$$

Noch ist

$$\Delta^4 x = -\frac{6}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \text{etc.}$$

Die Rechnung mag man nach diesem Muster fortsetzen. Hier ist es genug, daraus zu sehen, wie die Differenzen abnehmen, bey größern Zahlen nahe umgekehrt wie die Potenzen von x, deren Exponenten die Ordnungszahlen der Differenzen sind.

Auch sieht man, daß die zweyten Differenzen negativ sind, oder daß die ersten Differenzen abnehmen, wenn die Zahlen zunehmen.

47. Setzt man das Differential der Zahl unveränderlich, so ist aus der Differentialgleichung, $\partial x = \frac{\partial z}{z}$, erstlich $\partial^2 x = -\frac{\partial z^2}{z^2} = -z^{-2}\partial z^2$; ferner $\partial^3 x = +2z^{-3}\partial z^3$; $\partial^4 z = -2.3z^{-4}\partial z^4$; $\partial^5 z = +2.3.4z^{-5}\partial z^5$, u. s. f. Die Differentio-Differentialformeln für ein unveränderliches ∂x sind im I. Th. S. 898. angegeben.

48. Da $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}$ ist, so ist, für natürliche Logarithmen,

Digitized by Google

$$\Delta x = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{z+1} + \frac{z-1}{2z^2(z+1)} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

Es giebt also zwey Gränzen, zwischen welchen Δx liegt, nämlich $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{z+1}$, oder $\Delta x < \frac{1}{z}$, und $\Delta x > \frac{1}{z+1}$.

49. Der Logarithme des arithmetischen Mittels ist größer als der Logarithme des geometrischen.

Denn man nehme die zwey Zahlen $z-1$, und $z+1$, so ist z ihr arithmetisches Mittel, und $\sqrt{(z-1)(z+1)}$ ihr geometrisches. Da $z \pm 1 = z\left(1 \pm \frac{1}{z}\right)$ ist, so ist

$$\log.(z+1) = x + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \text{etc.}$$

$$\text{und } \log.(z-1) = x - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}\log.(z+1)(z-1) = x - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z^4} - \text{etc.}$$

Es ist nämlich das arithmetische Mittel größer als das geometrische, s. Mittel.

50. Des Satzes (48.) hat sich Neper bedient, um aus dem Logarithmen einer Zahl den einer nahe daran liegenden zu finden. Seine Berechnungsart beruht vorzüglich darauf. Auch Mercator hat diesen Satz benutzt. Der Beweis kann hier nicht so gegeben werden, wie diese Mathematiker ihn geführt haben. Zur Ergänzung der Lehre von der geometrischen Reihe, verdient der Satz aus der Natur derselben hergeleitet zu werden.

51. Es sey eine geometrische Reihe,

$$r : er : e^2r : e^3r \ldots e^nr,$$

und eine damit verbundene arithmetische,

$$0,\ d,\ 2d.\ 3d \ldots nd.$$

Digitized by Google

Man setze den Unterschied der beiden ersten Glieder der geometrischen Reihe dem Unterschiede zweyer nächsten der arithmetischen gleich, das ist $er - r = d$, so ist, wenn die Reihe eine zunehmende ist,

$$nd < e^n r - r; \quad nd > \frac{e^n - r}{e^n r} r.$$

Denn es ist $e^n r - r = (e-1)r + (e^2 - e)r + (e^3 - e^2)r \ldots (e^n - e^{n-1})r$. Da dieses eine zunehmende Reihe ist, so ist $n(e-1)r < e^n r - r$, das ist $nd < e^n r - r$.

Ferner ist in dem entgegengesetzten Theile der Reihe, $r - e^{-n} r = (1 - e^{-1})r + (e^{-1} - e^{-2})r + (e^{-2} - e^{-3})r \ldots + (e^{-n+1} - e^{-n})r$. Diese Reihe ist eine abnehmende; also ist $n(1 - e^{-1})r > r - e^{-n} r$, oder $n(e-1)r > e(r - e^{-n} r)$, das ist, $nd > \frac{e(e^n r - r)}{e^n r} r$, und noch mehr ist . .

$$nd > \frac{e^n r - r}{e^n r} r.$$

52. Es sey $e^m r$ noch ein Glied der Reihe, und $m < n$; es ist

$$(n-m)d < \frac{e^n r - e^m r}{e^m r} r, \text{ und}$$

$$(n-m)d > \frac{e^n r - e^m r}{e^n r} r.$$

Denn aus (51.) ist $(n-m)d < e^{n-m} r - r$, und $(n-m)d > \frac{e^{n-m} r - r}{e^{n-m} r} r$, woraus jene beiden Sätze sich unmittelbar ergeben.

Wenn e kleiner als die Einheit ist, so braucht man nur die Exponenten m und n zu vertauschen.

Das arithmetische Mittel beider Quotienten giebt den gesuchten logarithmischen Unterschied desto näher, je kleiner

Digitized by Google

derselbe ist. Oder man nehme zum Divisor das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen $e^m r$ und $e^n r$.

53. Exempel. Es ist

log. nat. 100 = 4,60517 01860
log. nat. 101 = 4,61512 05168

Unterschied = 0,00995 03308.

Ferner $\frac{101-100}{100} = 0{,}01$, und $\frac{101-100}{101}$ = 0,0099009900. Das arithmetische Mittel dieser Quotienten, 0,00995 04950 zu log. 100 addirt, giebt 4,61512 06810, bis in die sechste Stelle mit log. 101 übereinstimmig.

Dieses Hülfsmittel war nur bey einem System anwendbar, worin der Unterschied der beiden ersten Glieder der geometrischen Reihe dem Unterschiede der zugehörigen in der arithmetischen Reihe gleich gesetzt wird.

Logarithmotechnie.

54. Nun ist es nöthig, Methoden zur leichtern Berechnung der Logarithmen zu suchen, welche man unter der Benennung, Logarithmotechnie, begreifen kann. Mercator nannte seine Schrift über die Berechnung der Logarithmen, Logarithmotechnia. Die Berechnung der künstlichen Logarithmen gründet sich auf die Berechnung der natürlichen, wegen des Moduls des Systems, der aus dem natürlichen Logarithmen der Basis gefunden werden muß (34.). Es ist daher im folgenden blos von den natürlichen Logarithmen die Frage.

55. Die Reihe (25.), welche den natürlichen Logarithmen durch die Zahl giebt, ist nur brauchbar, wenn y kleiner als 1, das ist, wenn die Zahl z kleiner als 2 ist, weil für größere y die Reihe divergirt. Selbst für y, die wenig kleiner als 1 sind, convergirt die Reihe langsam. Man muß daher den Logarithmen einer Zahl aus andern Logarithmen, die sich bequem hinlänglich weit berechnen lassen, zusammensetzen. Die Addition und Subtraction

Digitized by Google

der Logarithmen giebt eine Multiplication und Division der zugehörigen Größen.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß man nur die Logarithmen der Primzahlen zu suchen braucht, da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus diesen durch die Addition gefunden werden.

56. Die Logarithmen der erstern kleinern Primzahlen, 2, 3, 5, 7, 11 findet man am leichtesten mittelbar durch die Logarithmen solcher Brüche, woraus sie durch Multiplication und Division hervorgebracht werden, dergleichen für die Primzahlen 2, 3, 5 sind $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$. Diese Brüche müssen aber der Einheit sehr nahe kommen, um die Reihen für ihre Logarithmen möglichst convergirend zu machen. Solche Brüche sind $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{81}{80}$, $\frac{121}{120}$, $\frac{50}{49}$. Bezeichnet man diese durch z, so ist für dieselben y nach der Reihe, $-\frac{1}{10}$, $+\frac{1}{10}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{49}$.

Hieraus ergiebt sich zuerst der log. $\frac{3}{2}$, da $\frac{3}{2} = \frac{120}{80} = \frac{120}{121} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80}$; also $\log. \frac{3}{2} = 2 \log. \frac{11}{10} + 2 \log. \frac{10}{9} + \log. \frac{81}{80} - \log. \frac{121}{120}$. Ferner ist $5 = \frac{80}{16} = \frac{80}{81} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{80}{81} \cdot \frac{3^4}{2^4}$, also $\log. 5 = 4 \log. \frac{3}{2} - \log. \frac{81}{80}$. Weiter ist $2 = 5 \cdot \frac{2}{5} = 5 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{9} = 5 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$, folglich $\log. 2 = \ldots$

Digitized by Google

$l.5 - l.\frac{10}{9} - 2l.\frac{3}{2}$. Nun ist $\log.3 = l.2 + l.\frac{3}{2}$. Da $7^2 = \frac{49}{50} \cdot 25 \cdot 2$ ist, so ist $\log.7 = l.5 + \frac{1}{2}l.2 - \frac{1}{2}l.\frac{50}{49}$. Noch ist $\log.11 = l.\frac{11}{10} + l.2 + l.5$.

Aus den Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5 werden nun die Logarithmen von 4, 6, 8, 9, 10, 12 leicht gefunden. Es ist

log.nat.	1	= 0,00000	00000
l.	2	= 0,69314	71805
l.	3	= 0,09861	22886
l.	4	= 1,38629	43611
l.	5	= 1,60943	79124
l.	6	= 1,79175	94692
l.	7	= 1,94591	01490
l.	8	= 2,07944	15416
l.	9	= 2,19722	45773
l.	10	= 2,30258	50929
l.	11	= 2,39789	52727
l.	12	= 2,48490	66497

Die folgenden Methoden geben eine ganz bestimmte Art zu verfahren an.

57. Da aus (25. u. 38.) ist

$\log.nat.(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$

und

$\log.nat.(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \text{etc.}$

so ist

$\log.nat.\frac{1+y}{1-y} = 2(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \text{etc.})$

und

$\log.nat.(1-y^2) = -2(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{6}y^6 + \text{etc.})$.

Digitized by Google

Es ist nämlich, wenn $1+y=e^{\alpha}$; $1-y=e^{-\beta}$ ist, $\frac{1+y}{1-y}\frac{e^{\alpha}}{e^{-\beta}}=e^{\alpha+\beta}$, und der Logarithme dieses Bruchs ist die Summe der absoluten Werthe der Exponenten von e oder der Logarithmen. Hingegen ist $(1+y)(1-y)=e^{\alpha}.e^{-\beta}=e^{\alpha-\beta}$, und der Logarithme des Products ist der Unterschied der absoluten Werthe.

58. Man setze die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, $z=\frac{1+y}{1-y}$, so ist $y=\frac{z-1}{z+1}$, und

$$\log z = 2(y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\text{etc.}).$$

Die Reihe convergirt inzwischen nur langsam, wenn z über 10 groß ist. Nach dieser Formel ist

$$\text{l. nat. } 2 = 2(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{3.27}+\frac{1}{5.243}+\frac{1}{7.2187}+\text{etc.}).$$

$$\text{l. nat. } 3 = 2(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{5.32}+\frac{1}{7.128}+\text{etc.}).$$

Die zweyte Reihe convergirt schon viel weniger als die erste.

59. Eine mehr convergirende Reihe zu erhalten, setze man $\frac{z}{z-1}=\frac{1+y}{1-y}$, wodurch der letztere Bruch sich desto mehr der Einheit nähert, je größer z ist. Diese Annahme giebt $y=\frac{1}{2z-1}$. Es ist nach derselben

$$\text{l. nat. } z = \log.(z-1)+2(y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\text{etc.}).$$

Die Formel setzt voraus, daß der log.$(z-1)$ schon bekannt sey. Dieses ist immer der Fall, wenn die Logarithmen der Primzahlen nach der Ordnung gesucht werden.

Digitized by Google

Exempel.

l. nat. $5 = l.\,4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{729} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{59049} + \text{etc.}\right)$.

l. nat. $7 = l.\,6 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2197} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{371293} + \text{etc.}\right)$.

60. Man setze $y = \frac{1}{z}$, so ist $l.\,\frac{z+1}{z} = \log.(1+y)$, und

$\log.\text{nat.}\,z = \log.(z+1) - y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \text{etc.}$

Oder auch,

$\log.\text{nat.}\,z = \log.(z-1) + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$

61. Es bleibe $y = \frac{1}{z}$, so giebt die Reihe für log. nat. $(1-y^2)$ diese Formel,

$$\log.\text{nat.}\,z = \tfrac{1}{2}\log.(z-1) + \tfrac{1}{2}\log.(z+1) + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{8z^8} + \text{etc.}$$

Denn es ist $l.\,\frac{z^2-1}{z^2} = -2\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right)$.

oder $l.\,\frac{z^2}{z^2-1} = 2\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right)$.

Addirt man auf der einen Seite den $\log.(z^2-1)$, auf der andern die diesem gleichgültige Summe, $\log.(z-1) + \log.(z+1)$, und halbirt alle Glieder der Gleichung, so entsteht die angegebene Formel.

62. Man setze $\frac{zz}{zz-1} = \frac{1+y}{1-y}$, so ist $y = \frac{1}{2zz-1}$, und es ist

$$\log.\text{nat.}\,z = \tfrac{1}{2}\log.(z-1) + \tfrac{1}{2}\log.(z+1) + y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Diese Reihe convergirt noch schneller als die vorhergehende.

Da das arithmetische Mittel zwischen zwey um die Einheit unterschiedenen Zahlen von dem geometrischen Mittel desto weniger verschieden ist, je größer die Zahlen sind, so sieht man, woher die Ergänzung des log. z zu $\frac{1}{2}$l.(z−1) + $\frac{1}{2}$l.(z+1), oder zu dem Logarithmen des geometrischen Mittels so klein wird, wenn z auch nur mäßig groß ist. Es ist für

z	11 ;	13 ;	17 ;	19 ;	23.
y	$\frac{1}{241}$;	$\frac{1}{337}$;	$\frac{1}{577}$;	$\frac{1}{721}$;	$\frac{1}{1057}$.

63. Man setze $\frac{z^n + d}{z^n} = \frac{1+y}{1-y}$, so ist

$y = \frac{d}{2z^n + d}$, und

l.nat.$(z^n + d)$ − l.nat.$z^n = 2(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 +$ etc.).

Es sey $\frac{z^n}{z^n - d} = \frac{1+y}{1-y}$, so ist $y = \frac{d}{2z^n - d}$, und

l. nat. z^n − l. nat. $(z^n - d) = 2(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 +$ etc.).

Durch diese Formeln findet man, wenn log.$(z^n \pm d)$ bekannt ist, den log. z^n, und daraus log. z, oder aus log. z^n den log. $(z^n \pm d)$.

Exempel. Man nehme n = 3, so werden, wenn die Logarithmen der Primzahlen bis 11 gefunden sind, die von 13, 17, 19, 23, durch folgende Annahmen von d gefunden, wo + d auf die erstere Formel, − d auf die zweyte sich beziehen.

z = 13 ; d = + 3 ; $y = \frac{3}{4397}$.
z = 17 ; d = + 1 ; $y = \frac{1}{9827}$.
z = 19 ; d = + 1 ; $y = \frac{1}{13719}$.
z = 23 ; d = + 1 ; $y = \frac{1}{24335}$.

Digitized by Google

Die Werthe von $z^3 \pm d$ sind nach ihrer Folge, 2200; 4914; 6860; 12167, von welchen die Logarithmen alle durch die nach der Ordnung schon gefundenen Logarithmen bekannt sind.

64. Anstatt z^n setze man irgend eine Zahl N, und $y = \frac{d}{2N + d}$, so ist

$$\log. nat. (N+d) = \log N + 2(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}).$$

Wird d negativ genommen, so wird es y auch. Diese Formel dient bequem den Logarithmen einer Zahl aus dem Logarithmen einer jeden andern herzuleiten. Die Formel (59.) ist ein besonderer Fall davon.

65. Es sey $mz = n \pm 1 = n\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$, so ist

$$\log. nat. z = \log. n - \log. m \pm \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \text{etc.}\right).$$

Nach dieser Formel muß der Multiplicator m so gewählt werden, daß der Logarithme desselben, so wie der von n, bekannt sey. Zur leichtern Berechnung der Reihe muß die Zahl $n = mz \mp 1$ sich auf einige Nullen endigen, also das Product mz entweder auf einige Neuner, oder auf 1 mit einigen vorhergehenden Nullen. Nachdem das eine oder andere bestimmt wird, werden die Ziffern des Multiplicators m von den Einern an nach einander gefunden. Die Anzahl der Ziffern selbst ist willkürlich.

Z. E. Es sey die gegebene Zahl $z = 17207$, eine Primzahl. Man wird gleich finden, daß diese Zahl durch 7, oder 57, oder 657, oder 5657 u. s. w. multiplicirt werden muß, wenn das Product auf einen, zwey, drey, vier Neuner sich endigen soll. Man nehme $m = 657 = 9 \times 73$. Das Product mz ist $11304999 = n - 1$, und $n = 11305000 = 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 1000$. Daher ist log. nat. 17207 = l. 5 + l. 7 + l. 17 + l. 19

Digitized by Google

$$+ 3\,l.\,10 - l.\,9 - l.\,73 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.}\right),$$

wo $\frac{1}{n}$ schon kleiner als 10^{-8} ist.

Soll das Product mz sich auf 1 mit drey Nullen vorher endigen, so muß $m = 4343$ seyn. Es ist $mz = 74730001$, also $n = 74730000$, wo $7473 = 3 \cdot 47 \cdot 53$ ist. Auch ist $m = 43 \cdot 101$. Also ist log. nat. $17207 = l.\,3 + l.\,47 + l.\,53 + 4\,l.\,10 - l.\,43 - l.\,101 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.}\right)$.

Dieses Verfahren wird man gut benutzen können bey größern Zahlen, deren Logarithmen man genau erhalten will, ohne sich auf die Differenzen der schon berechneten zu verlassen.

Auch bey den Briggischen Logarithmen läßt es sich anbringen. Man braucht nur zu der Ergänzung den Modulus als Factor zuzusetzen.

66. So wie in (62.) der Logarithme von $\frac{z^2}{z^2-1}$ durch eine convergirende Reihe ausgedruckt, und daraus log. z hergeleitet ward, so nehme man den Bruch $\frac{(z+2)(z-1)^2}{(z-2)(z+1)^2}$, der auch der Einheit für größere z nahe kommt, und dessen Logarithme also auch durch eine convergirende Reihe erhalten wird. Man entwickele Zähler und Nenner, so erhält der Bruch die Form $\frac{z^3-3z+2}{z^3-3z-2}$. Zur Abkürzung setze man $z^3 - 3z = u$, so ist der Bruch $= \frac{u+2}{u-2} = \left(1 + \frac{2}{u}\right) : \left(1 - \frac{2}{u}\right)$, und log. nat. $\frac{u+2}{u-2} = 2\left(\frac{2}{u} + \frac{8}{3u^3} + \frac{32}{5u^5} + \frac{128}{7u^7} + \text{etc.}\right)$

Digitized by Google

Das ist

$$\log.\,\text{nat.}\,(z+2) = l.\,(z-2) + 2\,l.\,(z+1) - 2\,l.\,(z-1) + 2\left(\frac{2}{u} + \frac{8}{3\,u^3} + \frac{32}{5\,u^5} + \text{etc.}\right).$$

67. Demnach ist der Logarithme jeder Zahl durch die Logarithmen dreyer vorhergehenden Zahlen und eine Ergänzung gegeben, welche immer kleiner wird, je grösser die Zahl ist. Man nehme zuerst für z die Werthe 3, 4, 7, so hat u die Werthe 18, 52, 322, oder $\frac{2}{u}$ die Werthe $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{26}$, $\frac{1}{161}$. Die Ergänzungen bezeichne man durch A, B, C, so ist

$$l.\,5 = 2\,l.\,2 + A.$$
$$l.\,6 = l.\,2 + 2\,l.\,5 - 2\,l.\,3 + B.$$
$$l.\,9 = l.\,5 + 2\,l.\,8 - 2\,l.\,6 + C.$$

Durch gehörige Reductionen der Logarithmen, werden diese Gleichungen:

$$l.\,5 = 2\,l.\,2 + A.$$
$$3\,l.\,3 = 2\,l.\,5 + B.$$
$$4\,l.\,3 = l.\,5 + 4\,l.\,2 + C.$$

Durch die Combination dieser Gleichungen wird erhalten:

$$2\,l.\,2 = 5\,A + 4\,B - 3\,C.$$
$$l.\,3 = 4\,A + 3\,B - 2\,C.$$
$$l.\,5 = 6\,A + 4\,B - 3\,C.$$

Diese Logarithmen dienen zur Grundlage für alle folgenden.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

68. Wir haben zweyerley berechnete logarithmische Tafeln, erstlich, welches die gewöhnlichsten sind, für die Basis = 10, nämlich die Briggischen oder gemeinen Logarithmen; zweytens die für logarithmische Functionen nöthigen, deren Basis = e = 2,718281828.. (30.) oder die natürlichen Logarithmen.

Digitized by Google

69. In dem Briggischen System liegt die geometrische Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : etc. zum Grunde, deren Logarithmen sind, 0, 1, 2, 3, 4, etc. Die Logarithmen aller übrigen ganzen Zahlen und rationalen Brüche sind Irrationalgrößen, so wie die Zahlen zu rationalen Logarithmen, außer denen aus der Reihe, 1, 2, 3, 4, etc. irrationale sind.

70. Ein Logarithme zerfällt in zwey Theile, die ganze Zahl oder 0, und den zugesetzten Decimalbruch. Jene heißt die Charakteristik, dieser die Mantissa (Zugabe) Die erstere zeigt an, nach welchem Gliede der Hauptreihe eine Zahl zunächst folgt, wenn nämlich die Glieder derselben durch ihre Logarithmen gezählt werden. Sie enthält in dem Briggischen System so viele Einheiten als die Zahl Ziffern vor der Stelle der Einer hat. Der andere Theil eines Logarithmen, die Mantissa, giebt nahe an, das wie vielste Glied unter den eingeschalteten Gliedern die zugehörige Zahl ist. In den gewöhnlichen Tafeln besteht die Mantissa aus 7 Ziffern. Man stelle sich statt je eines Gliedes der geometrischen Reihe zehn Millionen vor, so ist die Mantissa als ganze Zahl betrachtet, die Stellenzahl der zu dem Logarithmen gehörigen Zahl nach dem nächst vorher gehenden Gliede der Hauptreihe beynahe. Z. B. Es ist log. 4237 = 3,6271097. Dieses heißt, 4237 ist das 6271097te Glied nach dem dritten Gliede, oder nach 1000. Eigentlich fällt 4237 noch über jenes Glied hinaus. Auch ist log 4235 = 3.6269047. Hier aber ist 4235 ein weniges kleiner als das 6269047te Glied. Die letzte Ziffer der Mantissa giebt den Logarithmen zu klein, wenn das weggelassene unter einem halben Hundertmillionentheilchen beträgt, aber denselben zu groß, wenn nach den 7 ersten Decimalziffern mehr als ein halbes folgt. Der Fehler wird immer kleiner als ein halbes solches Theilchen gehalten, wenigstens in den genauen Tafeln.

Oder: die Charakteristik mit der Mantissa zusammen, als eine ganze Zahl, ist nahe der Exponent der Potenz, worauf die zehnmillionste Wurzel aus 10 zu erheben ist,

Digitized by Google

um die zu dem Logarithmen gehörige Zahl zu erhalten. So ist $4237 = 10^{3627097/1000000}$ nächstens. Setzt man statt der Endziffer 7 nur die 8, so wird die Potenz schon größer als 4237.

71. Von allen Zahlen, die in den Ziffern übereinkommen, und nur in der Stelle der Einheit verschieden sind, haben die Logarithmen dieselbe Mantissa. Denn diese Zahlen entstehen aus einander durch die Multiplication oder Division mit einer Potenz der 10. Dadurch wird blos die Charakteristik verändert. Dieses giebt dem Briggischen System einen entscheidenden Vorzug zum arithmetischen Gebrauche.

72. In allen Tafeln, die bis zu der Zahl 100000 gehen, ist es durch die englischen Tafeln durchgehends üblich, die Logarithmen nicht wie die Zeilen in einem Buche auf einander folgen zu lassen, sondern, zur Ersparung des Raums, wie Wörter in den Zeilen. Dabey werden die drey ersten Ziffern der Mantissa von den vier folgenden abgesondert, und voran gestellt. Es trifft sich hier aber beynahe immer, daß die letzten Logarithmen eines Abschnittes von Zeilen die drey ersten Ziffern aus dem folgenden Abschnitte nehmen müssen. Dieses kann leicht einen Fehlgriff verursachen. Darum hat Vega in seinen Ausgaben der logarithmischen Tafeln (außer der ersten von 1783) diejenigen Logarithmen, bey welchen man die drey ersten Ziffern aus dem folgenden Abschnitte zu nehmen hat, durch ein Sternchen ausgezeichnet. In der französischen Ausgabe von Callet sind sie, welches noch besser ist, um den Raum einer Zeile herunter gerückt. — Die Charakteristik wird nicht zugesetzt, weil diese von dem Rechner selbst allemahl bestimmt werden muß. — Bey dem Aufschlagen der Logarithmen sucht man die vier ersten Ziffern einer fünfziffrigen Zahl in der ersten Spalte unter der Rubrik, Zahl, die fünfte in einem der obersten Fächer, fährt von dieser herabwärts bis in die zu jenen vier Ziffern gehörige Zeile, so findet man die vier letzten Ziffern der Mantissa, wozu die drey ersten auf die eben erklärte Art

Digitized by Google

genommen werden. John Newton hat in seiner Trigonometria Britannica, Londini, 1658, diese Einrichtung zuerst getroffen.

73. Um für 6 oder 7ziffrige Zahlen die Logarithmen zu erhalten, sind noch Täfelchen der Proportionaltheile beygefügt, welche für die sechste und siebente Ziffer den gehörigen Proportionaltheil geben. Z. B. für 289567 den Logarithmen zu finden, betrachte man 7 als einen Bruch 0, 7, welcher der Zahl 28956 angehängt wird. Der Unterschied der Logarithmen von 28956 und 28957 ist 150, in Theilen der Mantissa, davon sind $\frac{7}{10}$ gleich 105 welche in dem Täfelchen bey 7 angezeichnet sind, und dem Logarithmen von 28956 beygefügt werden. Wäre die Zahl 2895674, so schneide man die 74 ab, und nehme sowohl den Proportionaltheil für 7 als für 4, von dem letztern aber den zehnten Theil.

Dieses Verfahren beruht darauf, daß die Unterschiede mehrerer auf einander folgenden Logarithmen in der Tafel sich gleich, oder nur um 1 in der Endziffer verschieden sind, also gleich den Zahlen arithmetisch fortgehen, so fern auf die weggelassenen niedrigern Decimalziffern keine Rücksicht genommen wird.

74. Bey Logarithmen mit mehrern Decimalstellen reicht diese einfache Einschaltung nicht zu. Man kann sich hier der Formel (64.) bequem bedienen, in welcher N eine ganze Zahl von fünf Ziffern ist, welche bleibt, nachdem die übrigen als Decimalbrüche abgeschnitten sind, das Komma oder das Einerzeichen mag ursprünglich stehen, wo es auch sey. Da nun d gegen N sehr klein ist, so kann man ohne einen merklichen Fehler $y = \frac{d}{2N}$ setzen, wodurch wird

$$\log. nat. (N + d) = \log. N + \frac{d}{N} + \frac{d^5}{12 N^3}.$$

Die übrigen Glieder sind zu klein, als daß sie in Betrachtung kommen könnten. Dieser muß nun noch mit dem Modulus der Briggischen Logarithmen, nämlich

Digitized by Google

0,43429448 . . . multiplicirt werden, um die briggischen zu erhalten. Dadurch wird die Formel

$$\log.(N+d) = \log. N + M\left(\frac{d}{N} + \frac{d^3}{12\,N^3}\right).$$

75. Exempel. Zu der Zahl 10542 482375 den Logarithmen zu finden, bis auf die zehnte Decimalstelle. — Hier ist $N = 10542$; $d = 0{,}482375$; $\frac{d}{N} = 0{,}00004\,575744$, wovon der Cubus kleiner ist als 125×10^{15}, also nicht in Rechnung kommen kann. Es ist nun $M.\frac{d}{N} = 0{,}00001\,98722$. Ferner ist

$$\log. 10542 = 4{,}0229230119$$
$$198722$$
$$\log. 10542{,}482375 = 4{,}0229428841$$

In der Einleitung zu Vega's vollständiger Sammlung logarithmischer Tafeln ist dieses Exempel durch die ersten und zweyten Differenzen berechnet. Die beiden letzten Ziffern sind daselbst 37 anstatt 41.

76. Leichter mag man den Werth von $M.\frac{d}{N}$ durch Logarithmen finden. Es ist $\log. M = 9{,}6377843 - 10$. Zum öftern Gebrauch hat man sich eine Tafel der Vielfachen von M zu verfertigen.

77. Exempel. Den Logarithmen der Zahl 10097 38504923 zu finden. — Hier ist $N = 10097$; $d = 0{,}38504923$. Nun ist

$$\log. M = 9{,}6377843 - 10$$
$$\log. d = 9{,}5855163 - 10$$
$$\text{Subtr. } \log. N = 5{,}0041924$$
$$\log. M.d : N = 4{,}2191082 - 10.$$
$$\frac{M.d}{N} = 0{,}0000165618.$$

Digitized by Google

Zur Berechnung dieser Zahl sind die gewöhnlichen Logarithmen hinlänglich. Es ist nun

$$\log. N = 4{,}0041923563\ 165618$$

$$\log. (N + d) = 4{,}0042089181$$

Bey Vega, a. a. O. sind die beiden letzten Ziffern 78.

78. Durch die Differenzen der in den Tafeln befindlichen Logarithmen wird die Einschaltung folgendermaßen bewerkstelligt Es seyn $N - 1$; N; $N + 1$ drey auf einander folgende ganze Zahlen; ihre Logarithmen seyn $A - \alpha$; A; $A + \beta$ Es genügt zur Einschaltung an drey gegebenen Zahlen, weil auch in den größern logarithmischen Tafeln die dritten Differenzen, selbst in dem Anfange der Classe der Zehntausende höchstens nur ein einziges Zehntausendmillionentheilchen betragen. In der Formel, die in dem Artikel, Einschalten, 6, angegeben ist, ist die Stelle des gesuchten Gliedes von dem Anfangsgliede an gerechnet, dagegen es hier bequemer ist, sie von dem mittlern Gliede an zu rechnen. Die Formel bleibt ihrer Gestalt nach, nur die Werthe der Coefficienten werden geändert. Es sey die Zahl, zu welcher der Logarithme gesucht wird, $N + u$, wo u auch negativ seyn mag; der zugehörige Logarithme $= A + y$. Betrachtet man die Logarithmen, so weit sie in den Tafeln stehen, als Glieder einer arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung, deren Stellen durch ihre zugehörigen Zahlen angegeben werden, so ist

$$y = au + \tfrac{1}{2} bu (1 - u).$$

Für $u = +1$ ist $y = \beta$, also $a = \beta$. Für $u = -1$ ist $y = -\alpha$, also $-\alpha = -a - b$, und $b = \alpha - \beta$. Folglich ist

$$\log (N + u) - \log. N = \beta u + \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) u (1 - u).$$

In (46.) ist bemerkt, daß β kleiner als α ist.

79. Wenn die vorgegebene Zahl näher an die nächst folgende ganze Zahl als an die vorhergehende fällt, so nehme man u negativ und es ist

$$\log. N - \log. (N - u) = \alpha u - \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) u (1 - u).$$

Digitized by Google

Diese Formel erhält nämlich für $u = +1$ den Werth α, für $u = -1$ den Werth $-\beta$, wie es seyn muß.

80. Wenn nun eine Zahl von mehr als fünf Ziffern gegeben wird, so nehme man die ersten fünf Ziffern für eine ganze Zahl N, die übrigen für einen Decimalbruch u. Dann nehme man die Unterschiede des Logarithmen zu N von dem nächst vorhergehenden und folgenden in den Tafeln, welche α und β sind, und verfahre nach der erstern Formel. Oder man nehme die in den ersten fünf Ziffern nächst größere Zahl für N, ziehe die gegebene Zahl davon ab, und setze den Rest $= u$, verfahre nun nach der zweyten Formel. Der gefundene Unterschied der Logarithmen wird nun von log. N abgezogen, da derselbe nach der ersten Formel addirt wird.

81. Exempel. Zu der Zahl 10542 482375 den Logarithmen zu finden. Aus den großen Tafeln ist $\alpha = 411986^{-10}$; $\beta = 411946^{-10}$; $\alpha - \beta = 40^{-10}$; $u = 0{,}482375$. Die Ziffern über den Endziffern zeigen den Decimalwerth derselben an. Nun ist $\beta u = 1987124^{-11}$; $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) u (1 - u) = 49^{-11}$. Also ist

log. 10542	=	4,02292 30119
erster Proportionaltheil	=	1 98712
zweyter " "	=	5
log. 10542,482375	=	4 02294 28836

Der Unterschied von der Rechnung in (75.) rührt daher, daß die gegenwärtige nur eine Annäherung ist, da die Logarithmen in dem Bezirke von 10541 bis 10543 als Glieder einer arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung angesehen werden.

82. Der Factor $u(1-u)$ ist am größten, wenn $u = 1 - u$, das ist, $u = \frac{1}{2}$ ist (Größtes und Kleinstes, 26.). Daher ist der größte Werth des Products $\frac{1}{2} u (1-u) = \frac{1}{8}$. Ist nun $\alpha - \beta$ kleiner als 8, so ist der zweyte Proportionaltheil kleiner als 10^{-10}, und hat nur höchstens auf die 11te Decimalstelle Einfluß. Die-

Digitized by Google

ses ereignet sich schon bey den Logarithmen, die zu den Zahlen um 25000 gehören.

83. Wenn die vorgegebene Zahl mehr als zehn Ziffern enthält, so haben die eilfte und die noch folgenden Ziffern kaum einen Einfluß auf die Mantissa in der zehnten Stelle, sondern erst weiter hin, eben so wie der Logarithme einer Zahl von mehr als sieben Ziffern, wenn er aus den gewöhnlichen Tafeln genommen wird, von dem Logarithmen der ersten sieben Ziffern kaum in der siebenten Decimalstelle abweicht.

84. Zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden, verfährt man auf umgekehrte Art. Erstlich ist aus (74.)

$$\frac{N}{M}\,(\log.\,(N+u) - \log.\,N) = u,$$

völlig genau, so weit es hier erforderlich ist. Anstatt des Divisors M hat man dessen umgekehrtes, die Zahl 2,30258509 . . . zu nehmen (36.). Bey dieser und allen Naherungsrechnungen hat man sich der abgekürzten Multiplication und Division zu bedienen, die in dem Artikel, Multiplication, gewiesen wird.

Da der Unterschied u nur bis auf die fünfte Stelle gesucht werden kann, so sind die gewöhnlichen Logarithmen völlig hinlänglich denselben anzugeben. Es ist

$$\log.\,\text{Brigg.}\,\frac{1}{M} = 0{,}3622156.$$

85. Vermittelst der Differenzen kann die Zahl zu einem vorgegebenen Logarithmen meistens noch leichter gefunden werden. Aus der Formel in (78.) ist

$$\frac{\text{Log.}\,(N+u) - \log\,N}{\beta + \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)\,(1-u)} = u.$$

Um den zweyten Theil des Divisors zu erhalten, suche man die beiden ersten Ziffern des Unterschiedes u durch die

Digitized by Google

Formel $\frac{\text{Log. } (N + u) - \text{log. } N,}{\beta}$,

oder $\frac{\text{Log. } (N + u) - \text{log. } N}{\text{log. } (N + 1) - \text{log. } N}$,

und nehme dann das Product aus $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ in die Ergänzung dieses Bruches zur 1 noch zu β in dem Divisor.

86. Der Logarithme eines eigentlichen Bruches ist negativ, wie oben (12.) gezeigt ist. So ist

$$\text{log. } \frac{17}{83} = 1{,}2304489 - 1{,}9190781$$

$= -0{,}6886292$. Der Bruch fällt zwischen die Glieder 1 und $\frac{1}{10}$ der Grundreihe, und ist von 10 Millionen Glieder bis zu dem $\frac{1}{10}$ das 6886292te.

87. Bequemer setzt man zu dem Logarithmen des Zählers einige Einer zu, es seyn 5, und zieht nun den Logarithmen des Nenners ab, fügt aber dem Unterschiede die zugesetzten Einer subtractiv bey, wie folget.

$$\begin{aligned} \text{log. } 17 &= 6{,}2304489 - 5 \\ \text{l. } 83 &= 1{,}9190781 \\ \hline \text{l. } \frac{17}{83} &= 4{,}3113708 - 5. \end{aligned}$$

Dieser Logarithme gehört zu einem Decimalbruche, dessen Zähler die Zahl zu dem Logarithmen 4,3113708, der Nenner 100000 ist. Der Zähler ist ein weniges kleiner als 20482, wie man auch durch die Division findet. Auf diese Art verwandelt man immer die Logarithmen eigentlicher Brüche in Logarithmen von Decimalbrüchen, so wie man meistens die gemeinen Brüche in Decimalbrüche umsetzt.

88. Der Gleichförmigkeit wegen setzt man dem Logarithmen des Dividendus immer 10 zu, und zieht diese 10 auch von dem Logarithmen des Zählers des Decimal-

Digitized by Google

bruches ab. Gewöhnlich aber unterläßt man die Beyzeichnung, weil man immer weiß, ob ein Logarithme zu einem eigentlichen oder uneigentlichen Bruche gehört. Auf diese Art ist

l. 2,0482 = 0,3113724
l. 0,20482 = 9,3113724
l. 0,020482 = 8 3113724
l. 0,0020482 = 7,3113724

u. s. w.

Man sieht, daß die erste bedeutende Ziffer des Decimalbruches in der so vielten Stelle eintritt, als der Unterschied der Charakteristik von 10 Einheiten hat.

89. Es ist befremdend, daß Vega diese Art die Logarithmen der eigentlichen Brüche anzugeben, nicht lehrt, selbst nicht in seiner vollständigen Sammlung, da sie doch längst allgemein üblich ist, auch in allen trigonometrischen Rechnungen vorkommt, wenn der Halbmesser des Kreises zur Einheit genommen wird. Er erklärt nur die hier zuerst vorgetragene Bezeichnungsart, und nennt solche Logarithmen halbpositive. Kästner konnte sich auch an die bequemere Bezeichnungsart nicht gewöhnen. Segner (Anfangsgründe der Arithmetik ꝛc. S. 152.) nahm blos die Charakteristik negativ, auf folgende Art, log. 0,57932 = — 1,7629185, welches aber eine schlimme Zweydeutigkeit macht, weil man das Vorzeichen am natürlichsten auf den ganzen Logarithmen beziehen wird.

90. Wenn ein Bruch auf eine Potenz erhoben wird, so muß dieses sowohl mit dem Zähler als Nenner geschehen, wie bey der Multiplication von Brüchen in einander die Zähler in einander multiplicirt werden, und eben so die Nenner. Daher muß auch der Logarithme des Zählers so wie des Nenners, also auch die subtractiven 10 mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt werden. Man wirft aber von dem Vielfachen der Charakteristik und der subtractiven 10 so viele Zehner weg, als sich thun läßt.

Bey der Ausziehung einer Wurzel aus einem Bruche wird dieselbe aus Zähler und Nenner gezogen. Also wird

Digitized by Google

der Logarithme des einen wie des andern durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Um die subtrahenden 10 in dem Logarithmen eines Decimalbruchs zu behalten, setzt man sowohl in der Charakteristik als in dem Logarithmen des Nenners so viele 10 zu, daß der letztere ein Vielfaches des Exponenten werde.

Z. B.

	l 0,3	=	9,5228787
doppeltes	l 0,09	=	9,0457574
dreyfaches	l 0,027	=	8,5686361
vierfaches	l 0,0081	=	8,0915148
fünffaches	l 0,00243	=	7,6143935
	u. s. f.		
	l 0,003	=	7,5228787
Hälfte.	l 0,057..	=	8,7614393
Drittheil.	l 0,149..	=	9,1742929
Viertheil.	l 0,240..	=	9,3807197
	u. s. f.		

Zu einem Beyspiele der logarithmischen Bruchrechnung dient das in 77. gegebene.

91. Bey den Berechnungen zusammen gesetzter Interessen, der Leibrenten, Ersparungscassen u. dgl thun die Logarithmen sehr wesentliche Dienste. Die Formeln dazu sind in dem Artikel, geometrische Reihe, 13. ff. gegeben.

I. Es werde der Werth eines Capitals a nach 20 Jahren gesucht, wenn der Zinsfuß 5 P. C. ist. Dieser ist

$= \left(\frac{21}{20}\right)^{20} a = (1{,}05)^{20} a$. Es ist

log. 1,05 = 0,0211893

20faches = 0,4237860

Der Werth ist 2,653298 a; oder es muß das gegenwärtige Capital a mit der Zahl 2,653298 multiplicirt werden.

II. Man sucht die Zeit, nach welcher der künftige Werth das Dreyfache des gegenwärtigen ist. Hier ist $(1{,}05)^n = 3$, und n die gesuchte Zeit. Es ist

Digitized by Google

$n \log. 1{,}05 = \log. 3$, u. $n = \frac{\log. 3}{\log. 1{,}05} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0211893}$

$= 22{,}5171$ Jahre.

III. Eine Schuld a soll durch eine jährliche Zahlung b, mit Einschluß der Zinsen in 12 Jahren abgetragen seyn, wie verhalten sich a und b gegen einander, den Zinsfuß zu 4 P. C. genommen? Hier ist a. a. O. (17.) der Quotient $\frac{a}{b} = 25 - \left(\frac{25}{26}\right)^{12} \cdot 25$. Es ist

log. 25	=	1,3979400
log. 26	=	1,4149733
l. (25 : 26)	=	9,9829667 — 10
zwölff.	=	119,7956004 — 120
oder	=	9,7956004 — 10
zu der Zahl	=	0,624598.

Also $\frac{a}{b} = 0{,}375402 \times 25 = 9{,}38505$.

Diese Zahl ist der baare Werth einer Jahrrente 1 auf 12 Jahre. Eine Rente auf bestimmte Jahre ist nichts anders als der jährliche Abtrag einer Schuld mit Einschluß der schuldigen Zinsen. Es ist $a = 9{,}38505 \times b$.

Umgekehrt ist $b = \frac{a}{9{,}38505} = 0{,}1065524\, a$. Es ist nämlich log. 9,38505 = 0,9724367. Das arithmetische Complement, 9,0275633 — 10, ist der Logarithmus von $\frac{1}{9{,}38505}$.

In Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, Tab. III. p. 543. ist der Werth von $\frac{a}{b} = 9{,}3850737605$ angegeben. Die Multiplication des Logarithmen mit 12 macht die beiden letzten Ziffern des hier nöthigen Log-

Digitized by Google

arithmen unsicher. Die Multiplication mit 25 vergrößert den daher entstehenden Fehler.

Wie die Logarithmen sehr großer Zahlen, oder diese aus jenen gefunden werden.

92. In Sherwin's mathematical tables. p. 36—39, ist eine von Sharp berechnete Tafel der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100, und aller Primzahlen unter 1100 bis zu 61 Decimalstellen enthalten. Dieser ist noch p. 40 und 64 eine Tafel der Logarithmen der Zahlen von 999980 bis 1000020 auf eben so viele Stellen beygefügt. Der Gebrauch dieser Tafeln ist, zu jeder Zahl den Logarithmen, und zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl bis auf die 61ste Stelle der Ziffern zu finden. Sie dienen in der That mehr als Beweise von der unbegreiflichen Beharrlichkeit des Rechners, und zu zeigen, wie sich die Logarithmen von merkwürdigen Irrationalzahlen, dergleichen der Umfang des Kreises oder der Modulus des briggischen Systems ist, ungemein weit finden lassen, als daß man ihrer zur Anwendung bedürfte.*) In Callets Ausgabe der Logarithmen (à Paris, 1795.) sind diese Tafeln auch eingerückt, und mit den natürlichen, bis auf 48 Decimalstellen berechneten, Logarithmen vergesellschaftet. Diese sind aus Schulzens Sammlung von Tafeln genommen; die daselbst fehlenden Logarithmen sind zugesetzt. In der Tafel der briggischen Logarithmen sind die zehn ersten Ziffern aus einer vorhergehenden Tafel, die bis zu 20 Decimalstellen geht, zu ergänzen. Diese Tafel enthält alle Zahlen von 1 bis 1200. Noch sind zwey Tafeln beygefügt. Eine enthält beiderley Logarithmen der Zahlen von 101000 bis 101179. Die andere enthält umgekehrt die Zahlen geordnet zu den Logarithmen 0,00000; 0,00001;

*) Wolfram, ein sehr geübter Rechner, behauptet in einem Briefe an Lambert, daß nicht alle von Sharp berechneten Logarithmen richtig sind. (Lamberts Briefwechsel. IV. S. 451.) Er hat aber eine ältere Ausgabe zur Hand gehabt. Die von 1742 ist richtiger. S. eb. das. S. 485.

Digitized by Google

0,00002 . . . . . 0,08179 auf eben so viele Stellen als jene Tafeln und für beiderley Logarithmen.

Gardiner, der Herausgeber von Sherwins Tafeln giebt die Vorschrift ohne Beweis so kurz gefaßt, daß sie etwas Mühe macht. In der Einleitung zu Callets Ausgabe sind so viele besondere Vorschriften für die verschiedenen hier möglichen Fälle gegeben, daß man sich leicht verwirrt. Daher wird eine Erläuterung ganz nützlich seyn.

93. Die gegebene Zahl sey z. Es ist nur nöthig, einen Multiplicator m zu z zu finden, so daß mz zwischen die Zahlen $10^6 - 20$ und $10^6 + 20$ falle. Nur muß zugleich m eine solche Zahl seyn, deren Logarithme sich aus der ersten Tafel bis auf 61 Decimalstellen finden lasse, es sey nun, daß sie darin selbst vorkomme, oder daß sie aus Factoren bestehe, deren Logarithmen in der Tafel enthalten sind.

94. Es sey $mz = 10^6 + a$, wo a auch subtractiv seyn mag, und nicht über 20 betragen muß. Ist nun log $(10^6 + a)$ durch Hülfe der zweyten Tafel gefunden, in welcher die Logarithmen der Zahlen von $10^6 - 20$ bis $10^6 + 20$ sich befinden, so wird auch log. z bekannt, nämlich log. z = log. $(10^6 + a)$ — log m.

Es ist nun zu zeigen, wie der Factor m gefunden werde.

95. Dieser Factor kann manche, eigentlich unendlich viele, Werthe haben, deren einige eine geschwindere, andere eine langsamere Annäherung für log. $(10^6 + a)$ geben. Er liegt innerhalb gewisser Gränzen, die man findet, wenn die Zahlen $10^6 - 20$ und $10^6 + 20$ durch die gegebene Zahl z dividirt werden. Oder man dividire nur 10^6 durch z, wodurch man einen mittlern Werth für m erhält, den man noch etwas vergrößern oder verkleinern kann, bis zu den vorgeschriebenen Gränzen.

96. Exempel. Es soll zu der Zahl z = 3,141592 653589 793238 . . . das ist, dem halben Kreisumfange für den Halbmesser als Einheit, der Factor m gefunden werden, wodurch das Product mz die Form $10^6 + a$ erhalte, wo a unter 20 ist. — Es erhellt gleich,

Digitized by Google

daß m zwischen 300000 und 400000 fällt, also aus 6 Ziffern bis zu den Einern besteht. Um den Werth von m bis auf die Einer zu erhalten, dividire man 1000000 durch 3.14159, so ist der Quotient 318310. Nimmt man diesen Werth für m, so ist mz ..... 1000000,3574 ... In ganzen Zahlen kann man m bis 318316 auf einer Seite und 318304 auf der andern nehmen. Bey jenem ersten Werthe ist $a = 0{,}3574$. Die nächste Zahl der Tafel an $10^6 + a$ ist 10^6 selbst. Man kann $10^6 + a$ noch näher an diese bringen, wenn man $m = 318310{,}2$ nimmt. Es ist dieses $m = 2.9.13.61.22{,}3$. Dadurch wird $10^6 + a = 10^6 + 0{,}985882 \ldots$ Von dieser Zahl ist nun mit Hülfe der zweyten Tafel der Logarithme zu finden.

Dieses geschieht nach einer von den beiden oben (74 u. 78) gewiesenen Methoden. Die erstere wird die bequemste seyn. Sie ist auch die von Gardiner, dem Herausgeber von Sherwins Tafeln, befolgte.

97. Die an $10^6 + a$ nächste Zahl sey $10^6 + b$. Man setze $\frac{10^6 + a}{10^6 + b} = \frac{1 + y}{1 - y}$, so ist $y = \frac{a - b}{2\,10^6 + a + b}$. Nun ist

$$\log.\,nat.\,\frac{1+y}{1-y} = 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \text{etc.}\right).$$

Die Reihe convergirt hier sehr schnell, weil y kleiner als $\frac{1}{2.\,10^6}$ ist. Nämlich $10^6 + a$ fällt zwischen zwey nächste ganze Zahlen, deren eine $10^6 + b$ ist, es mag b kleiner oder größer als a seyn. Es ist also $a - b$ ein eigentlicher Bruch. Nun ist y kleiner als $\frac{a-b}{2.\,10^6}$, und dieses kleiner als $\frac{1}{2.\,10^6}$, folglich y kleiner als dieses letztere. Je näher a und b sich kommen, desto convergirender ist die Reihe.

Digitized by Google

Es ist nun, wenn die Reihe = R gesetzt wird, log. nat. $z = \log. (10^6 + b) + R - \log. m$, oder, wenn man die briggischen Logarithmen nimmt, deren Modulus $M = 0{,}43429 \ldots$ ist, log Brigg. $z = \log. (10^6 + b) - \log. m. + M. R.$

98. Die Formel, welche mittelst der Differenzen berechneter Logarithmen den Logarithmen einer gegebenen Zahl angiebt, ist die in dem Artikel, Einschalten, 6, befindliche, welche schon oben (78.) bey zwey Differenzenreihen mit einer kleinen Abänderung angewandt ist. Da hier mehrere Differenzenreihen nöthig sind, so werden wir sie ungeändert lassen, um ein einfaches Gesetz der Coefficienten zu haben. — Eine Reihe von Zahlen sey N; $N + 1$; $N + 2$; $N + 3$; etc. ihre berechneten Logarithmen, A, $A + \alpha$; $A + \beta$; $A + \gamma$; etc. Die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Logarithmen seyn a, b; c, d; etc. ein eingeschaltetes Glied in der Reihe der Zahlen sey $N + u$; und der zu diesen gehörige Logarithme $A + y$. Es ist

$$y = au + \frac{bu(u-1)}{1 \cdot 2} + \frac{cu(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{du(u-1)(u-2)(u-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Hier ist $N + u$, was vorher durch $10^6 + a$ ausgedruckt ward, da z die gegebene Zahl, deren Logarithme gesucht wird, und $mz = 10^6 + a$ ist. Nachdem y gefunden ist, ist $A + y$ oder $\log. (10^6 + a)$ bekannt, und dadurch $\log. z = \log (10^6 + a) - \log. m.$ Es ist am vortheilhaftesten, die Zahl $N + u$ mitten in die Reihe der ausgehobenen Zahlen zu setzen, damit ihr Logarithme sowohl durch die vorhergehenden als nachfolgenden bestimmt werde. Wenn eine krumme Linie durch gegebene Puncte gezogen werden soll, so wird sie um die Mitte zwischen den äußersten am wenigsten von der wahren abweichen, weil hier auf beiden Seiten Puncte sind, welche die Richtung des Zuges bestimmen, dagegen die

Digitized by Google

Puncte an dem einen Ende weniger Einfluß auf den Zug an dem andern Ende haben.

In dem Artikel, Einschalten, Th. II. S. 55. ist noch eine Einschaltungsformel aufgeführt, nach welcher die Stelle des gesuchten Logarithmen ein Bruch seyn kann, weil das Glied der Hauptreihe, dessen Stelle durch o bezeichnet wird, sich in der Mitte der Hauptreihe befindet. Allein die Berechnung der Coefficienten ist nach dieser Formel weniger bequem.

In der zweyten Tafel von Sharp sind die Unterschiede bis zu der vierten Ordnung beygefügt, bis zu der 30sten Decimalstelle.

99. Zu einem Logarithmen von vielen Ziffern die zugehörige Zahl zu finden, dient die Formel (28.). Damit sie aber convergent sey, muß x ein eigentlicher Bruch seyn, und ein kleiner, damit sie schnell convergire. Um einen gegebenen Logarithmen auf diese Form zu bringen, muß man den nächsten Logarithmen, den man haben kann, davon abziehen, oder jenen von diesem. Alsdann kann man jene Reihe gebrauchen. Um die Multiplication mit c (= 2,3025 . . .) in jener Formel zu vermeiden, verwandle man den gefundenen Logarithmen durch die Multiplication mit c in einen natürlichen und suche zu demselben mittelst der Reihe (29.) die Zahl. Diese wird mit der Hülfszahl, deren Logarithme abgezogen war, multiplicirt, oder es wird, wenn der Logarithme der gesuchten Zahl abgezogen war, die Hülfszahl durch die gefundene Zahl dividirt. Das Verfahren wird durch die folgende symbolische Darstellung deutlicher werden.

100. Es bedeute log. z den briggischen Logarithmen einer Zahl z; Log. z den natürlichen. Ferner sey n die genommene Hülfszahl, ihr briggischer Logarithme = log. n. Nun sey log. z — log. n = log. (1 + y), so ist z = n(1 + y). Man multiplicire beide Theile der Gleichung, log. z — log. n = log. (1 + y), durch

Digitized by Google

$c = 2{,}302585\,092994\ldots$ so ist $c(\log. z - \log. n) = \text{Log.}(1+y)$. Diesen nun gegebenen Logarithmen bezeichne man durch L, so ist

$$1 + y = 1 + \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1.2} + \frac{L^3}{1.2.3} + \frac{L^4}{1.2.3.4} + \frac{L^5}{1..5} + \text{etc.}$$

Wäre n größer als z, so ist $\log. z - \log. n = \log.(1-y)$, wo beide Theile negativ sind, und es ist, da nun L negativ ist,

$$1 - y = 1 - \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1.2} - \frac{L^3}{1.2.3} + \frac{L^4}{1.2.3.4} - \frac{L^5}{1..5} + \text{etc.}$$

Dieses ist viel bequemer, als wenn man $\log. n - \log. z = \log.(1+y)$ nimmt, wodurch $z = \frac{n}{1+y}$ ist.

Bezeichnet man den Werth der einen oder der andern Reihe durch R, so ist in beiden Fällen $z = n.R$.

Geschichte der Logarithmotechnie.

101. Die Geschichte der Erfindung und der Ausbildung der Logarithmik ist eine der merkwürdigsten und lehrreichsten in dem mathematischen Fache. Sie hat manches ähnliche mit der Geschichte der Cyklometrie, so wie die Logarithmen mit dem Kreise manches ähnliche haben, obgleich der Uebergang von dem einen zum andern durchs Unmögliche geschieht.

102. Archimedes verband schon in seiner kleinen Schrift, die er Sandrechnung betitelt hat, eine arithmetische Reihe mit einer geometrischen, um die Stellen der Producte aus Gliedern der letztern Reihe durch die Summe der zugehörigen aus jener anzugeben.

Digitized by Google

103. Auch Stifel verband in seiner Arithmetica integra eine arithmetische und geometrische Reihe, und zeigte die Analogie zwischen Producten, Quotienten, Potenzen und Würzeln in der letztern mit Summen, Unterschieden, Vielfachen und Theilern in der erstern. Da er aber bey den Zahlen der angenommenen Reihe stehen bleibt, ohne Einschaltungen zu versuchen, so bleibt von diesen Bemerkungen noch ein grosser Abstand bis zu einem logarithmischen System. Man sehe Kästners Geschichte der Mathematik, Th. I. S. 115. ff.

104. Neper in Schottland und Jobst Byrg in Deutschland sind die ersten, welche, ohne etwas von einander zu wissen, logarithmische Tafeln berechnet haben. Ich beschreibe des letztern Einrichtung, als die weniger vollkommene, zuerst, zufolge der Nachricht welche Kästner davon in der Fortsetzung der Rechenkunst, als der zweyten Abtheilung des ersten Theils seiner mathem. Anfangsgründe, S. 93. ff. gegeben hat. Dazu füge ich noch einige Erläuterungen.

105. Byrgs Tafeln sind äußerst selten. Sie haben den Titel: Arithmetische vnd Geometrische Progress Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol. Gedruckt, In der alten Stadt Prag, Im Jahr 1620. 7½ Bogen in Quart. Der gründliche Unterricht fehlt bey dem Exemplar. Kästner zeigt zwar, daß diese Tafeln logarithmische sind, allein die Entstehung der Berechnungsart hat er nicht gewiesen, worauf es doch zur Vergleichung der Logarithmen unsers Landsmanns mit den Neperischen ankommt. Die Benennung Logarithmen hat Byrg nicht. Er unterscheidet Zahlen und Logarithmen durch die Farbe des Drucks, schwarze und rothe.

106. Kästner giebt folgende Logarithmen und Zahlen aus der Byrgischen Tafel an.

Digitized by Google

Logarithmen	Zahlen
0	1 0000 0000
10	1 0001 0000
20	1 0002 0001
30	1 0003 0003
990	1 0099 4867
223 040	9 3025 4936
224 000	9 3922 7936
230 000	9 9730 3557
230 270 022	10 0000 0000

Man sieht, daß Byrg die Glieder einer geometrischen Reihe berechnet hat, deren beide erste sind 10000 und 10001, und daß er diese mit 10000 multiplicirt hat, um die Bruchtheile in der Gestalt ganzer Zahlen anzuhängen. Die Glieder der Reihe konnte er durch die fortgesetzte Division durch 10 und steriges Zusetzen finden. Warum er die Stellen der Glieder durch Zehner angegeben hat, wüßte ich nicht zu sagen, wenn die Reihe nicht eine aus einer ausführlichern ausgehobene ist.

107. Wir wollen Byrgs Rechnung prüfen, welches am schärfsten bey der letzten Zahl geschehen wird. Es ist also die Frage, das wie vielste Glied ist 10 0000 in in der Reihe 1 0000 : 10001 : etc. oder das wie vielste ist 10 in der Reihe 1 : 1,0001 : etc.

Diese Stellenzahl sey $= n$, so ist $(1{,}0001)^n = 10$, also $n \log.(1{,}0001) = \log. 10$, und $n = \frac{\log. 10}{\log.(1{,}0001)}$.

Da $10001 = 73 \cdot 137$ ist, so giebt die (92.) angeführte Sharpsche Tafel den Logarithmen von 1,0001 so weit als es hier nur erforderlich ist. Es ist log. Br. 1,0001 $=$ 0,000004 34272 76861. Der Quotient der Einheit (oder log. 10) durch diesen Logarithmen dividirt, giebt nun die Stellenzahl für 10 oder $n = 23027{,}002204$. Da die Stellenzahlen von Byrg nach Zehnern angesetzt sind, so ist in seiner Tafel $n = 230270{,}02204$. Das

Digitized by Google

Komma als Einerzeichen hat Byrg nicht gesetzt, aber der Columnentitel über den Logarithmen enthält die Zahl

o

230000, wo die o über der letzten Ziffer ohne Zweifel die Stelle der Einer anzeigt. Byrg hat also sehr genau gerechnet. Die Tafel endigt sich mit der Bemerkung, daß die rothe Zahl ist 230270022 —; 230270023 +. Byrg hat diese Zahlen als Gränzen seines Logarithmen von 10 angesehen, wo aber die drey letzten Ziffern als ein Decimalbruch abzuschneiden sind.

108. Die Zahl zu dem byrgischen Logarithmen 990 zu prüfen, suche man die 99ste Potenz von 1,0001, da sie das 99ste Glied der angenommenen Reihe ist. Es ist

log. Brigg. 1,0001 = 0,00004 34273

99fache = 0,00429 93027.

Die beiden nächsten Logarithmen sind

log. 1,0099 = 0,00427 83722

log. 1,0100 = 0,00432 13738

Unterschied = 0,00004 30016.

Also ist der einfache Proportionaltheil, der hier hinlänglich ist, 0,0000 4867, und $(1,0001)^{99} = 1,0099\,4867$, wie es Byrg hat, wenn man bey ihm die Stelle der Einer um 8 Stellen heraufrückt.

109. Man sieht, daß Byrgs Logarithmen den natürlichen nahe kommen, wenn die Zahlen in seinem System durch 10^8, und die Logarithmen durch 10^6 dividirt werden. In dem natürlichen System nähern sich der Logarithme und der Ueberschuß der Zahl über die 1 desto mehr der Gleichheit, je kleiner dieser Ueberschuß ist (25.), in dem Byrgischen ist der Unterschied der beiden ersten Glieder 100000 und 100010 dem Logarithmen der letztern Zahl genau gleich gesetzt.

110. Nepers Logarithmen sind, mit einer unwesentlichen Abänderung der Form, die natürlichen, so weit er sich ihnen bey seiner Berechnungsart nähern konnte. Er wird darauf dadurch geleitet, daß er die trigonometrischen Rech-

Digitized by Google

nungen abzukürzen suchte. Da nun der Radius oder Sinus totus oft als Multiplicator oder Divisor vorkommt, so gab er diesem die 0 zum Logarithmen, und ließ die Logarithmen der Sinus von 0 an zunehmen, indem sie selbst von 1000 0000, als dem angenommenen Werthe des Sinus totus abnehmen. Setzt man diesen = 1, und dividirt seine Logarithmen auch durch 1000 0000, so sind seine positiven Logarithmen in unserm System negativ, und umgekehrt.

111. Neper, dessen vaterländischer Name Napier oder Nepair, Baron von Merchiston, ist, machte seinen logarithmischen Canon für die Sinus und Tangenten der Winkel von Minute zu Minute, unter dem Titel bekannt: Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, cet Edinb. 1614. 4. Hiervon theilte er aber noch nicht die Methode mit, nach welcher er die Logarithmen berechnet hatte. Dieses geschah erst nach seinem im J. 1618 erfolgten Tode durch seinen Sohn, in der neuen vermehrten Ausgabe jenes Buchs, Edinburgi, 1619, wo die Erklärung der Berechnungsart unter der Benennung: Mirifici canonis constructio, vorkommt. Die Originalausgaben sind selten. Es ist ein guter Nachdruck davon zu Lyon, von der Descriptio und den Tafeln 1619, von der Constructio 1620, herausgekommen.

112. Die Erklärung, welche Neper von den Logarithmen giebt, ist merkwürdig. Sie lautet so: Der Logarithmus eines jeden Sinus ist die Zahl, welche nächstens die Linie (eine gerade) angiebt, die gleichförmig zugenommen hat, indem die Linie des Sinus totus proportionaliter bis zu diesem Sinus vermindert ist, wobey die Bewegung der jede der beiden Linien beschreibenden Puncte gleichzeitig, und im Anfange gleich geschwinde ist. Er nennt proportionaliter abnehmen, wenn die in gleichen Zeitmomenten beschriebenen Abschnitte zu den Linien, wovon sie genommen werden, durchgehends dasselbe Verhältniß haben, das ist, wenn die Linien oder die Größen überhaupt in geometrischer abnehmender Progression sind.

Digitized by Google

Es sey nämlich eine abnehmende Reihe Größen: a, b, c, d, e, etc. und a — b : a = b — c : b = c — d : c = d — e : d, u. s. f. so nehmen a b, c, etc. proportionaliter ab. Es ist nun a : b = b : c = c : d = d : e, u. s. f.

113. Hat Neper sich die Geschwindigkeit des ungleichförmig beweglichen Punctes als eine sich stetig verändernde gedacht, so hat er gerade das natürliche System der Logarithmen ergriffen. In der Constructio Canonis, 25. sagt er, daß die Geschwindigkeit eines beweglichen Punctes, der sich einem fixen Puncte geometrisch nähert (so daß die Abstände in geometrischer Folge abnehmen), dem Abstande von dem fixen Puncte proportionirt ist. Das hat eine stetig abnehmende Geschwindigkeit zur Folge. Im Anfange soll die Bewegung der beiden Puncte, von welchen einer sich gleichförmig bewegt, der andere auf die gedachte Art ungleichförmig auf dem Sinus totus fortrückt, gleich geschwinde seyn. Das ist gerade das eigenthümliche des natürlichen Systems, wenn Zahlen und Logarithmen durch gerade Linien dargestellt werden, die man durch Bewegungen eines Punctes beschreiben läßt. Auch gebraucht Neper die oben (51, 52.) erklärte Einschaltung, welche nur auf das natürliche System vollkommen paßt (53.). Daß Neper schon die Idee von einem Differentialverhältnisse, wiewohl nur unentwickelt, gehabt hat, ist in dem I. Th. S. 827. bemerkt.

114. Es ist der Mühe werth zu sehen, wie Neper es angefangen hat, diesen Begriffen gemäß seinen logarithmischen Canon zu berechnen.

Er nahm zum Anfangsgliede die Zahl 1000 0000, zum nächsten Gliede oder ersten Proportional (nach seinem Ausdruck) die Zahl 999 9999. Hierauf berechnete er die ersten hundert Glieder in der geometrischen Reihe (A) nach jenem Anfangsgliede, welches sehr leicht durch Abziehung des zehnmillionsten Theils jedes Gliedes geschieht. Das 100ste Glied ist 999 9900,000495.

Dann berechnete er auf ähnliche Art eine Reihe (B) von 51 Gliedern, von welchen das erste Glied wieder

Digitized by Google

1000 0000, das nächste aber 999 9900 ist, nämlich das letzte Glied der vorhergehenden Reihe, ohne den Bruchtheil. Das 50ste Glied nach dem Anfangsgliede ist 999 5001,222927. Die vier letzten Ziffern des Decimalbruchs finde ich durch die Binomialformel 4804.

Noch berechnete er eine Reihe (C) von 69 Gliedern, deren erstes ist 1000 0000, zweytes 990 0000, letztes 504 8858,890. Jedes dieser Glieder ist wieder das Anfangsglied einer besondern Reihe von 21 Gliedern, von welchen je zwey nächste in allen Reihen das Verhältniß 10000 : 9995 haben. Es ist 9995000 sehr nahe das letzte Glied der obigen zweyten Reihe (B). Das letzte Glied jeder dieser eingeschalteten Reihen ist nahe das erste der folgenden Reihe. Das letzte Glied der 69sten Particular-Reihe, oder Columne, wie Neper sie nennt, ist 499 8609,4034; nahe 500 0000, der halbe Sinus totus. Diese 69 Reihen enthalten 1449 Glieder, wozu noch 151 in den Reihen (A) und (B) kommen.

Die Zerlegung der Reihe (C) in 69 von einander unabhängige Reihen gewährt den Vortheil, daß die Rechnung so viel zuverlässiger ist, und zugleich erleichtert wird. Wenn man in stetigem Zusammenhange eine Reihe von etwa eben so vielen Gliedern zwischen 10000000 und 500 0000 berechnen wollte, so würde die Rechnung entweder bald unsicher werden, oder man müßte die Glieder viel weiter als nach jener Methode berechnen, da das letzte Glied noch von den ersten abhangen würde. Die Reihen A und B dienen insbesondere um die Grundlage zur Berechnung der Logarithmen zu geben. Wie diese gefunden sind, ist nun anzuzeigen.

115, Alles beruht auf dem Satze (52.) von den Gränzen eines Logarithmen in dem natürlichen System. Es seyn S und s zwey Sinus, der Sinus totus $= r$, so ist

$$\log. s - \log. S < \frac{S - s}{s} r; \text{ und}$$

$$\log. s - \log. S > \frac{S - s}{S} r.$$

Digitized by Google

Der Exponent (52.) ist hier ein eigentlicher Bruch, und die Logarithmen der Sinus sind hier positiv.

In der Reihe (A) ist S der Sinus totus, also fällt log. s zwischen $\frac{r \cdot s}{s}$ r und r — s. Der Logarithme der ersten Proportionalzahl 999 9999 fällt zwischen 1,000 0001 und 1,000 0000, daher man denselben = 1,0000 0005 setzen mag. In der Tafel der Logarithmen ist er gerade = 1 gesetzt. Reyer erinnert aber zweymahl, daß er zwischen jene beiden Gränzen falle, kann aber keine nähere angeben. Die Logarithmen der übrigen 99 Glieder in der Reihe (A) werden durch Wiederholung dieses Logarithmen gefunden. Der Log. des letzten Gliedes 9999900,000495 ist 100.000005.

Die erste Proportionale der Reihe (B) ist 9999900. Diese sey s, das letzte Glied der Reihe (A) sey = S, so fallen die Gränzen der Unterschiede der Logarithmen fast zusammen, und der Unterschied ist S — s selbst nächstens, oder 0,000495, und der Logarithme von 9999900 ist = 100,0005. Aus diesem finden sich nun durch Wiederholung die Logarithmen der übrigen 49 Glieder. Der Logarithme des letzten Gliedes 9995001,222927, ist daher 5000,025. Durch diesen Logarithmen werden nun die Logarithmen der Glieder in der Reihe (C) gefunden.

Es ist nämlich das zweyte Glied der ersten Particular-Reihe oder Columne in der Reihe (C) = 9995000. Dieses sey s, und jenes letzte in der Reihe (B) = S, so ist S — s = 1,222927, welches man für den Unterschied der Logarithmen dieser Zahlen selbst nehmen mag. Es ist also log. 9995000 = 5001,248. Dieser 20mahl genommen giebt den Logarithmen des letzten Gliedes, 9900473,578 in der ersten Columne der Reihe (C), welcher also ist 100024,96. Aus diesem Logarithmen wird der Logarithme des ersten Gliedes der zweyten Columne hergeleitet. Dieses ist = 9900000 = s, da 9900473,578 = S ist. Es ist S — s = 473,578. Die Gränzen des Unterschiedes der Logarithmen sind

Digitized by Google

478,36 und 478,34, das Mittel 478,35; also ist log. 9900000 = 100503,31. Da der Logarithme des Verhältnisses zweyer nächsten Glieder in allen Columnen der Reihe (C) derselbe ist, so hat man nun auch den Logarithmen des zweyten Gliedes der zweyten Columne, daraus denjenigen des letzten Gliedes, und auf diese Art erhält man die Logarithmen von jedem ersten und letzten Gliede jeder Columne. Aus dem des letzten Gliedes der letzten Columne wird nun auch der Logarithme von 500 0000 bekannt, das ist der Logarithme des Verhältnisses 2 : 1. Diesen giebt Neper an = 6931469,22 in §. 51. Der natürliche Logarithme von 2 ist 0,69314 71805 ..., woraus man sieht, daß Neper genau genug gerechnet hat.

116. Weiter als bis nahe an 5000 0000 setzt Neper seine Reihe nicht fort. Denn die Logarithmen der Zahlen, die in den Bezirk seiner Reihe (C) und der beiden A und B fallen, findet er aus den Logarithmen dieser Zahlen nach der angezeigten Methode. Die Logarithmen solcher Sinus oder Zahlen, die außerhalb jenes Bezirks fallen, zu finden, multiplicirt er diese Zahlen durch 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, 200, u. dgl. oder durch irgend eine Zahl aus seiner logarithmischen Tafel, so daß sie innerhalb der Gränzen dieser angetroffen werde, worauf er wie vorher ihren Logarithmen berechnet. Die Logarithmen der Potenzen von 2 werden durch Multiplicationen des log. 2. erhalten. Den von 10 findet Neper folgendergestalt. Es ist log. 8000000 = 2231434,68 vermittelst seiner logarithmischen Tafel. Dazu muß das Dreyfache des Logarithmen von (2 : 1) addirt werden, um den log. 1000000 = 23025842,34 zu erhalten Dieser ist = log. (10 : 1). Der natürliche Logarithme von 10 ist = 2,30258 50929 94. Übrigens bemerkt Neper in §. 60. daß seine Tafel der Logarithmen der Sinus nicht völlig genau sey, weil die nach zweyerley Methoden berechneten manchmahl von einander abweichen; Er schlägt daher eine Abänderung seiner

Digitized by Google

Rechnung, die aber nicht wesentlich ist, vor, wodurch man eine größere Genauigkeit erhalten würde.

117. Zur Prüfung der Neperischen Rechnung diene der natürliche Logarithme von sin $1^\circ = 0{,}0174524$. Es ist $174524 = 23 \cdot 28 \cdot 271$, und

l. nat. 23	=	3,13549 42159
l. nat. 28	=	3,33220 45101
l. nat. 271	=	5,60211 88209
		12,06981 75469
l. 10^7	=	16,11809 56509
l. nat sin 1°	=	−4,04827 81040

Neper giebt diesen Logarithmen an = 40482764.

118. In dem Neperischen System hat man nicht sowohl Logarithmen von Zahlen als von Verhältnissen. Wenn man also den log. 174524 mittelst einer nach diesem System verfertigten Tafel der Logarithmen ganzer Zahlen finden wollte, so müßte man 10^7 in drey Factoren zerfällen, als 10^2, 10^2, 10^3, und die Logarithmen der Verhältnisse $10^2 : 23$; $10^2 : 28$; $10^3 : 271$ suchen, das ist, die Unterschiede der Logarithmen der Glieder dieser Verhältnisse nehmen, und dieselben addiren.

119. Ueber die Neperischen Logarithmen ist ein kleiner Zwist zwischen zwey gelehrten deutschen Mathematikern, Karsten und Kästner, entstanden. Jener hatte in dem Lehrbegriffe der Mathem. Th. II. §. 146. gesagt, Neper habe 1 für den Logarithmen von 999 9999 angenommen. Dagegen machte Kästner in der zweyten Sammlung seiner astronomischen Abhandlungen S. 70. ff. eine Erinnerung. Karsten suchte in der zweyten Ausgabe des Lehrbegriffs, Th. II. 1. Abth. S. 240. ff. den Mißverstand, der hier zum Theil wirklich ist, zu heben. Er bleibt übrigens dabey, daß das, was man jetzt Basis eines logarithmischen Systems nennt (Neper hat und braucht diesen Begriff nicht) die Zahl 0,999 9999 sey. Allein Neper hat, wie oben angeführt ist, zu der Zahl

Digitized by Google

9999999 nicht den Logarithmen 1 gesetzt, sondern eine Zahl zwischen 1,000 0000 und 1,0000001, wofür am schicklichsten die Zahl 1,000 00005 genommen werden könne. Das hätte Kästner erinnern müssen, anstatt daß er jene Annahme blos zweifelhaft macht. Er konnte sich auch darauf berufen, daß er gleich vorher, §. 53. die Basis des Neperischen Systems, der Annahme des Erfinders gemäß, berechnet, und 9999999,00000005 gefunden hatte. Diese findet sich auch folgendergestalt ganz leicht. Es ist log. Nep. 9999999 = 1,00000005. Nun sind für Zahlen, die sehr nahe an 1000 0000 fallen, die Veränderungen der Zahlen und der Logarithmen gleich und entgegengesetzt, also ist log. Nep. 9999999,00000005 = 1. Daher ist die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl die Basis des Systems. Kästner hatte die Neperische Schrift von der Constructio canonis wahrscheinlich nicht nachgesehen. In seiner Geschichte der Mathematik, Bd. III. S. 70—86. giebt er erst ausführliche Nachricht davon, in frühern Schriften nur von der Descriptio, da er jene erst 1798 erhalten zu haben meldet.

120. Es würde, wie Kästner bemerkt, zu mühsam seyn, ein entferntes Glied der Progression, $10^7 : 10^7 - 1 :$ etc. mittelst des binomischen Lehrsatzes zu berechnen, um zu sehen, was Neper als Logarithmen (Stellenzahl) zu ihr setzt. Man würde hier auch die Zahl nicht genau in seiner Tafel finden. Allein durch unsere sehr scharf berechneten Logarithmen läßt sich aus der Zahl die Stellenzahl derselben in jener Reihe leicht und sehr genau finden. Es sey nämlich N irgend eine Zahl, und die Stelle derselben = n, so ist $\frac{(10^7 - 1)^n}{(10^7)^{n-1}} = N$, oder $10^7 (1 - 10^{-7})^n = N$; also n log. $(1 - 10^{-7})$ = l. N — l. 10^7. Nun ist log. nat. $(1 - 10^{-7}) = -10^{-7} - \frac{1}{2} . 10^{-14} - \frac{1}{3} . 10^{-21}$ — etc. Daher ist n = (l. nat. 10^7 — l. nat. N) $(10^7 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} 10^{-7} -$ etc.). Nimmt man N = 174524, so ist n =

Digitized by Google

40482779,016. Ist Nepers Rechnung bis zu diesem Gliede zuverlässig, so hat er jene Progression nicht zum Grunde gelegt, da bey ihm der Logarithme oder die Stellenzahl = 40482764 ist. Allein es wäre auch sehr möglich, daß kleine Vernachlässigungen der Genauigkeit in den vorangehenden Gliedern der Reihe am Ende eine etwas merkliche Abweichung hervorgebracht hätten. Neper hat in der That auf das, was wir Basis eines logarithmischen Systems nennen, gar nicht geachtet.

121. Die genauere Berechnung der Logarithmen, welche Neper in seiner Schrift über die Construction derselben, §. 60. vorgeschlagen hatte, ist in Deutschland ausgeführt worden, von Benjamin Ursinus, Lehrer an einem Gymnasium zu Berlin. Er lieferte die Logarithmen der Sinus der Winkel von 10 zu 10 Secunden, nebst den Logarithmen der Tangenten, welche die Unterschiede der Logarithmen jedes Sinus und Cosinus sind, zugleich mit den natürlichen Sinus für einen Halbmesser von 10000 0000 Theilen. Diese große Tafel hat den Titel: Magnus Canon Triangulorum Logarithmicus, Coloniae 1624. in 4. Auf dem Titel wird noch bemerkt, daß dieser Canon nach Nepers Wunsch und Angabe mit aller Anstrengung berechnet sey. Es gehört dazu noch ein Werk, worin die Berechnung der trigonometrischen Linien und der Logarithmen gelehrt wird, mit der Anweisung zu ihrem Gebrauche, unter dem Titel: Trigonometria cum magno Logarithmorum Canone, Coloniae, 1625. 4. Die Jahrzahl wird sich blos auf diesen Text beziehen. Montucla sagt irria: (Gesch. der Mathem. Th. II. S. 27. 2te Ausg.), daß Ursinus in dieser größern Ausgabe das von Neper und Briggs abgeänderte System angewandt habe.

122. Die Methode ist wesentlich dieselbe mit der von Neper angewandten. Zuerst berechnet er eine geometrische Reihe von 100 Gliedern nach dem Anfangsgliede 10000 0000, als dem Sinus totus, mit hinzugefügten Decimalbrüchen von acht Stellen, nebst ihren Logarithmen. Das nächste Glied nach dem Anfangsgliede

Digitized by Google

ist 9999 9999, dessen Logarithme ist 1,000 00000 5. Dann folgt eine geometrische Reihe von eben so vielen Gliedern, mit ihren Logarithmen. Das Anfangsglied ist wiederum der Sinus totus, das nächste Glied 99999900. Diese beiden Reihen nennt er tabulas mediatrices. Hierauf wird eine dritte Tafel berechnet, welche unmittelbar zur Erfindung der Logarithmen dient, und deswegen die tabula radicalis heißt. Sie besteht aus 35 geometrischen Reihen, jede von 100 Gliedern nach dem Anfangsgliede, mit ihren Logarithmen. Die Anfangsglieder machen wiederum eine geometrische Reihe aus, und das letzte Glied jeder Reihe ist von dem Anfangsgliede der folgenden nicht so viel verschieden, als dieses von dem darauf folgenden. Die Reihe der Anfangsglieder ist $10^8 : 99 \cdot 10^6 : 9801 \cdot 10^4 : 970299 \cdot 10^2$: etc. Der Exponent ist $\frac{99}{100}$, oder $1 - \frac{1}{100}$. Die beygefügten Bruchtheile zu Sinus und Logarithmen sind blos Zehntheilchen.

123. Zur Probe der Berechnung diene wieder der Logarithmus des Sinus von 1°. Dieser ist nach Ursinus = ,0174524 1, wenn nämlich der Sinus totus = 1 gesetzt wird. Da vorher (117) der log nat. 174524 gefunden ist, so kann daraus der Logarithme von 174524,1 gleich hergeleitet werden, dessen Unterschied von jenem höchst nahe $\frac{0,1}{174524}$ ist, oder 0,000000573.

log. nat. 174524,1	=	12,06981 812
l. 10^7	=	16,11809 565
l. nat. sin. 1°	=	−4,04827 753.

Ursinus hat 404827 782, welches in der That genau genug ist, da er, so wie Neper eine discrete geometrische Reihe zum Grunde der Berechnung legen mußte.

Einen Auszug aus des Ursinus Tafel enthalten Jo. Kepleri et Jac. Bartschii Tabulae manuales logarithmicae, curante Eisenschmid. Argentor. 1700. Die Winkel gehen theils von 10 zu 10 Sec. theils von

Digitized by Google

15 zu 15; von 20 zu 20, und von 30 zu 30 Sec. Die Logarithmen der Tangenten, die hier Mesologarithmi heißen, für Winkel von 10 zu 10. Alle sind um 3 Ziffern verkürzt.

124. Kepler ergriff Nepers Erfindung mit Eifer. Er bemerkte im J. 1621 auf einer Reise durch Oberdeutschland, daß Mathematikverständige, welche ihr Alter bedächtlicher machte, nicht geneigt waren, von der neuen Rechnung Gebrauch zu machen. Es wäre, glaubten sie, für einen echten Mathematiker nicht schicklich, aus einem Abkürzungsmittel der Rechnungen viel Wesens zu machen, und ohne durch kunstgerechte Beweise sich versichert zu haben, sich eines Verfahrens zu bedienen, welches doch wol, wo man es sich am wenigsten versähe, trügen könnte. Nepers Beweis beruhe, sagten sie ferner, auf einer erdichteten geometrischen Bewegung, welche einen zu unsichern und schlüpfrigen Grund abgebe, als daß sich ein gründlicher Beweis darauf bauen ließe. Diese Bedenklichkeiten bewogen Keplern auf einen guten Beweis zu denken, den er schon auf der Reise entwarf, und in Linz, seinem Wohnorte, ausführte. Seine Theorie machte er auch bald bekannt, und begleitete sie mit einer Tafel der Logarithmen der Sinus. Der Titel ist: Jo. Kepleri Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, praemissa demonstratione legitima ortus logarithmorum eorumque usus. Marpurgi, 1624. 4. Dieser Schrift folgte: Supplementum Chiliadis Logarithmorum continens praecepta de eorum usu. Marpurgi, 1625. In England wird dieses Werk sehr geschätzt. Maseres hat in seiner großen Sammlung von logarithmischen Schriften beide Schriften ganz abdrucken lassen, wo die äußere Pracht sehr gegen das ärmliche Ansehen der deutschen Originale absticht. Auch Hutton hat in der Vorrede zu der von ihm besorgten Ausgabe der Sherwinschen Tafeln einen Auszug von 10 Seiten groß Quart in der gedachten Sammlung mitgetheilt. Des Ursinus gewiß schätzbares Werk scheint in England nicht recht bekannt gewor-

Digitized by Google

den zu seyn. Hutton erwähnt desselben nur mit wenigen Worten, und Maseres hat es in seine Sammlung nicht aufgenommen. Aber Briggs erwähnt der Arbeit des Ursinus mit großem Lobe. Trigonometria Britannica, L. I. Cap. 16.

125. Keplers Logarithmen sind dieselben mit den Neperischen, nur die Anordnung in der Tafel ist anders getroffen. Die Sinus gehen in arithmetischer Progression nach Zehntausenden fort, den Sinus totus = 10 Millionen gesetzt, daher die Winkel ungleichförmig zunehmen. Keplers Theorie ist ausführlicher und kunstgerechter als die Neperische, selbst nach eines Engländers, Huttons, Urtheil. Er betrachtet die Logarithmen als Maßen von Verhältnissen, was sie ursprünglich sind, daher auch in seiner Schrift ein völliges System über die Verhältnisse (Proportionen nach Keplers Ausdruck) und ihre Vergleichungen errichtet ist. Sein Vortrag kann demjenigen, der nicht an die unmittelbare Vergleichung verschiedener Verhältnisse gewöhnt ist, Schwierigkeit machen. Auch ist in der That derselbe nicht immer deutlich. Der Beweis des sechsten Satzes ist unvollständig.

126. Die Berechnungsart, welche Kepler ersonnen hat, wird beschwerlicher seyn als die Neperische. Er sucht zuerst den Logarithmen des Verhältnisses 100000,00 : 97656,25, das ist, den von $1 : \frac{10^5}{2^{10}}$, durch Einschaltung von 24 mittlern proportionalen, nach der Seite des ersten Gliedes. Der Unterschied von 100000 und der hievon nächsten proportionale ist das Maaß des Verhältnisses beider, und dieser 24mahl verdoppelt giebt ihm den Logarithmen des zweyten Gliedes jenes Verhältnisses, nämlich 2371,6526. (Der natürliche Logarithme von $\frac{2^{10}}{10^5}$ ist = 0,02371 65266 17.. mit Keplers Rechnung ungemein genau zusammenstimmend. Zahlen und Logarithmen müssen bey ihm durch 100000 dividirt, und jene umgekehrt werden, um sie auf

Digitized by Google

unser natürliches System zu bringen). Ferner sucht Kepler auf gleiche Art den Logarithmen des Verhältnisses 1000:500, das ist, 1:½, welcher ihm ist 69314, 7193. (Es ist log. nat. 2 = 0,69314 71805.). Hieraus leitet er den Logarithmen des Verhältnisses $2^{10}:1$, aus diesem und dem von $2^{10}:10^3$ den von $10^3:1$ her, woraus sich der von 10:1 ergiebt, nämlich 230258, 5141. (Es ist log. nat. 10 = 2,30258 50929 94.). Daraus wird ferner der log. (5:1) gefunden.

127. Hierauf sucht K. die Logarithmen der Zahlen 999; 998; 997; . . . 900 in Beziehung auf 1000. In unsern Systemen wären es die Logarithmen der Quotienten von 1000 durch diese Zahlen dividirt. Es seyn zwey nächste dieser Zahlen z und z — 1; die Quotienten $\frac{1000}{z}$ und $\frac{1000}{z-1}$ geben zwey Gränzen für die Unterschiede der Logarithmen der Zahlen z und z — 1. Von diesen Gränzen nimmt er das arithmetische Mittel bis auf die achte Ziffer, weil bey den letzten Quotienten das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Gränzen in dieser Stelle von einander abgehen. Die Summe dieser Mittel nach der Reihe genommen giebt die Logarithmen einen nach dem andern. Es ist nämlich für irgend eine Reihe, o, A, B, C, D . . . P, Q, R, in welcher die Unterschiede sind, a (=A), b, c, d . . . q, r; (A—o) + (B—A) + (C—B) . . . + (Q—P) + (R—Q) = a + b + c . . . + q + r, das ist R = a + b + c + . . . + q + r.

Alles dieses beruht darauf, daß in dem natürlichen System, welchem Kepler, so wie Neper, sich möglichst zu nähern sucht, die Logarithmen solcher Zahlen, die von der Einheit wenig verschieden sind, nahe die Unterschiede derselben von der Einheit sind: und daß der Unterschied der Logarithmen zweyer Zahlen z und z — 1 zwischen $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{z-1}$ fällt.

Mm

128. Aus den Logarithmen der ersten 100 Zahlen von 999 bis 900 leitet Kepler die Logarithmen der Primzahlen her, außer den schon gefundenen von 2 und 5. Z. B. aus dem von 960 ergeben sich die von 480, 240, 120, 60, 30, 15; aus dem letztern der von 3, da log. 5 schon bekannt ist. Eben dieser konnte auch aus dem von 900 gefunden werden. Der log. 990 giebt den log. 11; der log. 980 den log. 7. u. s. m.

129. Als Nepers Logarithmen bekannt gemacht worden waren, beschäftigte sich Henry Briggs, Professor der Geometrie am Gresham College in London*), eifrig damit, und fand daß es besser sey, dem 10ten Theil des Halbmessers den Logarithmen 100000... zu geben, d. i. das Verhältniß 10 : 1 zur Einheit nehmen, oder l. $\frac{1}{10} = 1$ setzen. Bey einem Besuche, den er Nepern abstattete, billigte dieser die Abänderung, und bemerkte, daß es zugleich am besten seyn würde, die Zahlen mit den Logarithmen zugleich wachsen zu lassen, welches in der That nichts anders ist, als die Vorzeichen der Logarithmen eigentlicher und uneigentlicher Brüche vertauschen. Briggs ist also nicht allein für sich auf den Gedanken gekommen, das Verhältniß 1 : 10 zum Maße der Verhältnisse zu machen, sondern er hat auch logarithmische Tafeln dieser Annahme zufolge berechnet, wiewohl nicht vollendet. In dem Anhange zu der Constructio canonis mirifici beschreibt der Herausgeber, Nepers Sohn, die neue Einrichtung der Logarithmen, ohne den Antheil, welchen Briggs daran gehabt hat, zu erwähnen. Dieses veranlaßte Briggs in der Vorrede zu seiner Arithmetica logarithmica seine Gerechtsame zu verwahren.

130. Briggs gab nun 1618 als Probe seines neuen logarithmischen Systems das erste Tausend, auf acht Decimalstellen berechnet, heraus: Logarithmorum Chilias prima. Die Ausgabe muß selbst in England sehr selten seyn. Im J. 1620 erschien Edmund Gunters Canon triangulorum, worin schon die Briggischen Log-

*) Er ist nachher Professor der Geometrie zu Oxford geworden, wo er im J. 1630 gestorben ist.

Digitized by Google

arithmen der Sinus und Tangenten auf sieben Decimalstellen angegeben sind. Gunter war Professor der Astronomie am Gresham's Collegium. Diese Logarithmen ließ er in seinem Buche de Sectore et Radio zugleich mit dem ersten Tausend der von Briggs herausgegebenen wieder abdrucken. Im J. 1624 erschien die Arithmetica Logarithmica von Briggs ein äußerst mühsames Werk, worin die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000, bis auf 14 Decimalstellen berechnet, enthalten sind. In der Einleitung theilte er einen ausführlichen Unterricht über die Berechnungsart und den Gebrauch dieser Logarithmen mit. Er forderte andere Rechner auf, ihm zu der Ausfüllung der noch ansehnlichen Lücke behülflich zu seyn, wozu er seine Anweisung, und selbst das dazu schon liniirte Papier anbot. Er selbst beschäftigte sich besonders mit der Tafel der logarithmischen Sinus und Tangenten durch alle Hunderttheile eines Grades, auf 14 Decimalstellen, mit einer Tafel der natürlichen Sinus für einen Radius von 1000 Billionen, und einer Tafel der Tangenten und Secanten für einen Halbmesser von 10000 Millionen. Diese hat er auch vollendet. Sie ist in Gouda, 1633, in Adrian Vlacqs Verlage, gedruckt bey Peter Rammasen, in Folio erschienen. (S. Th. I. S. 682.). Dieser Vlacq, ein Buchhändler und Mathematiker in Gouda, füllte die von Briggs gelassene Lücke aus, und gab die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, auf 10 Decimalstellen berechnet, heraus zu Gouda, 2te Ausg. 1628, fol.

131. Zur Geschichte der Mathematik gehört es, die ältern Methoden kennen zu lernen, wenn gleich diese wegen ihrer Beschwerlichkeit nicht mehr angewendet werden. Den unermüdsamen Fleiß der Berechner der Logarithmen kann man nicht schätzen, wenn man ihre Methoden nicht kennt. Speidell sagt in seiner Logarithmotechnie (London 1688), er habe gehört, daß acht Personen an den von Briggs herausgegebenen Logarithmen ein ganzes Jahr gearbeitet hätten.

Digitized by Google

132. In der Einleitung zu der Arithmetica Logarithmica erklärt Briggs zwey Verfahrungsarten zur Berechnung der Logarithmen, welche Neper schon angedeutet hatte. Diese Einleitung ist mit Weglassung einiger Abschnitte auch Vlacqs großer Logarithmen-Tafel vorgesetzt.

133. Da es zu weitläuftig seyn würde, die Erörterung des Verfassers selbst hier mitzutheilen so werde ich die Methode kurz in ein paar Formeln darstellen.

Es sey eine geometrische Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : a^4 :$ etc. angenommen, in welcher also a die Basis eines logarithmischen Systems ist. Ferner sey N eine gegebene Zahl, deren Logarithme x in jenem System gesucht wird, daher $N = a^x$ ist. Man erhebe N auf eine willkürliche mte Potenz, so ist $N^m = a^{mx}$. Man suche m so aus, daß N^m nahe eine ganze Potenz von a werde, oder mx nahe eine ganze Zahl sey. Wird nun mx durch m dividirt, so ergiebt sich der gesuchte Logarithme x desto genauer, je näher die Potenz N^m einer ganzen Potenz von a kömmt.

Z. B. Es sey $a = 10$, und $N = 2$, so ist $2^{10} = 1024$; $2^{20} = 1048576$. Also $2^{10} > 10^3$, und log. $2 > 0{,}3$. Die zweyte Gleichung giebt dasselbe. Ferner ist $2^{1000} = 107 \ldots |302|$, wo die eingeschlossene Zahl die Anzahl der Ziffern in dieser Potenz angiebt; eben so $2^{100000} = 99900 \ldots |30103|$. Der erstere Werth giebt $2^{1000} > 10^{301}$, also log. $2 > 0{,}301$. Der andere Werth giebt log. $2 < 0{,}30103$, welches mit dem in unsern Tafeln, 0,30102 99956 . . sehr genau zusammentrifft. Briggs hat die Rechnung bis zu der Potenz von 2 mit dem Exponenten 100 Billionen verfolgt, und findet dadurch den Logarithmen von 2 bis auf die 14te Decimalstelle. Auf diese Art hat er auch den Logarithmen von 7 eben so weit gefunden. Noch zum Beyspiel gebe ich aus Lamberts Zusätzen zu den . . Tafeln, S. 119, daß $3^{42} > 10^{20}$, und $3^{44} < 10^{21}$, daher log. 3 zwischen 0,4762 und 0,4773. In unsern Tafeln ist log. $3 = 0{,}4771212$ . . Bey diesem Verfahren ist es nicht nöthig, die Potenz von N vollständig

Digitized by Google

zu erhalten; sondern es ist genug, wenn man nur die Anzahl der Ziffern darin weiß, welches bey einer sehr abgekürzten Multiplication leicht erhalten werden kann. Auch braucht man bey weitem nicht die Potenzen von N nach der Reihe zu machen. Briggs erklärt inzwischen diese Methode für beschwerlicher als die folgende, welche ich auch der Kürze wegen und zur Deutlichkeit durch Formeln darstellen werde.

134. Es sey wiederum a die Basis des Systems, und $a^{\frac{1}{m}} = 1 + y$; $a^{\frac{1}{n}} = 1 + y'$. Sind m und n große Zahlen, daher $1 + y$ und $1 + y'$ wenig von der Einheit verschieden sind, so ist (23.), $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} = y : y'$ nahe, und $\log.(1+y') = \frac{y'}{y} \log.(1+y)$. Briggs gründet diese Bemerkung auf seine numerische Rechnung. Der Quotient $\frac{\log.(1+y)}{y}$ einmahl gefunden, dient den Logarithmen jeder Zahl $1 + y'$ zu finden, wenn y' klein genug ist, daß jene Proportion mit hinlänglicher Sicherheit Statt findet. Es ist jener Quotient der Modulus des Systems. Briggs treibt die Ausziehung der Wurzeln so weit, daß die erste bedeutende Ziffer von y in die sechszehnte Decimalstelle kommt. Er sucht die Zahlen $1 + y$ durch fortgesetzte Halbirung des Exponenten von 10, nämlich die Potenzen $10^{\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{1}{4}}$; $10^{\frac{1}{8}}$, etc. bis zu $m = 54$. Dadurch findet er auch den Modulus bis auf 18 Ziffern.

135. Den Logarithmus jeder andern Zahl N zu finden, wird aus ihr wiederholt die Quadratwurzel gezogen, bis daß man auf eine Potenz, $N^{\frac{1}{n}}$, kommt, die von der Einheit so wenig verschieden ist, daß dieser Ueberschuß und ihr Logarithme das vorher gefundene Verhältniß so nahe haben, als es zur Genauigkeit der Rechnung erfordert wird.

Digitized by Google

136. Um diese immer sehr mühsame Rechnung etwas abzukürzen, suche man von der Zahl N eine solche Potenz N^m daß $N^m = (1+p)\,10^n$ ist, wo p ein Decimalbruch ist, je kleiner je besser, das ist, man muß eine solche Potenz von N suchen, deren erste Ziffer linker Hand $= 1$ ist, und mehrere folgende Ziffern 0 sind, und diese durch eine solche Potenz von 10 dividiren, daß p ein Decimalbruch wird. Nun sucht man, wie vorher angewiesen ist, den Logarithmen von $1+p$, so ist $\log. N = \frac{\log.(1+p)+n}{m}$, Z. B. es ist $6^9 = 10077696 = 1{,}0077696 \times 10^7$. Durch fortgesetzte Ausziehung der Quadratwurzel aus der Zahl 1,0077696 wird der Logarithme von einer Wurzel derselben bekannt, deren Exponent eine Potenz von 2 ist, daraus der Logarithme von der Zahl selbst, und $\log. 6 = \frac{7+\log. 1{,}0077696}{9}$.

137. Zur Abkürzung der schwierigen Ausziehung der Quadratwurzeln, das ist, der fortgesetzten Einschaltung der mittlern Proportionalen zwischen der Einheit und der gegebenen Zahl, wozu der Logarithme gefunden werden soll, ersann Briggs die Methode der Differenzen, wovon in dem Artikel, Einschalten, Th. II. S. 48. ff. schon Nachricht gegeben ist. Er bedient sich auch der Differenzen, Logarithmen durch Einschaltung zwischen schon bekannten zu finden.

138. Die Lücke, welche Briggs in seiner Logarithmen-Tafel gelassen hatte, konnte ziemlich leicht ausgefüllt werden. Denn alle Zahlen, welche sich auf 0 oder 5 endigen, sind Zehnfache oder Fünffache von Zahlen, die in jener Tafel vorkommen. Die Logarithmen dieser Zahlen, als 64380; 64385; 64390; etc. nach ihrer Folge haben dieselben Unterschiedsreihen als die Logarithmen ihrer Fünftheile, 12876; 12877; 12878; etc. Vermittelst der Unterschiedsreihen der letztern konnte also die Einschaltung auch hier geschehen, desto leichter, da Vlacq nur 10 Decimalstellen nahm, wo Briggs 14 Stellen

Digitized by Google

hatte. Wo keine Primzahlen in einer Pentade liegen, konnten die Logarithmen unmittelbar aus den Logarithmen der Factoren der Zahlen gefunden werden. In dem Bezirk von 20000 bis 90000 liegen etwa 6500 Primzahlen.

139. Nicolaus Mercator (Kaufmann), ein Holsteiner von Geburt, der meistens in England gelebt hat, wo er im J. 1690 starb, gab im J. 1668 zu London heraus eine Schrift, die er Logarithmotechnia betitelte. Er zeigt darin ein neues Verfahren, wie sich Logarithmen genau und leicht berechnen lassen, wobey er sich allerdings die wiederholten Ausziehungen der Wurzeln erspart. Er gründet sein Verfahren ganz auf die Messung der Verhältnisse durch ein sehr kleines Verhältniß, unterscheidet auch sehr genau Maßen und Exponenten der Verhältnisse. Das Verhältniß 10 : 1 theilt er in 10 Millionen Theile oder ratiunculas. Zuerst sucht er die Logarithmen der Verhältnisse 100,5 : 100, und 100 : 99,5, wo die Glieder gleiche Unterschiede haben. Diese findet er auf die vorher schon angeführte Art, daß er Potenzen von 100,5 und 99,5 sucht, die einer Potenz von 100 nahe kommen, sowohl von einer Seite als von der andern. Das übrige beruht hauptsächlich auf dem Satze, (52.), daß die Maßen der Verhältnisse, deren Glieder gleiche Unterschiede haben, (d. i. die Unterschiede der Logarithmen der Glieder), sich nahe umgekehrt wie die arithmetischen Mittel zwischen den Verhältnißgliedern verhalten. Nun hatte er gefunden log. 99,5 = 1,99782307, und log. 100,5 = 2,00216597. Jener ist in der achten Decimalstelle um 1 zu klein, dieser um 9. Der Unterschied dieser Logarithmen ist 0,00434290, das Maß des Verhältnisses 99,5 : 100,5. Er findet daher durch einen einfachen Proportionalsatz die Logarithmen der Brüche, $\frac{99999}{100000}$; $\frac{99998}{99999}$; $\frac{99997}{99998}$, etc. oder der Verhältnisse ihrer Zähler und Nenner, deren Unterschiede = 1 sind, wie in dem Verhältnisse 99,5 : 100,5. Man setze zur Abkürzung 100 = a; 100000 = b, und

Digitized by Google

das arithmetische Mittel zwischen den Zählern und Nennern jener Brüche $= b - c$, so ist $\frac{a}{b-c} \times 0{,}00434290$ der Logarithme des Bruches, für welchen das arithmetische Mittel $b - c$ gilt. Mercator löset den Factor $\frac{a}{b-c}$ in eine Reihe auf, um die Division in eine Multiplication zu verwandeln. Aus den Logarithmen der Brüche werden durch fortgesetzte Addition derselben die Logarithmen der Verhältnisse jedes Zählers zu 100000, und daraus die absoluten Logarithmen der Zahlen selbst gefunden. Die Probe der Rechnung würde der Logarithme von 10000 seyn, der Zähler des Bruches $\frac{10000}{10001}$. Es ist aber sehr zu zweifeln, ob dieser die Probe bestehen würde, da alle vorhergehende Logarithmen nur genäherte sind, und dieses immer weniger, je weiter die Zahlen sich von 100000 entfernen.

140. Mercator fand auch die Quadratur des Raumes zwischen einer gleichseitigen Hyperbel und ihrer Asymptote, welche den Geometern seiner Zeit viele Freude machte. Seine Methode bestand in einer Summirung von Potenzen, deren Wurzeln in arithmetischer Progression stehen, mit unendlich kleinen, gleich großen, Unterschieden, auf die Art wie die Cavalerische Rechnung. Ferner bemerkt er, daß die sehr kleinen hyperbolischen Räume zwischen zwey immer gleich weit von einander abstehenden Ordinaten auf dieselbe Art berechnet werden, wie die Logarithmen der Verhältnisse zwischen zwey sich sehr nahe kommenden Zahlen mit gleich großen Unterschieden. Er bricht aber kurz ab; ohne weder für die hyperbolischen Räume, noch für die Logarithmen eine Formel zu geben.

141. Mercators Reihe convergirt nicht, wenn die Abscisse auf der Asymptote größer ist als das doppelte von der Abscisse, die zu dem Scheitel gehört, eben so als wenn in (23.) z oder $1 + y$ größer ist als 2. Wallis

Digitized by Google

fand hier ein Hülfsmittel, wodurch die Progressionalgröße der Reihe in jedem Falle ein Bruch ist. Er suchte eine Reihe für die Area zwischen irgend zwey Ordinaten: Die Reihe wird dadurch dieselbe wie für $\log. z - \log.(z-b) = l.\frac{z}{z-b} = -l.\left(1-\frac{b}{z}\right)$, wo $\frac{b}{z}$ das ist, was y in 38. Es sind b und z zwey Abscissen auf der Asymptote.

142. In demselben Jahre 1668, worin Mercators Logarithmotechnie erschien, gab Jakob Gregory heraus: Exercitationes geometricae, Londini, 4to. Darin erweiset er geometrisch die Quadratur der Hyperbel. Er findet nicht allein eine Reihe für die Area von der ersten Ordinate zu dem Scheitelpuncte an, nach der Richtung der Asymptote neben der Hyperbel hin, sondern auch für die Area auf der andern Seite jener Ordinate nach dem Mittelpuncte hin. Beide Reihen sind nur in den Vorzeichen der ungeraden Potenzen ihrer Progressionalgröße verschieden. Daraus findet er also eine Reihe sowol für $\log.\frac{1+y}{1}$ als für $\log.\frac{1}{1-y}$, wie in (23; 38.), daher auch für $\log.\frac{1+y}{1-y}$, wie in (57.). Mercator hatte den Logarithmen eines solchen Bruchs mühselig gesucht. Daß Gregory seine Formel angewandt habe, den Logarithmen jeder gegebenen Zahl mittelst derselben zu berechnen, finde ich nicht.

143. In eben dieser Sammlung zeigte Gregory, daß die Addition der natürlichen Secanten eines Kreisbogens die Logarithmen der Tangenten giebt, so wie auch durch die Addition der natürlichen Tangenten die Logarithmen der Secanten entstehen. Deutlicher: die Area der Curve, woran die Ordinaten die Secanten, und die Abscissen ihre zugehörigen Kreisbogen sind, ist der Logarithme der zu jedem angenommenen Bogen gehörigen Tangente; und die Area der Curve, woran die Ordinaten die

Digitized by Google

Tangenten, und die Abscissen ihre Bogen sind, ist der Logarithme der zugehörigen Secante. S. Linie, abbildende. Der erste Satz dient zur Construction der Seecharten. Halley hat die Relation zwischen den Summen der Secanten und den logarithmischen Tangenten auf eine feinere Art als Gregory erwiesen, in den Philos. Transf. Febr. 1696.

144. Newton hatte schon in den J. 1665 oder 1666 durch seine Fluxionenrechnung die Quadratur der hyperbolischen Räume über einer der Asymptoten gefunden, wie aus einem Briefe an Oldenburg, vom 24. Octob. 1676 erhellt, (Newtoni Opusc T. I. p. 332. vergl. Opusc. I. pag. 6, et Opusc. II. p. 150. Oder Wallis Werke, T. III. p. 635.). Die Hyperbel ist die gleichseitige. Er gebraucht die combinirten Reihen für $\log(1+y) \pm \log(1-y)$, deren halbe Summe den $\log.(1+y)$, halber Unterschied den $\log.(1-y)$ giebt. Zum Beyspiele nimmt er $y=0$, 1 und $y=0{,}2$. So erhält er die Logarithmen von 0,8; 0,9; 1,1 und 1,2. Da $\frac{1,2}{0,8} \times \frac{1,2}{0,9} = 2$ ist, so wird nun der hyperbolische Logarithme von 2 bekannt; daher auch der von 8; aus diesem und dem von 0,8 der log. hyp. 10. Nun sind sogleich log. 5 und log. 11 auch gefunden. Nimmt man $y = 0{,}01$; 0,02, oder 0,001; 0,002, so lassen sich aus den Logarithmen von 0,98; 0,99; und denen von 0,998; 0,999 die Logarithmen der Primzahlen 7; 13, 17, 37, etc. herleiten. In der Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Opusc. T. I. p. 150, kommen alle drey Reihen, die von Mercator, Wallis und Gregory angegebenen, vor. Daselbst giebt Newton eine Formel zur Interpolation des Logarithmen einer Zahl, die zwischen zwey andern Zahlen, deren Logarithmen bekannt sind, das arithmetische Mittel ist. Bey dieser ist er aber durch seine geometrische Construction zu einem Umschweife veranlaßt worden. Es ist, um bey seinen Bezeichnungen zu bleiben, $\log.\text{nat.}\, n - \log.(n-x) =$

Digitized by Google

$\log. \frac{n}{n-x} = -\log.(1-\frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ + etc. und $\log.(n+x) - l.(n-x) = l.(1+\frac{x}{n}) - l.(1-\frac{x}{n}) = \frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} +$ etc.

Diese letztere Reihe nennt Newton $= 2d$, und setzt

$$\log. n - \log.(n-x) = \frac{\frac{dx}{2n} + \frac{dx^2}{2n^2} + \frac{dx^3}{3n^3} + \text{etc.}}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \text{etc.}},$$

woraus er durch Division herleitet,

$$\log. n - \log.(n-x) = d + \frac{dx}{2n} + \frac{d^5x^5}{12n^4} + \text{etc.}$$

In der That ist aber der Factor d im Zähler gleich dem Nenner. Die erste Formel für $l. n - l.(n-x)$ ist nicht allein schon hinreichend, sondern ist auch für jeden kleinen Werth von x brauchbar.

In derselben Schrift (p. 177.) findet er auch die Reihe für die Zahl durch den Logarithmen, mittelst seiner Methode, die Wurzeln einer Gleichung durch eine Reihe anzugeben. Die Rechnung ist nur ein Beyspiel zu der Aufgabe, aus der Area einer Curve die Abscisse und Ordinate herzuleiten. Diese Schrift ist erst 1736 bekannt gemacht.

145. Leibnitz fand die Reihe, welche die Zahl $1+y$ oder $1-y$ durch ihren Logarithmen angiebt. Dieses hat er in einem Schreiben an Oldenburg vom J. 1676 gemeldet. Er hat sie durch Umkehrung gefunden. In diesem Schreiben, so wie in einem Aufsatze, in den Actis Erud. Febr. 1682, giebt er blos die Reihe für log. 2, welche bey ihm ist $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{320} +$ etc. das ist $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ etc.), mit je zwey zusammen gezogenen Brüchen. Er setzt das gegebene Rechteck an der Hyperbel $= \frac{1}{4}$, welches so viel ist, als den Modulus $= \frac{1}{4}$ nehmen, da es für die natürlichen Logarithmen $= 1$ ist.

Digitized by Google

146. Halley lieferte in den englischen Transactionen für das J. 1695 eine Abhandlung über die bequemste Berechnungsart der Logarithmen, ohne Rücksicht auf die Hyperbel, wobey er zugleich die ganze Theorie der Logarithmen entwickelte. Anstatt der bis dahin gewöhnlichen Erklärung der Logarithmen, daß sie seyn numerorum proportionalium aequidifferentes comites, setzte er diese: numeri rationem exponentes. Er gründet die Theorie derselben ganz auf den Begriff von Zusammensetzung der Verhältnisse. Das Verhältniß zweyer Zahlen setzt er aus einer unendlichen Menge von Elementarverhältnissen (ratiunculis) zusammen. Nun werde der Logarithmus des Verhältnisses $1 : 1 + q$ gesucht. Man schalte zwischen den beiden Gliedern $m - 1$ Proportionalen ein, (dadurch wird das Verhältniß aus m gleich großen Verhältnissen zusammengesetzt), so ist $(1+q)^{\frac{1}{m}}$ die erste derselben nach 1, und $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ verhält sich wie der gesuchte Logarithme. Nun entwickelt Halley die mte Wurzel aus $1 + q$ nach dem binomischen Lehrsatze, läßt die niedrigern Potenzen von m gegen die höchste in jedem Coefficienten weg, und so wird

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}(q - \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{3}q^3 - \tfrac{1}{4}q^4 + \text{etc.}).$$

Den Theil rechter Hand nennt Halley den Logarithmen von $1 + q$, und sagt, der unendliche Index m könne nach Gefallen angenommen werden; setze man $m = 1000000$ etc. so erhalte man Nepers Logarithmen. Diese Darstellung ist wegen des unendlichen großen Divisors zu einer endlichen Größe undeutlich. Man muß noch in Gedanken einen unendlich großen Multiplicator zufügen. Deutlicher wäre folgendes. Da das Maß des Verhältnisses $1 : 1 + q$ durch den Logarithmen desselben angegeben werden soll, so ist, wenn dieser durch L bezeichnet wird, $\frac{1}{m}L$ das Maß des Elementar-Verhältnisses $1 : (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$.

Digitized by Google

Da die Einheit bey allen Maßen willkürlich ist, so kann man dieses Maß zu dem Hintergliede $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ in irgend einem Verhältnisse annehmen. Beide sind unendlich kleine Größen. Setzt man $\frac{1}{m}L = M[(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1]$, so ist $L = M(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \text{etc.})$, wo $M = 1$ die natürlichen Logarithmen giebt.

Auf gleiche Art verhält sich der Logarithme des Verhältnisses $1 : 1-q$, wie $\frac{1}{m}(q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{4}q^4 + \text{etc.})$. Halley nimmt hier die absolute Größe des Logarithmen. Der Gebrauch des Negativen war ihm, als Geometer aus der Schule der Alten, fremde. Er vermeidet es auf folgende Art.

Wenn der Logarithme eines Verhältnisses $a : b$ gesucht wird, so läßt sich dieser auf zweyerley Art angeben. Es ist nämlich $a : b = 1 : 1 + \frac{b-a}{a}$, und auch $a : b = 1 - \frac{b-a}{b} : 1$, wobey b größer als a gesetzt wird. Nach dem erstern Ausdruck ist $q = \frac{b-a}{a}$, nach dem zweyten ist $q = \frac{b-a}{b}$. Nach jenem ist nun $\log.\frac{b}{a} = \log.(1+q)$; nach diesem ist $\log.\frac{a}{b} = \log.(1-q)$. Dort wird die erste logarithmische Reihe mit den ungleichnamigen Gliedern, hier die zweyte mit den gleichnamigen Gliedern gebraucht. Es ist aber, wenn wir die Logarithmen der eigentlichen Brüche von denen der uneigentlichen durch die Negation unterscheiden, $\log.\frac{a}{b} = -\log.\frac{b}{a}$.

Digitized by Google

Da log. (1 — q) also negativ ist, so ist log. $\frac{b}{a}$ = — log. (1 — q), eine positive Größe. Halley nimmt das Elementarverhältniß zu 1 : 1 — q mit dem 1 : 1 — q gleichnamig oder beide abnehmend, ihre Logarithmen auch gleichnamig, ohne Rücksicht auf das Elementarverhältniß zu dem 1 : 1 + q. Er betrachtet beide Fälle für 1 : 1 + q und 1 : 1 — q jede unabhängig von einander, wie man es in der alten Geometrie gewohnt ist.

147. Hierauf setzt Halley das Verhältniß a : b aus den Verhältnissen a : $\frac{1}{2}$ (a + b) und $\frac{1}{2}$ (a + b) : b zusammen, und log. (a : b) aus den Logarithmen dieser beiden Verhältnisse. Es ist a : $\frac{1}{2}$ (a + b) = 1 — $\frac{b-a}{a+b}$: 1. Der Logarithme dieses Verhältnisses wird durch die zweyte Reihe mit gleichnamigen Gliedern ausgedruckt. Zweytens ist $\frac{1}{2}$ (a + b) : b = 1 : 1 + $\frac{b-a}{a+b}$. Der Logarithme dieses Verhältnisses wird durch die erste Reihe angegeben. Beide Reihen zusammen genommen geben den log. (a : b). Die Reihe ist die in (57.) für log. $\frac{1+y}{-y}$ gefundene, nur daß dort der Modulus = 1 gesetzt ist. Halley findet ferner den Logarithmen des Verhältnisses ab : $\frac{1}{4}$ (a + b)^2 durch den Unterschied der Verhältnisse a : $\frac{1}{2}$ (a + b) und $\frac{1}{2}$ (a + b) : b, das ist durch die Subtraction des Logarithmen des letztern von demjenigen des erstern. Das zweyte Verhältniß ist das umgekehrte von dem bey der Addition der Verhältnisse. Die Halbirung des Logarithmen giebt den von dem Verhältnisse $\sqrt{}$ ab : $\frac{1}{2}$ (a + b). Eine noch mehr convergirende Reihe findet er, indem er das Verhältniß ab : $\frac{1}{4}$ (a + b)^2 aus zweyen zusammensetzt, eben so wie vorher das a : b. Hier nimmt er b = a + 1. Diese beiden Reihen sind die oben (61 ; 62.) angegebenen. Beide Reihen gehören Halley eigen. So

Digitized by Google

auch die Reihe, welche eine Zahl durch ihren Logarithmen angiebt. Er findet sie auf eine ähnliche Art, wie sie in (28) gefunden ist. Newtons Umkehrungsmethode war um das J. 1695 kaum bekannt, und Leibnitzens Reihe ist erst durch das Commercium epistolicum, (s. Th. I. S. 849.) der Welt mitgetheilt worden. Halleys Methoden, Logarithmen und Zahlen, eins aus dem andern zu finden, sind sich analog, und machen ein Ganzes aus. Sie haben mit der von mir (18—29) vorgetragenen Theorie viel ähnliches.

148. In England haben selbst geschickte Mathematikverständige Halley's Vortrag dunkel und schwer gefunden. Das veranlaßte Francis Maseres in seiner Sammlung logarithmischer Schriften der Halleyischen Abhandlung einen Commentar beyzufügen. Gleich anfangs gesteht er aber offenherzig, daß er die beiden logarithmischen Reihen nach q, und die umgekehrte für die Zahl zu einem Logarithmen nie habe völlig verstehen können. Die vorher gegebene Erläuterung wird hoffentlich alle Schwierigkeit heben. So dunkel, als Halley's Aufsatz nach Maseres in England durchgängig gefunden wird (Vol. I. Pref. VI. Vol. II. p. 92.), ist er doch wahrlich nicht. Die von Maseres zu dem übrigen beygefügten Anmerkungen und Erweiterungen nehmen 30 Quartseiten ein. Noch fügt M. einen Anhang bey, auch 30 S. stark, worin er die Berechnung der Logarithmen blos durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes zeiget. Ein Commentar über Halley's Methode scheint zu seyn: An essay on Logarithms by Andrew Reid, London, 1767. Der Verf. zeigt darin, wie die Berechnung der Logarithmen aus dem binomischen Lehrsatze hergeleitet wird. Halley's Formeln erläutert er durch viele Beyspiele.

149. Der binomische Lehrsatz ist der eigentliche Grund, worauf die ganze Lehre von den Logarithmen beruht, man mag entweder mit Halley unmittelbar daraus die beiden logarithmischen Reihen für Logarithme und Zahl entwickeln, oder man mag aus der Gleichung, $z = a^x$,

Digitized by Google

durch Hülfe der Differentialrechnung die Reihe für den Logarithmen x herleiten. Bey weitem die meisten Schriftsteller haben aber die Rechnung hier von der Geometrie abhängig gelassen. Bey den ältern Analysten war dies ganz in der Regel, weil sie alle analytische Untersuchungen auf geometrische Betrachtungen gründeten, oder doch die Resultate der Rechnung durch geometrische Constructionen darstellten. So waren es hier die Hyperbel und die logarithmische Linie, welche die Differentialgleichung an die Hand geben mußten, jene durch die Flächenräume, welche den Logarithmen der zugehörigen Abscissen auf der Asymptote proportional sind; diese durch die Subtangente, welche an ihr eine unveränderliche Länge hat. In unsern Lehrbüchern von Kästner, Karsten, Tempelhof, Segner ist die logarithmische Differentialgleichung aus Betrachtung einer Figur hergeleitet. Der Beweis, den Segner in den Elem. Anal. Infin. P. I. §. 203. etc. giebt, ist in der That identisch, oder sagt nichts mehr, als d. log. y = d. log. y. In Mitterpachers Analysis, welche Pasquich herausgegeben hat, ist die Reihe für den Logarithmen einer Zahl durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes gefunden, doch mit Zuziehung eines Postulats, daß immer $a^m = m\mu + 1$ gemacht werden könne. Dieses hat keinen Zweifel, wenn μ so wie m veränderlich ist. Aber der Factor μ wird der Modulus des Systems, und ist daher stillschweigends als eine unveränderliche Größe betrachtet. Es ist aber wirklich μ veränderlich. Denn wenn $a = 1 + b$ gesetzt wird, so wird μ eine Function von m, die mit m veränderlich ist. Pasquich selbst hat in den Elementis Analyseos et Geometriae sublimioris, Cap. I. durch die Methode der unbestimmten Coefficienten beide Reihen für Logarithmen und Zahl, ohne Hülfe des binomischen Lehrsatzes, herausgebracht, blos mit Zuziehung des Satzes, daß $\Delta \log.(1+z) = \log.\left(1 + \frac{\Delta z}{1+z}\right)$ ist. Es ist nämlich $\Delta \log.(1+z) = \log.(1+z+\Delta z)$

Digitized by Google

$-\log.(1+z) = \log.\left(1+\frac{\Delta z}{1+z}\right)$. Die Entwickelung der ersten Reihe ist sehr einfach; die der zweyten konnte mittelst jener kürzer bewerkstelligt werden.

150. Euler möchte nach Halley der erste seyn, der die logarithmischen Reihen ganz auf den binomischen Lehrsatz gründete. In der Introd. in Anal. Infin. Cap. VII. setzt er $a^{\omega} = 1 + k\omega$, wenn ω unendlich klein ist, so daß k eine bestimmte Größe hat, die von a abhängt. (Wenn $a = 1 + b$ gesetzt wird, so giebt der binomische Lehrsatz, bey einem verschwindenden ω, $k = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}$). Nun setzt Euler die endliche $z = i\omega$, wo i unendlich groß ist. So ist $a^z = (1 + k\omega)^i$, oder $a^{\omega} = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)$. Diese Potenz entwickelt, giebt, wenn die unendlichen Factoren gegen einander aufgehoben werden, $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ Die Reihe für z wird durch $a^z - 1$ auf ähnliche Art gefunden.

151. La Grange setzt an dieser Herleitung aus, daß die Anwendung des Unendlichen, wenn sie gleich überhaupt zulässig sey, doch zur Begründung der Elementarlehren nicht die Augenscheinlichkeit und Schärfe habe, welche bey diesen erforderlich ist. (Théorie des fonctions analytiques 22.). Er trägt deßwegen einen Beweis vor, der ebenfalls ganz auf dem binomischen Lehrsatz gegründet, aber völlig frey von der Einmischung des Unendlichen ist. Da dieser Beweis durch die dabey gebrauchte Schlußart merkwürdig ist, so verdient er allerdings hier mitgetheilt zu werden.

152. Es sey $y = a^x$, wo y eine Zahl in dem System mit der Basis a, und x der zugehörige Logarithme ist. Der Potenz a^x gebe man diese Form, $[(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}$, und entwickele sie nach dem bino-

Digitized by Google

mischen Lehrsatze. Da n eine ganz willkürliche Zahl ist, so hat sie auf den Werth der Potenz gar keinen Einfluß, und es müssen daher alle Glieder, welche n enthalten, sich gegen einander aufheben. Auf dieser Bemerkung beruht der ganze Beweis, und dieser zufolge muß die in eine Reihe entwickelte Potenz nach den Potenzen von n geordnet werden. Zuerst ist, wenn 1 als der erste Theil, a — 1 als der zweyte angesehen wird,

$$(1+a-1)^n = 1 + n(a-1) + \frac{n.n-1.}{1.2}.(a-1)^2 + \text{etc.}$$

Diese Reihe werde nach den Potenzen von n geordnet, und die Coefficienten derselben seyn durch A, B, C, etc. bezeichnet, so ist

$$(1+a-1)^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \text{etc.}$$

Hier ist es nur nöthig, den Coefficienten A zu kennen. Es ist, wie man leicht sieht,

$$A = a - 1 - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}$$

Nun entwickele man die Potenz $(1 + An + Bn^2 + \text{etc.})^{\frac{x}{n}}$, wo 1 der erste Theil ist, und alles übrige den zweyten Theil ausmacht. Ich bezeichne diesen zweyten Theil zur Abkürzung durch Pn, so ist

$$y = 1 + \frac{x}{n}Pn + \frac{x.x-n.}{n.2n}P^2n^2 + \frac{x.x-n.x-2n.}{n.2n.3n}P^3n^3 + \text{etc.}$$

das ist,

$$y = 1 + x.P + \frac{x.x-n.}{1.2}P^2 + \frac{x.x-n.x-2n.}{1.2.3}P^3 + \text{etc.}$$

Hier muß sich alles aufheben, was die willkürliche Zahl n enthält. Dadurch bleiben von den Coefficienten blos die Theile x; $\frac{x^2}{1.2}$; $\frac{x^3}{1.2.3}$; etc. und von P der Theil A. Solchergestalt wird

Digitized by Google

$$y = a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Die Reihe für x durch y oder durch (y — 1) wird auf ähnliche Art gefunden. Man gebe der Gleichung $a^x = y$ diese Form:

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n,$$

und entwickele beide Theile der Gleichung, lasse diejenigen Glieder, welche n enthalten, weg, so wird

$$x = \log. y = \frac{1}{A}(y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}).$$

Diese Herleitung beider Reihen ist sehr einfach und sinnreich. Ein Geometer des Alterthums möchte nur verlangen, auch noch bewiesen zu sehen, welcher gestalt die Glieder, welche n enthalten, sich aufheben.

153. Vorher hatte la Grange die Gleichung $y = a^x$ zu Beyspielen gebraucht, seine Derivationsmethode einer Function, $f(x + u)$, aus der fx zu zeigen. Diese Methode ist in dem Artikel, Differenzen-Rechnung, 15 — 40 erklärt worden. Die gedoppelte Entwickelung jener Gleichung ist daselbst 24. 25. gewiesen. Es ist da aus der Lehre von den Logarithmen als Hülfssatz hergenommen, daß die Gränze des Quotienten $\frac{a^u - 1}{u}$ eine bestimmte Größe ist. Dieses kann auch leicht unabhängig erwiesen werden. Denn wenn $a = 1 + b$ gesetzt wird, so ist $a^u = 1 + ub + \frac{u.u-1.}{1.2} b^2 + \text{etc.}$ und

$$\frac{a^u - 1}{u} = b + \frac{u-1}{1.2} b^2 + \frac{u-1.u-2.}{1.2.3} b^3 + \text{etc.}$$

wovon die Gränze, oder der von u unabhängige Theil, ist $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.}$ eine durch a gegebene Größe. Bey den Entwickelungen der Werthe von log. x und a^x a. a. O. ist es dienlich, die letztere jener vorgehen zu lassen. In 25. daselbst vertausche man den

Digitized by Google

Exponenten u von a^x mit x, um die Reihe für a^x, die vorgegebene Potenz, zu erhalten. Zu der Reihe für $\log.(x+u)$ setze man noch diese, durch Abziehung von $\log. x$ auf beiden Seiten der Gleichung, entstehende,

$$\log.\left(1+\frac{u}{x}\right) = \frac{cu}{x} - \frac{cu^2}{2x^2} + \frac{cu^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

154. Die Methode der unbestimmten Coefficienten in Verbindung mit der Entwickelung der Differenzen-Reihen hat L'Huilier auf eine sinnreiche Art angewandt, in seinen Principiis calculi differentialis et integralis. In der Preisschrift, woraus dieses Werk erwachsen ist, hatte der Verfasser die Theorie der Logarithmen auf die Betrachtung der logarithmischen Linie gegründet. Es sey

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

Man setze nach der Reihe für x die Zahlen x, 2x, 3x, 4x, etc. und nehme von den Potenzen der Zahl a^x sowol als von den Reihen die ersten, zweyten und folgenden Differenzen. Von den Potenzen werden die Anfangsglieder der Differenzen die Producte, $(a^x-1)a^x$; $(a^x-1)^2a^x$; $(a^x-1)^3a^x$; $(a^x-1)^4a^x$; etc. Das erste Glied dieser Producte, wenn sie mittelst der Reihe für a^x entwickelt werden, ist $A^n x^n$, wo n die Ordnungszahl der Differenzreihe ist. Die Differenzen der Reihen selbst enthalten in den Anfangsgliedern (die hier Reihen sind) die Differenzen der Potenzen der natürlichen Zahlen, verbunden mit den Coefficienten A, B, C, D, etc. so viele ihrer nicht durch das fortgesetzte Abziehen verschwunden sind. Z. B. in dem Anfangsgliede der ersten Differenzreihe kommt zu D die Differenz $2^4 - 1^4$ als Factor; in der zweyten die Differenz $(3^4-2^4) - (2^4-1^4)$, u. s. f. nach dem Gesetze, das in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen (2.), angegeben ist. In der vierten ist das beständige Glied 1. 2. 3. 4. D (eb. das. 23.). Das Anfangsglied der vierten Differenzreihe hat nun zum ersten Terminus das Glied 1. 2. 3. 4. Dx^4, weil die Termini

Digitized by Google

mit niedrigern Potenzen von x durch das wiederholte Abziehen jedes Gliedes von dem folgenden verschwunden sind. Jenes Glied ist gleich dem ersten Terminus des Anfangsgliedes der vierten Differenzreihe der obigen Producte, das ist A^4x^4. Daher ist $D = \frac{A^4}{1.2.3.4}$. Der erste Coefficient A bleibt unbestimmt. Er ist das Reciproke des Modulus des Systems.

Die Reihe für den Logarithmen durch die Zahl findet L'Huilier auf folgende Art, bey deren Angabe ich aber für die Reihen eine abkürzende Bezeichnung gebrauchen will.

Es sey $a^x = 1 + Px$, und $a^{\Delta x} = 1 + Q\Delta x$; auch sey $n\Delta x = x$, und $a^x = 1 + y$. Es ist nun $a^{n\Delta x} = (1 + Q\Delta x)^n$, daher $Q\Delta x = (1+y)^{\frac{x}{n}} - 1$, und daraus $Qx = n\left((1+y)^{\frac{x}{n}} - 1\right)$. Aus dem Reihenwerthe von a^x folgt, daß die Gränze von $\frac{a^x - 1}{x}$ ist A, wenn x ohne Ende vermindert wird; also ist von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ die Gränze = A, das ist, die Gränze von Q ist = A. Die Gränze des Products $n\left[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$ ist $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$ Folglich ist

$$x = \frac{1}{A}\left(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right).$$

Noch ein anderes Verfahren, das blos auf die Methode der unbestimmten Coefficienten gegründet ist, hat L'Huilier in seiner Anleitung zur Elementar-Algebra Th. II. §. 191. 199. gebraucht.

155. Bürja hat in dem Leipziger Magazin für die Mathematik, 1. St. 1786. und sehr ausführlich in den

Digitized by Google

Mém. de l'Acad. de Berlin pour 1786, 87 et 1788, 89 eine Methode angegeben, wie der Logarithme einer Zahl für jede Basis, ohne Hülfe der analytischen Formeln, berechnet werden kann. Bey allem, was für die Berechnung der Logarithmen erdacht ist, hatte er doch eine Methode vermißt, die zugleich direct und elementarisch wäre. Beides ist in der That die Methode dieses Mathematikers, aber zur Berechnung eines Canons doch bey weitem nicht so bequem als die analytischen Formeln, wiewol sie bequemer seyn mag, als die von den ältern Rechnern gebrauchten Methoden. Sie beruht auf folgenden Bemerkungen. Es sey eine Zahl $z = a^{3,467}$, so ist $z = a^{3} \cdot a^{0,4} \cdot a^{0,06} \cdot a^{0,007}$. Es ist daher, um den Logarithmen aus der Zahl oder umgekehrt zu finden, nöthig, diejenigen Potenzen von der Basis a zu berechnen, deren Exponenten erstlich die Einer, die Zehner, die Hunderte sind, so weit als man es für nöthig erachtet; dann die Brüche 0,9; 0,8; ... 0,1; ferner 0,09; 0,08 ... 0,01; weiter 0,009; 0,008 ... 0,001, u. s. f. Dann kann man mittelst successiver Divisionen aus der Zahl z die Factoren, also die Theile des Logarithmen finden. Aus dem Logarithmen hat man die Factoren des Products, also die Zahl z. Bürja hat eine Tafel der Zahlen zu jenen Exponenten oder Logarithmen, für $a = 10$, berechnet, in welcher der letzte Logarithme ist die 1 in der 16ten Decimalstelle. Er hat noch eine Methode angegeben, auch ohne eine solche Hülfstafel die Logarithmen zu finden, wobey diese in Form eines Kettenbruches erscheinen.

156. Eine Theorie der Logarithmen, ganz auf den Begriff von Verhältnissen gebaut, die ein Anhang zu Euklids Lehre von den Verhältnissen seyn könnte, ist in Roberti Simsoni Operibus reliquis, Glasguae, 1776. enthalten. Von der Berechnung der Logarithmen ist daselbst nicht die Frage.

Als Commentar über Nepers Theorie der Logarithmen kann dienen, was Maclaurin über Logarithmen und ihre Fluxionen vorträgt, Treatise on Fluxions

Digitized by Google

Chap. VI. Alles ist hier auch auf Vergleichung von Verhältnissen gebauet.

157. Es wird jetzt nur noch übrig seyn, von einigen numerischen Berechnungen der Logarithmen Nachricht zu geben.

Abraham Sharp, der größte Rechner seiner Zeit (gest. 1742 im 91sten J. seines Alters), machte sich verdient durch sehr weit getriebene Berechnungen von Logarithmen. Er berechnete die Logarithmen aller Primzahlen unter 1100 bis auf 60 Stellen ohne die Charakteristik, auch die Logarithmen der Zahlen von 999981 bis 1000015, eben so weit, zu dem Zwecke, den Logarithmen jeder Zahl eben so weit und umgekehrt zu finden, wie oben (92.) erklärt ist. Seine Methode, Logarithmen leicht zu berechnen, steht in Gardiners Ausgabe von Sherwins mathematischen Tafeln. Flamstead, Halley und andere Mathematiker seiner Zeit gebrauchten Sharp häufig zu verwickelten und mühsamen Rechnungen.

James Dodson gab im J. 1742 einen Canon der Logarithmen heraus, den er Antilogarithmic Canon nannte, weil darin die Logarithmen in arithmetischer Progression fortgehen, die Zahlen also in geometrischer. Es sind darin alle Logarithmen unter 100000 mit dem Unterschiede = 1, und die zugehörigen Zahlen bis auf 11 Ziffern, zugleich mit ihren Unterschieden und Proportionaltheilen enthalten. Die Berechnung ist durch wiederholte Einschaltungen gemacht. Zuerst sind zwischen 1 und 10 neun geometrisch Proportionale eingeschaltet, zwischen je zweyen diesen wiederum neun Proportionale, welche Einschaltungen noch dreymahl wiederholt sind. Bey der letztern genügte es, sie durch Hülfe der Unterschiede zu machen.

Wolfram, ein holländischer Artillerie-Officier, hat die natürlichen Logarithmen aller Primzahlen unter 10000 berechnet bis zu der 48sten Decimalstelle. Sie sind in Schulzens Sammlung mathematischer Tafeln, und daraus in Vega's großer Sammlung mit einigen Ergänzungen und Berichtigungen abgedruckt. Von den ersten

Digitized by Google

2200 Zahlen sind hier alle vorhanden; bis zu 6000 sind die durch 2, 3, 5, auch einige andere leicht theilbare Zahlen ausgelassen; von 60000 an finden sich nur die Primzahlen. Den braven Rechner lernt man näher kennen aus Lamberts deutschem Briefwechsel, IV. Bande.

Die neuen trigonometrischen Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten berechnet von Hobert und Ideler erforderten eine neue Berechnung der Logarithmen der Sinus und Tangenten. Wie sie dabey verfahren sind, findet man in der lehrreichen Einleitung.

Als man im Anfange der französischen Republik bey allen Maßen die Decimal-Eintheilung einführte, wurden auch neue Tafeln der trigonometrischen Linien und ihrer Logarithmen erforderlich. Dieser Unternehmung wollte man, wie allem, was auf das neue französische Maßen-System Bezug hatte, einen auszeichnenden Charakter der Größe und Vorzüglichkeit geben, und trug dem Director der zur Verfertigung eines Lagerbuchs angesetzten Commission (Bureau du cadastre), Prony, auf, Tafeln berechnen zu lassen, welche nicht allein äußerst genau wären, sondern auch durch ihren Umfang alles, was bisher ausgeführt oder nur entworfen worden, übertreffen sollten. Das colossalische Werk ist auch ausgeführt, aber noch nicht durch den Druck gemein gemacht. Einige Mathematiker vom ersten Range lieferten die Formeln und die Methode, wie die Differenzen bey der Rechnung gebraucht werden sollten. Sieben oder acht in analytischen und numerischen Rechnungen geübte Männer berechneten nach den allgemeinen Formeln an bestimmten Stellen die Zahlen und die zugehörigen Differenzen von mehrern Ordnungen bis auf diejenige, die als eine beständige betrachtet ward. Mittelst der beständigen Differenzen füllten gemeine Rechner die Differenzen-Reihen und die Hauptreihe, von einer Anfangsstelle bis zu einer Schlußstelle aus, die für einen folgenden Abschnitt wieder die Anfangsstelle ward. Da diese zum voraus berechnet war, so konnte man die Rechnungen dadurch prüfen.

Digitized by Google

Diese mechanischen Rechnungen wurden von 60 bis 80 Leuten ausgeführt. Alles ward zweymal berechnet.

Die natürlichen Sinus sind für jedes Zehntausendstheilchen des Quadranten auf 25 Decimalstellen mit sieben oder acht Differenzenreihen berechnet. — Die Logarithmen der Sinus für jedes Hunderttausendtheilchen des Quadranten auf 14 Decimalstellen mit fünf Differenzenreihen. — Die Logarithmen der Verhältnisse der Sinus zu ihren Bogen für die 5000 ersten 1000000theilchen des Quadranten auf 14 Decimalstellen mit drey Differenzenreihen. — Die Logarithmen der Tangenten. — Die Logarithmen der Verhältnisse der Tangenten zu den Bogen. — Die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 auf 19 Decimalstellen. — Die Logarithmen der Zahlen von 10000 bis 200000, auf 14 Decimalstellen mit fünf Differenzenreihen.

Der Druck ist angefangen, aber durch den Fall des Papiergeldes unterbrochen worden. Die Tafeln würden, außer einer ausführlichen Einleitung, 1200 Folioseiten eingenommen haben. In dem Abdrucke sollten ein paar Ziffern weggelassen werden. Die Tangenten und die Secanten sind nicht berechnet worden.

Diese Nachrichten sind aus der Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques, calculées au Bureau du Cadastre, à Paris An IX. genommen.

158. Von den vorzüglichsten logarithmischen Tafeln ist schon in dem Artikel, Cyklotechnie, Nachricht gegeben. Mehrere literarische Nachrichten liefern

Scheibels Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß, VII. St. S. 3 — 88. XI. S. 403 — 417.

Köstners astronomische Abhandlungen. Zweyte Sammlung S. 1 — 79. — Fortsetzung der Rechenkunst. S. 79 — 107, worauf noch einige Anwendungen folgen. — Geschichte der Mathematik. III. Bd. S. 13 — 18, und 70 — 100.

Murhards Literatur der mathem. Wissenschaften. II. Bd. S. 181 — 199.

Digitized by Google

159. Francis Maseres hat eine Sammlung von Schriften über Logarithmen und einige damit verbundene Gegenstände in drey starken großen Quartbänden herausgegeben: Scriptores Logarithmici; or a Collection of several curious tracts on the nature and construction of Logarithms. London 1791 — 1796. Es wird noch ein vierter Band hinzugekommen seyn. In dem ersten Bande befinden sich die ausführliche Vorrede von Hutton zu seiner Ausgabe von Sherwins Tafeln, die größtentheils die Logarithmen betrifft, 121 S. stark; Keplers beide Schriften selbst mit den Tafeln; Mercators Logarithmotechnie, nebst einer Abhandlung über das Größte und Kleinste von Ricci, welche der Logarithmotechnie beygedruckt worden ist; Aufsätze von Brounker und Wallis aus den Transactionen, und sehr weitschweifige Bemerkungen des Herausgebers über diese Aufsätze 150 S. lang. — In dem zweyten Bande drey Abhandlungen und ein Schreiben von Jakob Gregory; zwey Schreiben von Newton, und eines von Leibnitz; das zwölfte Capitel aus Wallis's Algebra, und ein Schreiben desselben über die Summe der Secanten; Speidells Logarithmotechnie; Halleys Aufsatz über die Vergleichung der logarithmischen Tangenten mit der Summe der Secanten; desselben Formeln für die Logarithmen und des Herausgebers Erläuterungen darüber. Fünf Abhandlungen des Herausgebers über Newtons Binomialtheorem auf 225 S. und Landens Erweis durch die von ihm so sogenannte Residual Analysis; endlich noch drey Abhandlungen des Herausgebers über Cardans Regel auf 202 S. — Den dritten Band eröffnet eine Vorrede von 104 Seiten. Dann folgen: zwey Stücke aus Jakob Bernoulli's Buche de arte conjectandi, betreffend den binomischen Lehrsatz, die Versetzungen, Combinationen und Summen der Potenzen natürlicher Zahlen, mit einem Anhange von dem Herausgeber; Sharps Methode Logarithmen zu berechnen; desselben Methode die natürlichen Sinus, Tangenten und Secanten zu berechnen (auch in Gardiners Ausgabe von Sherwins Tafeln);

Digitized by Google

verschiedene Abhandlungen über die Rectification des Kreises von Halley, Sharp, Machin, Hutton, Euler, Helkins und dem Herausgeber; drey Abhandlungen von dem letztern über Summirungen von Reihen, und über die Umkehrung der Reihen.

Nicht die Hälfte dieser drey starken Bände betrifft die Logarithmen. Es fehlen darin die merkwürdige Hauptschrift über die Logarithmen, die von dem Erfinder selbst, die von Ursinus, und die Abhandlungen von Briggs, welche vor seiner Arithmetica logarithmica und der Trigonometria Britannica, zwey seltenen Werken, stehen. Eine gute Recension der beiden ersten Theile dieser Sammlung ist in den Göttng. gel. Anzeigen vom J. 1792, St. 119. befindlich.

Von den Logarithmen negativer Größen.

160. Logarithmen als Maßen der Verhältnisse, sind absolute Zahlen, und daher keiner Entgegensetzung fähig. Das Verhältniß 1 : 32 ist das fünffache von dem 1 : 2, oder 1 : 2 ist das fünftheilige von 1 : 32, und der Logarithme jenes zuerst genannten ist das fünffache von dem Logarithmen des andern, oder der Logarithme des zweyten der fünfte Theil von dem des erstern, ohne daß irgend eine Relation der Verhältnißglieder gegen andere Größen eine Modification des Logarithmen hervorbrächte, so wenig als die benannte Einheit, wenn die Zahlen zugleich benannte Größen sind. Eine Verneinung bezieht sich blos auf den bey einer Rechnung zum Grunde gelegten Normalfall, der durch Veränderung der Vorzeichen (+ und —) in einen andern verwandelt wird, s. entgegengesetzte Größen. Würde dieser Fall zum Grunde der Rechnung gelegt, so würde die verneinte Größe positiv. Es muß übrigens durch keine nothwendige Bedingung bey der Frage die Negation unmöglich seyn. Denn so entstünde die Unmöglichkeit von der Sache selbst, nicht von den Logarithmen. Ich wüßte auch keinen Fall, wo Logarithmen als Functionen negativer Größen vorkämen. Der Fall in Eulers Mechanik, T. I.

Digitized by Google

§. 271 ist kein solcher. Wenn ein beweglicher Punct durch den Mittelpunct der Kraft gegangen ist, so ist auf der einen Seite alles wie auf der andern. Es findet hier keine Entgegensetzung Statt. — Sofern die Logarithmen nur Hülfszahlen beym Rechnen sind, geht die Negation der Zahlen sie vollends gar nichts an.

161. Ueber die Möglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen ist dennoch ein Streit zwischen mehrern angesehenen Mathematikern geführt worden, der zwischen den Parteyen nicht zur Entscheidung gekommen ist. Es ist sehr ermüdend, das über diese Streitfrage geschriebene zu lesen. Einen guten Bericht aus den Acten hat Thibaut in einer akademischen Schrift erstattet: Historia controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos. Gottingae 1797. Die ersten, welche die Frage über die Logarithmen negativer Größen unter einander abhandelten, waren Leibnitz und Johann Bernoulli. Der erstere wollte sie nicht für möglich anerkennen, wofür Bernoulli sie hielt. Dieser fand keine Schwierigkeit darin, die logarithmische Linie sich gedoppelt vorzustellen, mit negativen sowohl als mit positiven Ordinaten. Allein alle Zahlen negativ nehmen, ist in der That so viel, als sie alle positiv nehmen. Das Verhältniß $-m : -n$ ist in nichts von dem $+m : +n$ verschieden. Leibnitz erwiederte insbesondere, daß, wenn $\log. -2$ eine mögliche Größe sey, es auch $\frac{1}{2}\log. -2$, das ist, $\log. \sqrt{-2}$ seyn müßte, da doch $\sqrt{-2}$ eine unmögliche Größe ist.

Nach geraumer Zeit ward die Streitfrage von Euler und d'Alembert wieder vorgenommen. Jener leugnete die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen, dieser behauptete sie. Zuerst hatten sie den Streit schriftlich geführt, nachher geschah es öffentlich. Euler zeigte in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1749, daß jeder positiven Zahl unendlich viele Logarithmen zukommen, unter welchen aber nur ein einziger möglicher ist; ferner, daß jeder negativen, so wie jeder unmöglichen, Zahl unendlich viele Logarithmen, die alle unmöglich sind, zuge-

Digitized by Google

hören. Dieses beruht auf dem Grunde, daß eine Wurzel aus einer Zahl so viele Werthe hat, als der Exponent der Wurzel Einheiten enthält; s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra, Th. I. S. 159. oder Integralformel, 46. Die Werthe der nten Wurzel aus + 1 sind in der Formel,

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1},$$

enthalten, die aus — 1 in der Formel,

$$\cos\frac{2k+1}{n}\pi + \sin\frac{2k+1}{n}\pi\sqrt{-1},$$

wo für k alle ganze Zahlen von 1 bis n — 1 nebst 0 zu setzen sind. Nimmt man n unendlich groß, und bezeichnet es durch u, so ist

$$(+1)^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{2k}{u}\pi\sqrt{-1}, \text{ und}$$

$$(-1)^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{2k+1}{u}\pi\sqrt{-1}.$$

Nun ist in dem natürlichen System, wenn z eine Zahl und x der Logarithme derselben ist, $z = \left(1 + \frac{x}{u}\right)^u$; wie es aus der in (28.) gebrauchten Gleichung, $1 + y = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ gleich folgt, wenn p = 1 und für n dessen Werth $\frac{u}{x}$ gesetzt wird. Also ist $z^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{x}{u}$.

Setzt man $z = +1$, so wird $1 + \frac{x}{u} = 1 + \frac{2k}{u}\pi\sqrt{-1}$, das ist $x = 2k\pi\sqrt{-1}$. Hier giebt $k = 0$ für x den Werth 0, als log. (+1); alle andern Werthe von x sind unmögliche. Setzt man $z = -1$, so wird $x = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$, welches immer unmöglich

Digitized by Google

bleibt, da $2k + 1$ nicht $= 0$ wird. — Wenn k unendlich groß, in einem endlichen Verhältnisse zu u genommen wird, so bleiben die zugehörigen Wurzeln aus ± 1 unmöglich. — Da log. N = log. 1 + log. N ist, und log. 1 außer 0 nur unmögliche Werthe hat, so hat log. N auch nur einen einzigen möglichen Werth. Da ferner $-N = (-1)N$ ist, und log. (-1) unmöglich ist, so ist auch log. $(-N)$ unmöglich.

D'Alembert hat seine Gründe für die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen in seinen Opuscules mathématiques, T. I. Mém. VI. vorgetragen. Sie scheinen mir nicht Eulers Beweis zu entkräften. Das wichtigste möchte dieses seyn. In der Gleichung, $y = c^x$, sey $x = \frac{n}{2m}$, wo m und n ungerade Zahlen sind. Dann hat y zwey gleiche, entgegengesetzte Werthe, nämlich $\pm \sqrt{c^{n:m}}$, und die Curve, welcher die Gleichung zugehört, hat auf der negativen Seite der Axe für jedes solches y einen conjugirten Punct. Dergleichen Puncte bilden aber keine stetige Linie, oder man müßte der Basis auch einen negativen Werth geben. Das ist aber, was streitig ist. Deßwegen sagt d'A. auch, daß er dadurch nur zeigen wolle, es sey möglich eine stetige Curve aus conjugirten Puncten zu bilden. Eigentlich wird durch die Annahme einer negativen Basis die ganze Frage geändert. Wenn man -10 statt $+10$ setzt, so wird die Grundreihe diese, $1 : -a : +a^2 : -a^3 +$ etc.

Der Chevalier Daviet de Foncenex suchte in den Miscellaneis Taurinensibus, T. I. Eulers Behauptung durch neue Gründe zu bestärken. D'Alembert setzte ihm wieder Gründe entgegen, in einem Zusatz zu der angeführten Abhandlung, a. e. d. O. Dadurch wurde Foncenex bewogen seine Meynung zu ändern, und der logarithmischen Curve einen doppelten Zweig zuzugestehen.

Gregorio Fontana (Professor zu Pavia) lieferte in die Sammlung: Memorie di Matematica et Fisica

Digitized by Google

della Società Italiana, T. I. 1782 einen Aufsatz über die negativen Logarithmen, worin er Eulers Satz von den unendlich vielen unmöglichen Werthen eines Logarithmen auf eine andere Art bewies, und überhaupt von den Formen unmöglicher Größen durch Logarithmen oder Exponentialgrößen handelt. Er leitet diese Formen aus den Werthen unmöglicher Kreisbogen her, die Th. S. 876 ff. und Th. II. S. 593 f. entwickelt sind. Walmesley hat dieses Verfahren, die Formen der Logarithmen negativer und unmöglicher Größen zu finden, sehr gut und kurz angewandt, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1755. Aus Thibauts Dissertation sehe ich, daß Fontana an Riccati einen Gegner gefunden hat, wodurch Malfatti veranlaßt ist, in dem Giornale de' Letterati Modenese, T. XVI, 1795 einen Versuch zur Beylegung des Streites zu machen.

Weitläuffig hat Karsten diesen Gegenstand untersucht in einer Sammlung mathematischer Abhandlungen, Halle, 1786. S. 285—390. Kürzer hat es Kästner gethan in dem Leipziger Magazin für Mathematik, 4ten St. 1786. S. 531—540. Daraus führe ich noch an: Mallet de Logarithmis Logarithmorum negativorum, in Novis Actis R. S. S. Upsal. V. 1784.

162. Die Seltenheit eines Streites in der reinen Mathematik mag die umständlichere Nachricht von diesem entschuldigen. Walmesley sagt am Schlusse seines kurzen Aufsatzes, daß die Frage, welche der Streit betrifft, gar keinen Grund habe. Er erklärt es für ungereimt, ein Verhältniß zwischen positiven und negativen Größen anzunehmen, da ein Verhältniß sich blos auf die Quantität beziehe. Subtractiv oder additiv seyn, sey eine Beschaffenheit der Größen, welche ihre Zusammensetzung angehe, aber mit ihrem Verhältnisse nichts zu thun habe. Bey jedem Verhältnisse vergleiche man die Quantität nicht die Qualität. Beides mit einander zusammen mengen, sey so viel, als wenn man bey der Vergleichung des räumlichen Inhalts zweyer Körper ihre Dichtigkeit, Weichheit, Gewicht u. dgl. mit aufnehmen wollte.

Digitized by Google

163. Da die Formeln, welche Walmesley und Fontana für unmögliche Logarithmen gebraucht haben, die Sache am faßlichsten machen, so setze ich sie noch her. Es ist (Th. I. S. 876.)

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1};$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}.$$

Daraus folgt

$$\varphi\sqrt{-1} = \log. nat. (\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}).$$

$$-\varphi\sqrt{-1} = \log nat. (\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}).$$

Wird nun der Winkel φ durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben, so hat φ unendlich viele Werthe, und der Logarithme einer Größe von der Form $A + B\sqrt{-1}$ hat unendlich viele unmögliche Logarithmen.

Es sey I. $\cos\varphi = +1$; II. $\cos\varphi = -1$; III. $\sin\varphi = +1$; IV. $\sin\varphi = -1$; so ist

I. $2m\pi\sqrt{-1} = \log. nat. (+1)$.

II. $(2m+1)\pi\sqrt{-1} = \log. nat. (-1)$.

III. $(2m+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} = \log. nat. (\sqrt{-1})$.

IV. $(2m-\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} = \log. nat. (\sqrt{-1})$.

Für m können hier alle ganze Zahlen nebst 0 gesetzt werden. Setzt man in der ersten Formel $m = 0$, so wird $0 = \log. (+1)$. Alle andern Werthe von m geben für $\log. (+1)$ unmögliche Werthe.

Es sey $t = \text{tang}\,\varphi$, so ist (Th. I. S. 877.)

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}, \text{ also}$$

$$2\varphi\sqrt{-1} = l.(1+t\sqrt{-1})^2 - l.(1+t^2).$$

und $l.(1+t\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l.(1+t^2) + \varphi\sqrt{-1}$.

Hier wird der Logarithme einer unmöglichen Größe aus einem möglichen und unmöglichen Theile zusammengesetzt.

Digitized by Google

Darstellung der Logarithmen und Zahlen durch Kettenbrüche.

164. Da log. nat. $(1+y) = y\,(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y^3 - \frac{1}{5}y^4 + \frac{1}{6}y^5 - \text{etc.})$ ist, so läßt sich nach dem in dem Artikel, Kettenbruch, 60. gewiesenen Verfahren diese Reihe in einen Kettenbruch verwandeln. Das geschieht leichter durch unmittelbare Rechnung als nach allgemeinen Formeln, die bald zu verwikkelt werden. Da aus jedem Reste der Divisionen ein Divisor und daraus ein Dividendus wird, so braucht man für alle diese drey Beziehungen die Reihe nur einmahl hinzusetzen, und sie in Gedanken successiv für Rest, Divisor und Dividendus zu nehmen. Die Rechnung selbst, welche ein gutes Übungsexempel ist, braucht hier nicht gemacht zu werden; es genügt die Quotienten von den Divisionen anzugeben. Der Factor y werde abgesondert.

Diese Quotienten sind: I. 1. II. $\frac{2}{y}$. III. 3. IV. $\frac{1}{y}$. V. 5. VI. $\frac{2}{3y}$. VII. 7. VIII. $\frac{1}{2y}$ u. s. w.

Daraus wird der Kettenbruch für log. nat. $(1+y) =$

$$\cfrac{y}{1+\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{3+\cfrac{y}{1+\cfrac{y}{5+\cfrac{3y}{2+\cfrac{3y}{7+\cfrac{2y}{1+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Wo die Quotienten Brüche sind, ist mit dem Nenner der Zähler und der ganze Nenner des Ergänzungsbruches multiplicirt, nach der Vorschrift, Kettenbruch, 26.

Digitized by Google

Das Gesetz, welches die Zahltheile der Nenner beobachten, ist klar genug, nicht dasjenige der Coefficienten von y.

165. Hieraus ergeben sich die angenäherten Werthe für log. $(1+y)$, nämlich I. y. II. $\frac{2}{2+y}$. III. $\frac{6+y}{6+4y}y$. IV. $\frac{6+3y}{6+6y+y^2}y$.

V. $\frac{30+21y+y^2}{30+36y+9y^2}y$.

VI. $\frac{60+60y+11y^2}{60+90y+36y^2+3y^3}y$. u. s. f.

Die Folge dieser Brüche (ohne den Factor y) wird nach den Formeln (Kettenbruch, 4. 5.) jeder aus zwey vorher gehenden leicht gefunden. Nur ist zu merken, daß man mit den Brüchen, woraus folgende sollen bestimmt werden, keine Reductionen vornehmen darf. Es ist deshalb bequem statt $\frac{1}{y}$ zu setzen u. Wenn die Brüche alle gefunden sind, so kann jede dienliche Reduction damit vorgenommen werden. Die Bruchwerthe mit ungeraden Ordnungszahlen sind zu groß, die mit geraden zu klein.

Sollen die Werthe annähernde seyn, so muß y ein eigentlicher Bruch seyn, wie für die Reihe selbst.

166. Auf gleiche Art läßt sich ein Kettenbruch für e^x finden. Es ist

$$e^x = 1+x\left(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{1}{24}x^3+\tfrac{1}{120}x^4+\tfrac{1}{720}x^5+\text{etc.}\right).$$

Hier kommen negative Quotienten abwechselnd mit positiven vor. Weil das Vorzeichen eines Ergänzungsbruchs den ganzen Bruch angeht, (a. a. O. 17.), in dem Nenner aber wieder ein Quotient negativ seyn kann, so ist es, um Verwirrung zu vermeiden, besser, das Vorzeichen der Ergänzungsbrüche selbst durchgehends + seyn zu lassen, d. i. die Einheit positiv zu nehmen, die Negation

Digitized by Google

aber den Quotienten beyzufügen, wo sie Statt hat. Nach Absonderung des Factors x giebt die Reihe in dem Werthe von e^x durch die fortgesetzten Divisionen des jedesmaligen Divisors durch den Rest die Quotienten: I. $+1$. II. $-\frac{2}{x}$. III. -3. IV. $+\frac{2}{x}$. V. $+5$. VI. $-\frac{2}{x}$. VII. -7. u. s. f. Daher ist, wenn die Divisoren x durch Multiplication des Zählers und des Nenners jedes Ergänzungsbruchs mit x weggeschafft werden,

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{-2 + \cfrac{x}{-3 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 + \cfrac{x}{-2 + \cfrac{x}{-7 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Nun mag man auch, wo das Vorzeichen der absoluten Zahl $-$ ist, dieses mit $+$ vertauschen, wogegen aber der Zähler und der zweyte Theil des Nenners auch ihr Vorzeichen ändern. So wird

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{7 - \text{etc.}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Man wird finden, daß dieses mit dem (a. a. O. 17.) gewiesenen Verfahren übereinkommt. Das Gesetz der Formation ist hier ganz einfach und offenbar.

167. Die annähernden Werthe von e^x sind:

I. $1+x$. II. $1+\frac{2}{2-x}x$. III. $1+\frac{6+x}{6-2x}x$.

IV. $1+\frac{12}{12-6x+x^2}x$. V. $1+\frac{60+6x+x^2}{60-24x+3x^2}x$.

VI. $1+\frac{120+2x^2}{120-60x+12x^2-x^3}$. u. s. f.

Man muß auch hier bemerken, daß um die Annäherungswerthe nach der Reihe zu finden, keine Reduction der Brüche vorgenommen werden darf, auch keine durchgängige Vertauschung der Vorzeichen im Zähler und im Nenner. Der zweyte Annäherungswerth ist (ohne den Factor x) zufolge der zweyten Formel in Kettenbruch, 4, dieser, $\frac{-2u}{-2u+1}$, wenn $x=\frac{1}{u}$ gesetzt wird. In diesem multiplicirt man Zähler und Nenner durch den dritten Quotienten, — 3, und addirt in jenem den Zähler des ersten Werthes $\frac{1}{1}$, in diesem den Nenner desselben, so ist der dritte Annäherungswerth $\frac{6u+1}{6u-2}$. So verfährt man weiter nach den Formeln a. a. O. 4 oder 5.

168. Man nehme x negativ, so verwandelt sich e^x in $\frac{1}{e^x}$, und in dem Kettenbruche ist $-x$ anstatt $+x$ zu setzen. Dividirt man die Einheit sowol durch $\frac{1}{e^x}$ als durch den Kettenbruch, so wird erhalten,

Digitized by Google

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Diese Reihe findet man auch unmittelbar durch Verwandlung der ganzen Reihe,

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$

in einen Kettenbruch.

169. La Grange leitet diese Kettenbrüche aus dem für eine Potenz $(1+x)^m$ gefundenen her, s. Kettenbruch, 59. Es ist nämlich die Gränze von $(1+x)^m$, wenn m unendlich klein gesetzt wird, $1 + m \log.(1+x)$. Setzt man nun in der Formel für $(1+x)^m$ a. a. O. den Exponenten m unendlich klein, so hebt sich die Eins auf beiden Seiten, auch der Factor m. Läßt man in allen einzelnen Brüchen m als unendlich klein weg, so wird der Kettenbruch für log. nat. $(1+x)$ erhalten.

Wenn man in der Potenz $(1+x)^m$ anstatt x setzt $\frac{x}{m}$, und m unendlich groß nimmt, so ist $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$. Man setze nun in dem Ausdrucke der Potenz $(1+x)^m$ durch einen Kettenbruch m unendlich groß, und schaffe es durch die Division jedes Zählers und ganzen Renners in jedem Ergänzungsbruche heraus, so wird der Kettenbruch für e^x erhalten.

170. Die erste der hier gebrauchten Formeln wird aus der Gleichung $1 + y = 1 + \log.(1+y) + \frac{1}{2}(l.(1+y))^2 + \text{etc.}$ (29.) erhalten. Die

Digitized by Google

Gränze von $1+y$, für unendlich abnehmende y ist hieraus $1+\log.(1+y)$. Setzt man $(1+x)^m = 1+y$, so ist die Gränze von $(1+x)^m$ diese: $1+\text{m l.}(1+x)$.

Die zweyte Gränzgleichung folgt aus der in (28.) gebrauchten Gleichung, $a^x = \left(1+\frac{p}{n}\right)^u$, oder $a^x = \left(1+\frac{px}{u}\right)^u$, wenn e statt a, und bey einem unendlich großen u für p die Gränze 1 gesetzt wird.

Logarithmische oder **logistische Linie** ist die krumme Linie, an welcher die Ordinaten in geometrischer Progression sind, wenn die zugehörigen Abscissen in arithmetischer Progression genommen werden.

1. Es sey (Fig. 116.) XAX' die Abscissenlinie, auf welcher der Anfang der Abscissen in A ist, und AB eine willkürlich zu bestimmende Ordinate, senkrecht auf jene, wie alle. Die Abscissenlinie werde in eine Menge gleicher Theile getheilt, deren einer PQ ist. Durch die Theilungspuncte ziehe man Ordinaten, die eine geometrische Progression bilden, mit irgend einem Exponenten. Die erste AB sey a; die folgenden seyn b, c, d, e, f, etc. Da $a:b = b:c = c:d$ u. s. f. ist, so ist, wenn die Progression eine zunehmende ist, $a:b - a = b:b-c = c:c-d$, u. s. f. Man nehme zwey Ordinaten, PM und QN in einem gegebenen Abstande PQ, ziehe Mm parallel mit PQ, so ist das Verhältniß PM : Nm für jede zwey Ordinaten in demselben Abstande wie PQ dasselbe oder ein gegebenes, so wie das der Ordinaten PM, QN auch ein gegebenes ist.

2. Man ziehe durch die Puncte M, N eine gerade Tt, welche die Abscissenlinie in T schneide. Es ist nun Nm : Mm = MP : PT, oder Nm : MP = PQ : PT. Folglich ist PQ : PT ein gegebenes Verhältniß, und daher ist für eine gegebene PQ auch PT eine gegebene oder unveränderliche Linie.

3. Die Linie PT oder die Subsecante verändert sich bey verändertem Abstande der Ordinaten. Nimmt man

Digitized by Google

die Abstände unendlich klein, so verwandelt sich die Subsecante in die Subtangente.

4. Die logarithmische Linie ist also diejenige Curve, an welcher die Subtangente eine unveränderliche Größe ist. Der allgemeine Ausdruck für die Subtangente ist $t = \frac{y\,dx}{dy}$ (berührende Linie, 13.). Es ist also an der logarithmischen Linie $\frac{y\,dx}{dy} = M$, wo M eine unveränderliche gerade ist. Oder es ist $dx = M.\frac{dy}{y}$.

5. Dieses folgt auch aus dem Ausdruck für die Subsecante. Es sey $AP = x$; $PQ = \Delta x$; $PM = y$; $Nm = \Delta y$, und die Subsecante $= S$, so ist $S = \frac{y\Delta x}{\Delta y}$. Die Gränze von S ist die Subtangente M, die Gränze von $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ist $\frac{dx}{dy}$.

6. Die logarithmische Linie stellet durch ihre Coordinaten ein gewisses logarithmisches System dar. So wie in einem logarithmischen System die Unterschiede der Logarithmen zu den Gliedern gleicher Verhältnisse gleich groß sind, so sind an dieser Curve die Abstände zweyer Ordinaten, deren Verhältniß dem von PM : QN gleich ist, durchgehends dem Abstande PQ gleich. Durch zwey Ordinaten PM, QN und den Abstand PQ wird die ganze Curve bestimmt, eben so wie z. B. durch das Verhältniß 3 : 4 und den Unterschied der zugehörigen Logarithmen, 0,1249388 ... das briggische System; durch den Unterschied 0,2876821 ... das natürliche System sich ergiebt. Die Subtangente an der Curve ist der Modulus des durch sie dargestellten Systems. Denn an der Curve ist die Subtangente $= \frac{y\partial x}{\partial y}$, und in dem logarithmischen System ist $\partial x = M\frac{\partial y}{y}$.

Digitized by Google

7. In dem Artikel, Logarithmus, 23. setze man $n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{S}$. Hier ist $a^{\frac{1}{n}}$ das erste Glied nach 1 in der erweiterten Reihe, und $\frac{1}{n}$ der Abstand beider, da 1 der Abstand der Basis a von 1 ist. Setzt man AB = 1; PQ = $\frac{1}{n}$; $a^{\frac{1}{n}}$ = der Ordinate nach AB in diesem Abstande, so ist S die Subsecante. Denn es ist $a^{\frac{1}{n}} - 1 : \frac{1}{n} = 1 : S$. Da die Subtangente die Gränze der Subsecante S ist, und $\frac{1}{M}$ die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ oder von $\frac{1}{S}$, so ist M gleich der Subtangente, wenn AB zur Einheit genommen wird.

8. Auf der Seite, nach welcher die Ordinaten zunehmen, entfernt sich die Curve ins Unendliche hin von der Abscissenlinie, auf der andern, wo die Ordinaten abnehmen, nähert sie sich derselben, so daß diese hier ihre Asymptote ist.

9. An der Parabel ist die Subnormale unveränderlich, und ihrem halben Parameter gleich (berühr. Linie, 43). Dieser Umstand giebt eine artige Verbindung der Parabel mit der logarithmischen Curve an die Hand.

Es sey Ll (Fig. 117.) eine logarithmische Linie zu der Abscissenlinie XX', und MP eine Ordinate. Die berührende in M sey MT, also die Subtangente PT. Man ziehe MN senkrecht auf TM, so ist PT : PM = PM : PN. Man setze PT = ½a, so ist PN = $\frac{2yy}{a}$, wenn PM = y ist. Man halbire PN in V, so ist

Digitized by Google

$PV = \frac{yy}{a}$. Also ist M ein Punct einer Parabel, deren Parameter $= a$, und Scheitel V ist, und welche in M die logarithmische Linie unter einem rechten Winkel schneidet. Verschiebt man diese Parabel, so daß ihre Axe immer auf der Abscissenlinie XX' bleibt, so schneidet sie die logarithmische Linie beständig rechtwinklicht.

10. Umgekehrt verschiebt man die logarithmische Linie, deren Subtangente $= \frac{1}{2} a$ ist, sich selbst parallel, bey derselben Abscissenlinie, so schneidet sie die Parabel, VMv, deren Parameter a ist, über derselben Abscissenlinie, durchgehends rechtwinklicht.

11. Der Flächeninhalt zwischen zwey Ordinaten ist leicht gefunden. Das Differential der Area ABMP (Fig. 116.) ist $= y\partial x = M\partial y$, also die Area $= M$ (const. $+ y$). Man setze AB $= a$, so ist, wenn die Area bey AB anfängt, dieselbe $= M(y - a)$, dem Rechteck von der Subtangente in den Unterschied der AB, und der Ordinate. Überhaupt ist die Area zwischen zwey Ordinaten gleich dem Rechteck von der Subtangente in ihren Unterschied.

12. Die unendlich lange Area von AB längs der Abscisse AX' auf der Seite der abnehmenden Ordinaten ist so groß als das Rechteck von AB in die Subtangente.

13. Der körperliche Raum zwischen den Kreisflächen mit den Halbmessern AB und PM; und der von BM durch die Umdrehung um die Axe der Abscissen beschriebenen Fläche ist $= \frac{1}{2} M\pi(y^2 - a^2)$, wo man auch anstatt der Ordinate AB jede andere nehmen kann. Es ist nämlich das Differential des Raumes von der Kreisfläche durch AB bis zu der durch MP $= \pi y^2 \partial x$ (Cubirung), das ist $M\pi y\partial y$; davon das Integral $= \frac{1}{2} M\pi y^2 +$ const. Damit es bey AB anfange, muß const $= -\frac{1}{2} M\pi a^2$ seyn.

14. Der unendlich lange runde Körper, der von dem unendlich langen Bogen Bs, auf der Seite der

Digitized by Google

abnehmenden Ordinaten beschrieben wird, ist $= \frac{1}{2}\pi M a^2$.

15. Edmund Gunter (Logarithmus, 130.) soll die logarithmische Linie angegeben haben; allein in der Sammlung seiner Schriften findet sich nichts davon. Vermuthlich ist es ein Mißverstand. Gunter hat die Logarithmen der Zahlen, Sinus und Tangenten auf einen Maßstab, in England Gunter's scale genannt, zum leichtern Gebrauch für Ungeübte getragen. Die erstere dieser Linie heißt auch die logarithmische Linie. Huygens hat der in diesem Artikel betrachteten Curve ihren Namen gegeben, sagt aber, daß sie schon von andern untersucht sey. Dissert. de causa gravitatis, wo er am Ende die Eigenschaften dieser Linie aufführt.

Logarithmischer Maß- oder Rechenstab ist eine eingetheilte Länge, auf welcher die Theile, von dem Anfangspuncte an, die Logarithmen der zu den Theilungspuncten gesetzten Zahlen sind. Anstatt der Zahlen lassen sich auch die Winkel setzen, deren Sinus oder Tangenten die correspondirenden Längen zu Logarithmen haben.

A	Q	M	N	P	B
1	$\frac{n}{m}$	m	n	mn	1000

Es ist nach irgend einem gleichtheiligen Maßstabe AB der Logarithme von 1000; AM der Logarithme der Zahl m, AN der Zahl n. Trägt man AN von M nach P, so befindet sich bey P das Product $m \times n$; trägt man MN von M nach Q, so steht bey Q der Quotient $\frac{n}{m}$. Hieraus sieht man leicht, wie mittelst eines solchen Rechenstabes Multiplicationen und Divisionen vorgenommen werden können.

Es sey AB = log. rad; AM = log. sin α; AN = log. sin β; AQ = log. sin γ, so werden bey B,

Digitized by Google

M, N, Q die Winkel 90°, α, β, γ beygezeichnet. Ist nun rad : sin α = sin β : sin γ, so ist AB — AM = AN — AQ, oder MB = NQ, oder BN = MQ, wodurch also aus α und β der Winkel γ sogleich gefunden wird. Auf gleiche Art werden die Tangenten gebraucht, nur kommt zu AB als Radius der Winkel von 45°.

Diese logarithmischen Rechenstäbe hat zuerst Edmund Gunter, wie gleich vorher schon angeführt ist, angegeben. Er beschreibt den mannichfaltigen Gebrauch in einem besondern Buche: The cross-staff, welches in einer Sammlung seiner Werke, 5te Ausg. London 1673, befindlich ist. Wingate, um 1627, zeichnete den logarithmischen Maßstab auf zwey Stäben, die neben einander verschoben werden können, um den Gebrauch des Zirkels zu ersparen. Oughtred, um dieselbe Zeit, trug denselben auf concentrische Kreise; Milburne, um 1650, gab denselben eine spiralische Form. In Deutschland beschrieb Scheffelt den logarithmischen Rechenstab nebst andern ausführlich in einem Buche: Neu erfundener Maßstab, Ulm, 1699. 4to. Von Lambert ist eine kleine Schrift: Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe, Augsburg 1761. Sie dient zur Erklärung der von Brander verfertigten Rechenstäbe. Die Stäbe sind gedoppelt, um sie neben einander hin und her schieben zu können. Die Beyspiele zu dem Gebrauche sind sehr brauchbar. Diese Rechenstäbe, wenn ein guter Rechner gleich ihrer gar nicht bedarf, sind doch für Anfänger sehr dienlich, um die logarithmischen Rechnungen desto besser einzusehen, und sich geläufig zu machen.

Logistica bedeutet bey den Alten im Gegensatze gegen Arithmetik die Anwendung der abstracten Rechenkunst auf die Vergleichung der Größen in der Geometrie, Astronomie, der Musik und im gemeinen Leben. Der Logistiker, sagt Proklus (Cap. XIII. in I. L. Eucl.)

Digitized by Google

betrachtet nicht die Verbindungen (πάθη) der Zahlen an sich, sondern an sinnlichen Gegenständen, von welchen er ihnen auch Namen beylegt. Plato unterscheidet in dem Dialog, Gorgias, Arithmetik und Logistik; beide beschäftigen sich mit dem Geraden und Ungeraden, die letztere noch dazu mit der Berechnung und Vergleichung der Menge. Bey den Neuern bedeutet Logistik auch die Theorie der gemeinen Arithmetik oder selbst die Algebra. Barlaam, ein Mönch aus Calabrien im 14ten Jahrhundert, hat die Beweise der gemeinen Rechnungen mit ganzen Zahlen, gewöhnlichen und sechzigtheiligen Brüchen in einer griechisch verfaßten Schrift, mit dem Titel, Logistik, vorgetragen, welche zu Paris 1600. 4 von Chambers herausgegeben ist. Vieta gebraucht für algebraische Rechnungen die Benennung, Logistica. Die Buchstabenrechnung heißt auch bisweilen Logistica speciosa.

Logistische Logarithmen sind Logarithmen, die zur Rechnung mit sechzigtheiligen Brüchen besonders eingerichtet sind. Sie sind der Überschuß des Logarithmen von 3600 Secunden über den Logarithmen der gegebenen Zahl von Secunden. Der Logarithme von 3600″ ist 3,55630. In einer Tafel der logistischen Logarithmen stehen in der obersten Zeile die Minuten nach der Reihe, von 1 bis 60, auch noch weiter, und in der ersten Columne die Secunden; in dem zu einer Zahl von Minuten und Secunden gehörigen Winkelfache ist der logistische Logarithme verzeichnet. Z. B. zu 25′ 24″ gehört der logistische Logarithme 3733, wobey die Charakteristik 0 weggelassen ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \text{l. } 3600 &= 3{,}55630 \\ \text{l. } 1524 &= 3{,}18298 \\ \hline & 0{,}37332 \end{aligned}$$

Digitized by Google

Diese Logarithmen brauchen nur bis auf die vierte Decimalstelle gesucht zu werden. Die Tafel der logistischen Logarithmen liefert dieselben zugleich für Zahlen, wenn man diese als eine Anzahl Secunden betrachtet, und die Minuten davon absondert, soweit nämlich als die Tafel geht.

Der Gebrauch ist, den Proportionaltheil zwischen zwey Zahlen, welche aus astronomischen Tafeln unmittelbar gegeben werden, leicht zu finden. Ein Proportionssatz enthält entweder in allen Gliedern Minuten und Secunden, oder diese nur in zweyen, in den beiden andern aber absolute Zahlen. Z. B.

60′ 0″	. . . .	0,0000
: 46′ 12″	. . . .	0,1135
= 8 7	. . . .	0,8688
: 6 15	. . . .	0,9823

Wenn 60′ das zweyte Glied sind, so wird der Logarithme des ersten Gliedes, wie allemal, abgezogen, oder das arithmetische Complement addirt. Z. B.

46′ 12″	:	60′ 0″	=	6′ 15″	:	8′ 7″
9,8865	|	0,0000	|	0,9823	|	0,8688

Die große Charakteristik 9 zeigt an, daß 10 zu subtrahiren sind, daher bey der Addition die hervorgehenden 10 weggeworfen werden.

Auf gleiche Art verfährt man, wenn absolute Zahlen vorkommen. Z. B.

60′	:	1531	=	46′ 12″	:	1179
0,0000	|	0,3713	|	0,1135	|	0,4848

Wo Stunden und ihre Minuten vorkommen, nimmt man die Stunden als Bogen-Minuten, und ihre Minuten als Bogen-Secunden an. So haben 24 St. den logistischen Logarithmen 0,3979 wie 24′ eines Grades; und 8 St. 7′ den logist. Log. 0,8688, wie 8′ 7″ eines Grades.

Digitized by Google

Die logistischen Logarithmen ersparen die Reduction auf Secunden (der Stunden auf Minuten); und die Addition oder Subtraction eines beständigen Logarithmen.

Die logistischen Logarithmen sind von Kepler eingeführt. Sie finden sich in seinen Tabulis Rudolphinis, sowol für Stunden und Minuten, als für Minuten und Secunden. Auch sind darin die Ganzen mit den Sexagesimaltheilen beygefügt, welchen jene Logarithmen als negativ zukommen. Es ist z. B. der Quotient von 60^2 dividirt durch $4^1 15^{11} = 14^0 7^1 4^{11}$, wo der Circellus Ganze anzeigt. Noch sind beygefügt die Winkel, zu deren Sinus die logistischen Logarithmen gehören. Die Logarithmen sind Neperische. In Callets Ausgabe logarithmischer Tafeln gehen die Minuten bis zu 80, oder die Secunden bis zu 5280. Die Logarithmen über den von 3600 sind negative, mit der Charakteristik 9, der Gleichförmigkeit wegen, da die Logarithmen der Zahlen unter 3600 von dem Logarithmen dieser Zahl abgezogen sind. So ist hier für log. 5280 angesetzt 8337, das ist 9,8337, oder log. 3600 — log. 5280.

Die in logarithmischen Tabellen verfaßte Sexagen-Rechnung von M. Joh. Jac. Zimmermann, Hamburg 1691, begreift dreyerley logistische Logarithmen. Erstlich, die Logarithmen der auf Secunden reducirten Grade, Minuten und Secunden; zweytens, die arithmetischen Complemente der logistischen Logarithmen, nach der obigen Erklärung; drittens, logistische Logarithmen für Stunden und Minuten in Beziehung auf die Zahl $1440 = 24 \cdot 60$, so daß die Complemente der Logarithmen von den Quotienten der Zahl 1440 durch die Minutenzahl angegeben sind. Diese Tafeln verdienen wieder in Erinnerung gebracht zu werden.

Logistische Linie, s. Logarithmische Linie.

Logistische Spirale, s. Spirale.

Longimetrie heißt in einigen Schriften derjenige Theil der praktischen Geometrie, welcher die Methoden

Digitized by Google

zur Ausmessung gerader Linien lehrt, in horizontaler, geneigter oder lothrechter Richtung.

Loxodromische Linie ist die gedoppelt krumme Linie auf einer Kugelfläche, welche alle, aus einem Pole gezogenen größten Kreise unter demselben Winkel schneidet. Anstatt einer Kugel kann auch ein elliptisches Sphäroid genommen werden. Ihr Gebrauch ist in der Schifffahrt. Sie ist als Beyspiel in dem Artikel, Krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 17. gebraucht. Leibnitz nennt sie die linea rhombica. Acta Er. 1691. Opp. T. III. p. 243.

Lunula, auch **Meniscus** (Μηνίσκος), mondförmiger Flächenraum, ist der zwischen zwey Kreisbogen, die nach derselben Seite hin hohl sind, beschlossene Raum. Unter gewissen Bestimmungen ist eine Lunula oder die Summe zweyer quadrirbar.

1. Es ist ACB (Fig. 118.) ein Halbkreis, in welchem das rechtwinklige Dreyeck ACB eingezeichnet ist. Ueber den Katheten AC, BC beschreibe man die Halbkreise ADC, BEC. Die Flächen der drey Halbkreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, weil sie zu denselben ein bestimmtes Verhältniß haben (Quadratur). Es ist also $ADCA : BECB = AC^2 : BC^2$, und daher $ADCA + BECB : ADCA = AC^2 + BC^2 : AC^2 = AB^2 : AC^2$. Da nun ist $ACBA : ADCA = AB^2 : AC^2$, so ist die Summe der beiden Halbkreise über AC und BC gleich dem Halbkreise ACBA. Zieht man beiderseits die Segmente AdC, BeC ab, so bleibt die Summe der beiden Monde gleich dem Dreyeck ACB.

2. Macht man AC = BC, so sind die beiden Monde einander gleich, und jeder ist gleich der Hälfte des gleichschenkligen Dreyecks über AB.

3. Es sey ADBEA (Fig. 119.) ein Kreis über dem Durchmesser AB aus dem Mittelpuncte C beschrie-

Digitized by Google

ben, und DCE ein Durchmesser senkrecht auf AB. Aus E beschreibe man mit dem Halbmesser AE einen Kreisbogen AFB, so ist dieser ein Quadrant, weil AEB ein rechter Winkel ist. Die ganzen mit AC und AE beschriebenen Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, das ist, wie 1 : 2, also ist der Halbkreis ADBA gleich dem Quadranten AEBFA. Von beiden nehme man das Segment ABFA weg, so bleibt die Lunula ADBEA gleich dem Dreyeck AEB.

Dieses ist zwar nur ein veränderter Beweis des gleich vorher gefundenen Satzes. Er führt aber auf die Quadratur gewisser Abschnitte der Lunula.

4. Man ziehe aus dem Puncte E irgend eine gerade EG an den Halbkreis ADB, welche den Quadranten AFB in H schneide; auch werde CG gezogen. Es ist Sect. ACG : Halbkreis ADBA = ACG : 2R, und Sect AEH : Quadr. AFBE = AEH : R. Nun ist ACG = 2 AEH, also sind diese beiden Verhältnisse sich gleich. Da gleich vorher gezeigt ist, daß ADBA dem Quadranten gleich ist, so ist Sect. ACG = Sect. AEH. Nimmt man beiderseits das Trilineum AKH weg, so bleibt das Trilineum AHG + ΔGCK = ΔAEK, oder es ist Trilineum AHG = ΔAEK — ΔGCK, also quadrirbar.

5. Das Dreyeck GCK verhält sich zu ECK wie GK : EK. Man nehme auf AK den Theil KL so, daß KL : KC = GK : EK sey, und ziehe EL, so ist das ΔLEK = ΔGCK, und ΔAEL = Trilineum AHG.

Ich weiß nicht, ob diese Quadratur schon bemerkt sey. Hutton führt in seinem Wörterbuche eine andere an, welche ich hier mit einiger Abänderung des Beweises mittheile.

6. Es seyn wie vorher, EG, CG gezogen. Man nehme den Bogen HN = AH, und ziehe AN und EN, so ist der W. AEN = ACG, und der Sect. ACG ist ähnlich dem Sect. AEN. Beide verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, das ist wie 1 : 2. Da die Dreyecke ACG und AEN sich auch so verhalten, so

Digitized by Google

verhalten sich die Segmente über AG und AN wie 1:2, und es ist das Segment AG gleich dem Trilineum AHM, wo M der Durchschnitt der AN mit EH ist. Folglich ist das Trilineum AGH = Δ AGM.

7. Die Quadratur der ganzen Lunula hat Hippokrates aus Chios gefunden. Proklus eignet ihm diese Erfindung zu (Comm. in I. Eucl. ad prop. 1.), und rühmt von ihm, daß er vieles andere in der Geometrie erfunden habe. In dem zweyten Buche, Cap V. seines Commentars eignet er die Quadratur der Lunula dem Oenopides aus Chios zu, gleich darauf aber auch dem Hippokrates aus Chios. Jenes ist ohne Zweifel ein Einschiebsel. Man mag über diese literarische Frage nachsehen eine Abhandlung von Heinius, in den Mém. de l'Acad. de Berlin. T. II. a. 1746, und von Cramer, eb. das. T. IV. a. 1748. Jener Gelehrte stimmt für Oenopides, dieser für Hippokrates. Von Hippokrates ist einiges angeführt in dem Artikel, Geometrie, Th. II. 318. Er ist etwas älter als Plato.

M.

Magisches Quadrat, s. Quadrat.

Magister Matheseos, ein Ehrenname, wodurch der pythagoräische Lehrsatz von dem rechtwinkligen Dreyeck in der Elementar-Geometrie ausgezeichnet wird.

Mangelhafte Zahl, s. deficiens numerus. Th. I. S. 719.

Maß ist diejenige Größe, welche als Einheit zur Darstellung der Quantität solcher Größen gebraucht wird, die ursprünglich keine discrete Größen, wie Zahlen, sind, nämlich bey Linien, Flächen, Körpern, Winkeln und Verhältnissen, auch bey Zeiten, Kräften und Massen. Jede dieser Arten von Größen wird durch eine ihr gleichartige gemessen, die ganz willkürlich ist, und durch ihren

Digitized by Google

Namen angegeben wird. So werden Linien durch irgend eine angenommene Linie, die man Linie, Zoll, Fuß, Elle, Metre, Yard, Klafter, Ruthe, Meile nennt, gemessen. Flächen werden am gewöhnlichsten durch das Quadrat der Längen-Einheit gemessen, auch wol durch eine der Fläche ähnliche oder sonst übereinstimmende Figur, zum Beyspiel eine Kreisfläche durch eine andere, da Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Eben so werden Körper meistens durch den Würfel der Längen-Einheit gemessen, aber auch durch Körper, die ihnen entweder ähnlich sind, oder zu derselben Gattung gehören. Für Kugeln kann man bequem eine Kugel zur Einheit nehmen, wie es in der Artillerie wirklich geschieht; für Cylinder einen Cylinder, wie beym Visiren der Fäßer; für Parallelepipeda ein anderes von gegebener Länge, Breite und Höhe. So gebraucht man bisweilen Schachruthen, die eine Ruthe lang und breit, und einen Fuß hoch sind; auch Balkenruthen, die eine Ruthe lang, und einen Fuß breit und hoch sind. Auf ähnliche Art gebraucht man auch für Flächen eine Riemenruthe, eine Ruthe lang und einen Fuß breit.

Winkel sind eine eigenartige Größe, die man bald durch einen rechten Winkel, als Einheit, mißt, am gewöhnlichsten durch Grade, die der 90ste Theil eines rechten Winkels sind. Ein Grad wird in 60 Theile oder Minuten, eine Minute in 60 Secunden, eine Secunde in 60 Tertien, oder gewöhnlicher in Decimaltheile getheilt. Gellibrand war der erste, der den Grad in 100 Theile theilte. Die Theilung des rechten Winkels in 90 Grade behielt er noch bey. Die französischen Geometer unserer Zeit suchen die Eintheilung des Quadranten in 100 Theile einzuführen. Der Centesimalgrad wird in 100 Minuten, die Centesimalminute in 100 Secunden getheilt.

Verhältnisse werden durch ein Grundverhältniß mittelst der Zusammensetzung und Theilung gemessen, wie in dem Artikel, Logarithmus, gezeigt ist. Die Größe eines Verhältnisses wird durch den Unterschied der Logarithmen

Digitized by Google

der Glieder angegeben. Dieser Unterschied ist absolut verschieden, nach der Beschaffenheit des Systems, woraus die Logarithmen genommen werden. Das natürliche System ist das einfachste, das briggische aber zum Rechnen das bequemste.

Zeiten und Kräfte mögen als Größen betrachtet werden, so fern sie durch ausgedehnte Größen sich darstellen und vergleichen lassen. Die natürliche Einheit für Zeiten ist entweder die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe, oder die Zeit eines mittlern Sonnentages, die letztere am bequemsten zur Verbindung mit der bürgerlichen Zeitrechnung, jene zur Bestimmung des Unterschiedes der Rectascensionen der Himmelskörper. Die Eintheilung des Tages in 24 Stunden möchte man beybehalten; allein die Centesimaltheilung der Stunden würde viel bequemer seyn, als die Sexagesimale, wenigstens für Astronomen.

Beschleunigende Kräfte werden gemessen durch die Höhe des freyen Falles in einer Secunde (oder einer andern unveränderlichen Zeit-Einheit) von der Ruhe an, so fern die beschleunigende Kraft während dieser Zeit unverändert bliebe. Diese Fallhöhe ist auch die Vergrößerung des geradlinichten Raumes, den ein Körper nach der Richtung der beschleunigenden Kraft beschreibt, über denjenigen, den er gleichförmig beschreiben würde, wenn die Wirkung der beschleunigenden Kraft in dem obigen Zeittheile ganz gehemmt würde.

Massen, als etwas Ausgedehntes mit Wirksamkeit verbunden, sind nicht mehr blos Größen. Nur wenn sie gleichartig sind, kann man einen körperlichen Raum für sie zum Maße nehmen. Bey ungleichartigen Massen ist das Verhältniß zweyer das umgekehrte der Arme eines Hebels, an welchem sie sich das Gleichgewicht halten. Die Massen der Himmelskörper werden aus ihren Wirkungen auf andere hergeleitet.

Die Verschiedenheit der Maßen, welche oft in derselben Provinz Statt findet, hat schon lange den Wunsch

Digitized by Google

veranlaßt, daß ein allgemeines Maß eingeführt werden möchte. Dieses geht eigentlich die Längenmaßen an, von welchen die Flächenmaßen meistens, zum Theil auch die körperlichen abhangen. Mouton, ein Astronom zu Lyon im 17ten Jahrhundert, schlug dazu die von ihm sogenannte virgula geometrica vor, eine Länge, deren ein Grad der Erde 600000 enthalten sollte. Um die Länge desselben auf immer unverändert zu erhalten, bemerkte er, daß ein Pendel von dieser Länge in einer halben Stunde 3959⅘ Schwingungen mache. Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium. Lugd. 1670. Dieses Fußmaß ist wenig mehr als ein halber französischer Fuß, da ein mittlerer Grad 342049 Fuß enthält. Picard that um dieselbe Zeit in der Schrift über die Messung der Erde den Vorschlag, den dritten Theil der Pendellänge für eine Secunde mittlerer Zeit zum allgemeinen Fuß zu nehmen. Huygens, welcher an den Gewichtuhren das Pendel anbrachte, zeigte, daß dadurch die Länge eines einfachen Secundenpendels gefunden werden kann. Den dritten Theil derselben schlug er auch zum allgemeinen Fuße vor, als ein Maß, das an jedem Orte und zu jeder Zeit gefunden werden könnte. (Horologium oscill. Prop. 25.) Er wußte noch nicht, daß die Secundenpendel in verschiedenen geographischen Breiten etwas verschieden ausfallen. Nach Huygens Rechnung verhielte sich der Pariser Fuß zu diesem neuen wie 864 zu 881. Die königliche Gesellschaft zu London fand den Vorschlag annehmlich. Auch Amontons (Mém. acad. 1703.) wiederholte den Vorschlag. Bouguer (Fig. de la terre, p. 300.) wollte die Länge des Secundenpendels in der Breite von 45° zum allgemeinen Maße gemacht haben, weil dieses eine mittlere Länge hat, auch am leichtesten und sichersten beobachtet werden kann. Du Fay hatte schon von dem Minister die Genehmigung eines Entwurfs zu einer Verordnung erhalten, welche durch den Tod beider nicht zur Ausführung kam. De la Condamine trug die Sache wieder vor, in den Abhandlungen der Akademie 1747.

Digitized by Google

Er behauptete, daß die Pendellänge unter dem Aequator die vorzüglichste sey, weil kein Land daran mehr Ansprüche als das andere machen kann. Diese Länge beträgt 36 Z. 7 Lin. $\frac{44}{100}$ Par. Fuß, nach der in Peru gebrauchten Toise. Der dritte Theil ist 12 Z. 2 Lin. $\frac{84}{100}$, wenig von dem sonst üblichen Fuße verschieden.

Die neue französische Regierung beschloß den 1. Aug. 1793, ein neues System von Maßen und Gewichten in ganz Frankreich gleichförmig einzuführen. Dieses erhielt durch das Decret vom 8ten Germinal des J. III. (7ten April 1795) seine völlige Bestimmung. Das Grundmaß, worauf in diesem System alles beruht, ist das Metre. Es sollte der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erdmeridians seyn. Alle Längenmaßen wurden daraus nach der Fortschreitung mit Zehn abgeleitet, und bekamen Namen, die aus dem Lateinischen oder Griechischen hergeleitet sind: Decimetre, Centimetre, Millimetre, das ist $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ des Metre. Ferner Dekametre, Hektometre, Kilometre, Myriametre, das ist 10; 100; 1000; 10000 Metres. — Das Quadrat des Decametrs ward Are genannt, welches als Einheit bey Feldvermessungen dienen sollte, und nächstens 948 Quadratfuß enthält. Theile desselben sind: Deciare und Centiare oder Quadratmetre. Vielfache: Dekare, Hektare, Kilare, Myriare. — Der Würfel des Metre hieß Stere, und war besonders zum Maße für Brennholz bestimmt. Es hält 29, 2 Cubikfuß. Ein anderes Gemäß für flüssige oder trockene Materien ward Litre genannt, der Würfel des 10ten Theils eines Metre, gleich 50,46 Cubikzoll. — Die Einheit für die Gewichte, welche Gramme genannt ward, ist das Gewicht von dem Würfel des hundertsten Theils des Metre an destillirtem Wasser, wenn dieses am dichtesten ist, nämlich bey 4 Grad des hunderttheiligen Thermometers über dem Gefrierpuncte. Das französische Pfund (poids de marc) enthält 489½ Grammen. Ein Kilogramme ist sehr nahe 2 Pfund gleich.

Digitized by Google

Um die Länge des Metre auf das genauste zu bestimmen, ward eine neue Messung des Meridianbogens, der durch die Pariser Sternwarte geht, von Dünkirchen an, über die Gränzen des Reichs bis Barcelona unternommen, mit viel genauern Werkzeugen als bey den vorigen Messungen gebraucht waren, auch mit einer ungleich größern Genauigkeit sowol in der Messung selbst als in den Berechnungen. Die Vergleichung der mittlern Länge eines Grades auf diesem Bogen mit derjenigen auf dem in Peru ehedem gemessenen gab die Länge des Quadranten eines für elliptisch angenommenen Meridians 5130740 Toisen. Das Metre ist also 0,5130740 Toisen, oder 443,296 Lin. Dieses ist das Mètre définitif, welches von dem durch die vorher angeführten Decrete provisorisch bestimmten Metre, 443,44 Lin. zu unterscheiden ist. Dieses gründete sich auf die damals angenommene Größe des Meridiangrades. Ein Exemplar des Metre nach der zu den Messungen gebrauchten Toise, nebst einem Exemplar des Kilogramme, wurden der Regierung in einem Behältnisse mit vier Schlössern feyerlich überliefert. Da die Temperatur einigen Einfluß auf die absolute Größe der Maßen hat, so ist für das Urmaß die Temperatur beym Gefrierpuncte des Wassers zur normalen angenommen. Damit man zu jeder Zeit die wahre Länge des Metre wieder finden könne, ohne nöthig zu haben, eine neue Messung anzustellen, ward das Verhältniß desselben zu der Länge des Secundenpendels auf das genaueste bestimmt. Nach Borda's auf der Sternwarte zu Paris angestellten Versuchen ist die Pendellänge = 0,993827 Metre, oder das Metre = 1,0062123 Pendellänge.

Man hätte ein einförmiges Maßensystem für Frankreich unendlich leichter einführen, es selbst zu einem sehr allgemeinen, zwar nicht für das gemeine Leben, aber doch im Gebrauche für Gelehrte, die mit Messungen zu thun haben, erheben können. Man brauchte nur den vorhandenen Pariser Fuß als das Grundmaß festzusetzen, und des-

Digitized by Google

sen Länge nach der in Peru und Lappland gebrauchten Toise genau zu bestimmen. Die Messungen, die damit schon gemacht sind, sind allen Astronomen, Mathematikern und Physikern bekannt; sie kennen sie im französischen Maße meistens besser als in einem andern; sie machen oft ihre eigenen Messungen nach den französischen Maßen; die Abänderungen, die durch neue genauere Versuche sich ergeben, konnten mit den ältern Bestimmungen leicht verglichen werden, wenn das alte Maß beybehalten ward. Nun aber wird in französischen Schriften das Alte unkenntlich, und das Neue nicht leicht vergleichbar. Noch schlimmer ist es, wenn auch die ganz veränderte Zeiteintheilung hinzu kommt. Ich finde z. B. die Länge des Secundenpendels auf der Pariser Sternwarte sey $0^m,741887$. Nun sehe ich aus der Länge, daß hier Decimalzeit gemeint ist, den Tag zu 10 Stunden, die Stunde zu 100 Min., und die Minute zu 100 Sec. gerechnet. Ich muß also erstlich die Zeit auf unsere gewöhnlichen Secunden bringen, darnach die Länge in Metres berechnen, und zugleich das Metre in Pariser Fuß verwandeln. Diese Abweichungen von dem Gewöhnlichen sind für Ausländer eben so unbequem und unangenehm als es der neufranzösische Kalender, zum Glück nur eine kurze Zeit, war.

Für die Einheimischen war die totale Veränderung noch schwieriger. Der Kaufmann, der Handwerksmann, jeder, der an gewisse Schätzungen und Bestimmungen beym Kauf- und Verkauf gewöhnt war, sollte einen ganz neuen sehr abgeänderten Tarif machen. Dazu kamen noch die neuen, ganz fremden Benennungen, die zum Theil leicht verwechselt werden konnten, wie Decimeter und Dekameter; Deciare und Dekare; Decilitre und Dekalitre. Auch hat man sich an die neuen Maßen nicht gewöhnen wollen; und es ist schon so viel nachgelassen, daß man statt der ausländischen Wörter einheimische gesetzt hat, nur daß die Benennung Mètre des Grundmaßes beybehalten ist.

Die Urheber des neuen Maßensystems wollten alles willkürliche bey den Maßen verbannen. Sie verwarfen die Secundenpendellänge an einem bestimmten Orte, weil

Digitized by Google

dabey wenigstens die Zeiteintheilung etwas willkürliches sey. Allein jedes Maß ist seiner Natur nach willkürlich, und es kommt nur darauf an, welche Größe am bequemsten zur Vergleichung gebraucht werden kann. Die Länge des Secundenpendels, wie sie zu Paris ist, kann jeder an seinem Orte durch gute Beobachtungen erfahren, mit Anbringung einer gewissen Reduction, wegen des Unterschiedes der Breite. Ist es gleich schwer, die höchste mögliche Genauigkeit zu erhalten, so ist diese auch nicht zu jedem Gebrauche nothwendig, und man muß doch auch, wenn man das Metre sich nicht unmittelbar aus Paris schicken lassen kann, zur Beobachtung der Pendellänge an seinem Orte sich wenden. Es ist willkürlich, daß man den Quadranten des Meridians zum Grunde der Maßbestimmung genommen hat; warum nahm man nicht den Halbmesser des Äquators, oder einen mittlern Halbmesser der Erde, welcher die natürliche Meßruthe für unser Planetensystem ist? Die Länge des Quadranten ist nicht weniger etwas gefolgertes, als es diese Halbmesser gewesen wären. Es ist willkürlich, daß man den Meridian von Paris gewählt hat, der vermuthlich von andern Meridianen verschieden ist. Willkürlich ist es, daß man gerade den zehnmillionsten Theil des Quadranten genommen hat, freylich um der halben Toise durch das Metre nahe zu kommen.

Die Ableitung größerer und kleinerer Einheiten aus einer Grund-Einheit ist etwas willkührliches. Die sinnliche Abmessung derselben geschieht am leichtesten und sichersten durch fortgesetzte Verdoppelung und Halbirung. Zu Berechnungen ist aber die Decimal-Progression die bequemste. Bey Berechnungen von Längen, Flächen und körperlichen Räumen ist es nicht einmahl durchaus nöthig, verschiedene, einander untergeordnete Einheiten mit besondern Benennungen zu unterscheiden, es sey denn zur Vergleichung mit den Angaben einer Größe nach Einheiten aus einer andern Progression, z. B. der Duodecimalen.

Was noch insbesondere die Theilung der Winkel betrifft, so kann man immer die Eintheilung des Quadran-

Digitized by Google

ten oder des rechten Winkels in 90 Grade beybehalten, weil diese zur wirklichen Eintheilung eines Kreisbogens bequemer und sicherer ist, als die centesimale, allein die Abtheilungen des Grades sollten centesimale seyn, welche Gellibrand in seinen trigonometrischen Tafeln schon gemacht hat. Die Eintheilung des Quadranten in 96 Theile ist dadurch vortheilhaft, daß die Chorde von 64 Graden dem Halbmesser gleich ist, und daß man durch fortgesetzte Halbirungen die Bogen von 32, 16, 8, 4, 2, 1 Graden erhält. Findet der Künstler es nicht bequem, den Grad in 10 oder 100 Theile zu theilen, wo es nämlich die Größe des Instruments erlaubt, so mag er die Theilungszahl aus jener Progression nehmen, wobey sie sich leicht in Decimaltheile verwandeln läßt.

Diese Bemerkungen über das neueste Maßensystem haben keine Beziehung auf die große, mit so vieler Genauigkeit und Feinheit ausgeführte Messung des Meridianbogens. Diese hat uns die Gestalt der Erde mit viel größerer Zuverlässigkeit kennen gelehrt, als bis dahin hatte erhalten werden können. Sie zeigt eine bewundernswerthe Vereinigung der technischen Kunst der Beobachtung mit der theoretischen der darauf gegründeten Berechnungen. Ohne den aufgestellten Zweck, darauf die ganz neue Einrichtung aller Maßen zu gründen, hätte diese kostbare Unternehmung nicht die Genehmigung der Regierung erhalten. Sie gewährte den Mathematikern Schutz zu einer Zeit, welche in Frankreich den Untergang aller Wissenschaften drohte.

Van Swinden hat dem National-Institut zu Paris einen Bericht vorgelegt über die Messung des französischen Meridianbogens und die Resultate, welche daraus zur Bestimmung der Grundmaßen in dem neuen Maßensystem gezogen worden. Dieser befindet sich in den Memoiren des Instituts, T. II. p. 23—80. Er ist zum allgemeinern Unterricht sehr verständlich abgefaßt. Ausführliche Nachrichten liefert auch Th. Bugge's Reise nach Paris in den J. 1798. 99. Kopenh. 1801. Der Verfasser war von Seiten der dänischen Regierung nach Paris geschickt, um der aus Einheimischen und Ausländ-

Digitized by Google

dern zusammengesetzten Commission zur Bestimmung des neuen Maßen- und Gewichts-Systems beyzuwohnen.

Maßstab ist erstlich eine eingetheilte Länge, welche eine gegebene Länge zu messen dient. Sie enthält die Einheit entweder einfach oder mehrfach, mit den Unterabtheilungen.

Auf dem verjüngten Maßstabe sind die zweyten Unterabtheilungen, welche durch Puncte nicht mehr angegeben werden können, durch die in einem Drepecke, über einer der ersten Unterabtheilungen, mit diesen parallel gezogenen geraden, unterschieden. Man findet die Beschreibung und den Gebrauch in jedem Handbuche der Geometrie.

Eine andere Art Maßstäbe dient statt einer Tabelle, indem zu den Längen die Quantität einer andern Art von Größe, die jener zugeordnet wird, beygezeichnet ist. Dergleichen sind die quadratischen und cubischen Maßstäbe. Auf den erstern steht neben einer Länge die Anzahl der in dem Quadrate der Länge enthaltenen Quadrate von der Einheit; auf dem cubischen die Anzahl der Würfel von der Einheit in dem Würfel der Länge. Der cylindrische Maßstab ist ein quadratischer, wo die Einheit der Durchmesser eines Cylinders ist, mit welchem andere Cylinder von derselben Höhe gemessen werden sollen. Die Linien der Chorden, der Sinus, der Tangenten enthalten neben den Längen dieser Linien die zugehörigen Bogen oder Winkel. Der logarithmische Maßstab ist in dem Artikel, logarithmischer Maß- oder Rechenstab, schon erklärt.

Mathematik ist die Wissenschaft von den Formen der Größen, das ist aller Arten, wie eine Größe aus andern zusammengesetzt wird. Jede Größe hängt von andern, wenigern oder mehrern, Größen ab, bald auf eine einfache, bald auf eine verwickelte, nicht selten sehr verwickelte Art ab. Die Mathematik entwickelt den Zusammenhang der Größen, die auf irgend eine Art mit einander verknüpft sind; sie findet die verschiedenen Formen, unter welchen eine und dieselbe Größe dargestellt werden kann; sie lehrt, wie aus

Digitized by Google

gewissen bekannten Größen die unbekannten, welche mit ihnen in Verbindung stehen, gefunden werden, es sey ganz vollständig, oder näherungsweise.

Der Name Mathematik ist griechischen Ursprungs. Mathemata heißen im Griechischen überhaupt alle Kenntnisse, die gelehrt und erlernt werden. Unsere Mathematik hat die Benennung: Kenntnisse, vorzüglicher Weise erhalten, weil die alten griechischen Philosophen bey ihrem Unterrichte sich häufig auf sie bezogen. In der Pythagorischen und Platonischen Schule geschah dieses vorzüglich. Platon hat, wie erzählt wird, über der Thür seines Hörsaals geschrieben: Kein Unkundiger der Geometrie komme herein. Xenokrates, einer seiner Nachfolger, antwortete einem, der an seinem Unterrichte Theil nehmen wollte, aber in der Geometrie und Arithmetik fremd war: bleibe weg, du hast nicht die Handhaben zur Philosophie; ansas philosophiae non habes. Diese Philosophen wollten, daß der Lehrling durch das Studium der Mathematik sich schon gewöhnt haben sollte, abstracte Begriffe zu fassen, und eine Reihe von Schlüssen zu verstehen, um des Unterrichts über unsinnliche Gegenstände fähig zu seyn. Die mathematischen Begriffe, sagt Proklus, ein späterer platonischer Philosoph, halten das Mittel zwischen dem Untheilbaren und dem materiellen Theilbaren. Hippokrates empfahl seinem Sohne das Studium der Arithmetik und Geometrie, weil es seinen Verstand schärfen, und ihn selbst zu Untersuchungen über die Heilkunst tüchtiger machen würde.

Die Mathematik wird eingetheilt in die reine und in die angewandte. Die reine, welche die eigentliche Mathematik ist, heißt darum so, weil alle Begriffe, alle Schlüsse, alle Zusammensetzungen und Zerlegungen der Größen unmittelbar durch den Verstand gebildet werden, ganz rein und unabhängig von aller Hülfe der sinnlichen Erkenntniß und Erfahrung. Die Symbole in den arithmetischen Verbindungen der Größen, und die Figuren in den geometrischen sind nur Hülfsmittel, um die Glieder der Schlußkette fest zu halten, und die Aufmerksamkeit auf jedes Glied zu heften, ohne das

Digitized by Google

Ganze darüber zu verlieren. Die angewandte Mathematik enthält die Anwendungen der allgemeinen abstracten Lehrsätze und Auflösungsmethoden, theils auf die Eigenschaften und Veränderungen der natürlichen Körper, so fern sie sich messen lassen, theils auf eine Menge von Gegenständen zum Gebrauch des menschlichen Lebens.

Vier Urbegriffe des Verstandes sind es, worauf die ganze reine Mathematik beruhet, Vielheit, Ausdehnung, Lage, Verhältniß.

Vielheit ist die allgemeine Form der Vorstellung, die wir haben, wenn wir Dinge unterscheiden, ohne darauf zu achten, was sie sind. Thiere, besonders die höhern Gattungen, haben ohne Zweifel auch die Vorstellung einer Mehrheit von Dingen, allein immer mit den vorgestellten Dingen vermischt; wir aber können die Dinge wechseln, vermindern oder vermehren, und behalten immer dieselbe Vorstellung von Vielheit, gleichsam als eine Tafel, worauf eine Zeichnung ausgelöscht und eine andere an die Stelle gesetzt wird. Darum ist Vielheit ein Urbegriff, eine in dem Verstande selbst entspringende Form von Vorstellung, die wir auf alle sinnliche Dinge und selbst auf unsere Vorstellungen anwenden.

Eine Vielheit gleichartiger, oder als gleichartig betrachteter Dinge heißt eine Anzahl. Bey diesem Begriffe nehmen wir eine Aussonderung des Gemeinsamen vor, welches sich an jedem der unter der Vielheit begriffenen Dinge findet, und die Einheit heißt, z. B. Thaler, Buch. Jedes dieser Dinge mit seinen Besonderheiten heißt ein Einzelnes, so daß Einheit ein bloßer Begriff, nämlich der Begriff des Gemeinsamen, das Einzelne aber ein Gegenstand, es sey ein wirklicher oder blos gedachter, ist.

Ist die Einheit unbestimmt, so ist die Vielheit eine Zahl, und die Einheit erhält nun die Benennung, Einer. Die Vielheit in einer Zahl kann auch unbestimmt gelassen werden, so erhalten wir den Begriff einer unbestimmten Zahl. Dieser ist es, der in der Analysis gebraucht wird, weil wir in dieser blos die Verbin-

Digitized by Google

dung der Größen betrachten, um allgemeine, auf jeden besondern Fall anwendbare, Formeln zu erhalten.

Der zweyte Urbegriff, der in der Mathematik zum Grunde liegt, ist die Vorstellung des Ausgedehnten. Dieses ist auch eine Vielheit, aber eine zusammenhängende, oder stetige Vielheit. Es sind dreyerley Arten des Ausgedehnten: Körper, Flächen, Linien, s. Ausdehnung.

Die Form des Ausgedehnten macht es zu einem Gegenstande mathematischer Untersuchungen. Körper erhalten ihre Form durch die Art der Begränzung, oder auch durch die Art, wie sie durch die Bewegung einer Figur erzeugt werden, diese mag sich parallel bleiben oder sich um eine Axe drehen, dieselbe seyn oder sich nach einem gewissen Gesetze verändern. Die Form einer ebenen Fläche besteht in der Beschaffenheit und Lage der Begränzungslinie; einer krummen in der Beschaffenheit der ebenen Figuren, durch deren Bewegung sie nach einem gewissen Gesetze erzeugt wird. Die Form der Linien ist die Art, wie ihre Elemente stetig nach einander folgen. Die Form geben wir dem Ausgedehnten eigenmächtig, und dadurch ist die ganze Geometrie ein unbestreitbares Eigenthum des Verstandes.

Die Form kann ganz unabhängig von der Größe gedacht werden. Bey einer Kugel braucht man nicht auf die Größe des Halbmessers zu achten; bey einer Ellipse ist es nur nöthig, das Verhältniß der Axen zu kennen oder anzunehmen, wenn sie der Art (species) nach bestimmt werden soll. Die absolute Länge der Axen ist nur bey der Anwendung auf sinnliche Gegenstände erforderlich. Es verhält sich hier so wie bey den allgemeinen analytischen Zusammensetzungen einer Größe aus andern, wo die Quantität unbestimmt bleibt.

Der dritte Urbegriff, der in der Mathematik zum Grunde liegt, ist der Begriff von Lage, es sey der Linien gegen einander, oder der Flächen, oder der Linien und Flächen. Dieser Begriff, mit dem der Ausdehnung ver-

Digitized by Google

bunden, giebt die Form der Körper. Lage ist die Art des Nebeneinanderseyns, nämlich des idealischen.

Der vierte Urbegriff ist der von einem Verhältnisse. Dieses ist die einfachste Vergleichung zweyer Größen, es sey numerischer oder geometrischer, ohne dabey auf eine bestimmte Einheit Rücksicht zu nehmen. Selbst wenn zwey Größen in Abstracto gegeben oder gedacht werden, so kommt es bey ihrer Vergleichung blos auf ihre relative Größe an, wobey man einen ganz unbestimmten Theil derselben als Maß gedenkt, nicht auf ihre absolute in Beziehung auf eine gegebene Einheit.

Die zweyerley Formen der Größen geben die zwey großen Abtheilungen der reinen Mathematik, die Arithmetik im weitesten Verstande und die Geometrie. Jene enthält die gemeine Rechenkunst, die Buchstabenrechnung, die Algebra, die höhere Arithmetik über Formen und Eigenschaften der Zahlen, die Analysis endlicher Größen und die Analysis unendlicher Größen. Die letztere unterscheidet sich von der Analysis des Endlichen dadurch, daß sie die Gränzverhältnisse der Unterschiede in zwey oder mehrern Reihen veränderlicher Größen als ein Mittel gebraucht, die Relationen derselben gegen einander und zu den unveränderlichen Größen zu entwickeln. Von allen diesen einzelnen Abtheilungen sehe man die davon handelnden Artikel.

Die Geometrie, als Wissenschaft von den Formen des Ausgedehnten, betrachtet es entweder völlig als ein solches, und nimmt bey denselben gar keine Einheit an, auch keine unbestimmte, wie die Geometrie der Alten es sich zur Regel gemacht hat, oder sie nimmt die Eigenschaften der Gleichungen und die Lehren der Analysis, auch der Differential- und Integralrechnung zu Hülfe, wo die Mittel der alten Geometrie nicht zureichen. Die Goniometrie ist ein System von Sätzen über die Lage der Linien gegen einander. Diese können aus ein paar ersten Sätzen, die mittelst einer Construction gefunden sind, durch Rechnung hergeleitet werden. Die Trigonometrie zeigt, wie aus drey gegebenen Bestimmungsstücken in einem ebe-

Digitized by Google

nen oder sphärischen Dreyeck die übrigen durch Rechnung gefunden werden. Sie hängt von der Goniometrie ab. Man sehe die hieher gehörigen Artikel. Bey einzelnen Aufgaben, wo eine Linie der Größe oder Lage nach gefunden, oder gewisse Puncte bestimmt werden sollen, erleichtert die Rechnung die Auflösung oft sehr. Doch ist hier meistens die Methode mehr werth als das Gesuchte selbst. S. Anwendung der Analysis auf die Geometrie.

Die angewandte Mathematik ist von einem solchen Umfange und von so verschiedener Beschaffenheit in Absicht auf ihre Gegenstände und die Behandlung, daß man zwey Hauptheile aus ihr machen muß. Bisher sind in den Lehrbüchern alle diese Untersuchungen so zusammengebracht, daß die angewandte Mathematik als ein unförmliches Corpus von ganz ungleichartigen Kenntnissen erscheint. Man trenne aber alles, was zu der mathematischen Betrachtung der Natur gehört, von den Anwendungen, es sey der reinen Mathematik oder dieser mathematisch-physischen Theorien auf Geschäfte und Unternehmungen des bürgerlichen Lebens, auf Werke der Kunst, und auf solche Gegenstände, wo sie nur Hülfe leistet, nicht die Hauptsache ausmacht. Jene physisch-mathematischen Untersuchungen nenne man die physische angewandte Mathematik, diese die technische Mathematik.

Die physische angewandte Mathematik hat drey große Hauptheile, die mechanischen, die astronomischen und die optischen Wissenschaften. In diesen herrscht die reine Mathematik. Sie gebraucht nur gewisse Grundbegriffe und einige allgemeine Erfahrungen, um daraus alle Erscheinungen mit großer Genauigkeit nach Maß und Zahl bestimmen zu können. So weit als sie dieses leisten kann, so weit geht auch ihr Gebiet. Wo aber besondere Erscheinungen an den Körpern, solche, die ganz auf Erfahrung beruhen, zu erklären und zu vereinigen sind, da muß die Mathematik lieber nur als Hülfswissenschaft dienen wollen, als daß sie ihren Charakter aufopfere. Dieser besteht darin, daß alle ihre Sätze entweder aus den Urbegriffen des Verstandes und den durch

Digitized by Google

ihn selbst unabhängig gebildeten Formen der Größe hergeleitet werden, oder daß die Grundlage ihrer Untersuchungen eine solche Beschaffenheit sehr nahe habe, und hypothetisch für gleichgeltend genommen werden könne.

Auf die letztere Art entsteht eine Wissenschaft, welche man fast ohne Einschränkung eine Wissenschaft a priori nennen kann, die reine Mechanik, welche durch die neuern Mathematiker von Newton bis Laplace mit so glänzendem Erfolge bearbeitet ist, und dem Scharfsinne des menschlichen Verstandes die größte Ehre macht, größere als man, ohne nähere Kenntniß davon zu haben, nur begreifen kann. In ihr finden die feinsten Anwendungen der höhern Geometrie und der tiefern Analysis Statt. In der zweyten Abtheilung dieses Werks wird von dieser Wissenschaft theils im Allgemeinen, theils im Besondern gehandelt werden; hier folgt nur zur Uebersicht des Gebiets der Mathematik einiges zur vorläufigen Erklärung.

Man gebe dem geometrischen Körper noch Daseyn, das ist, man sehe ihn als etwas an, das auf andere Dinge seiner Art wirken, aber auch von ihnen Veränderungen leiden kann. Die allgemeinste Veränderung, die ein Körper erfahren kann, ist Veränderung seines Orts, oder seiner Stelle in dem allgemeinen Raume, einer abstrakten unbegränzten Ausdehnung, worin irgendwo jeder Körper vorhanden ist. Die Veränderung des Orts ist Bewegung, eine Vorstellung, die schon in der reinen Geometrie gebraucht wird. Kein Körper ändert seinen Zustand der Ruhe oder der Bewegung ohne Einwirkung von außen. Daher ist die Bewegung gleichförmig, wenn der Körper keine Einwirkung von andern Körpern leidet, oder so fern diese bey Seite gesetzt wird. Dann ist das Verhältniß der beschriebenen Räume das Verhältniß der Zeiten. In derselben Zeit ist bey gleichförmigen Bewegungen das Verhältniß der Räume dasjenige der Geschwindigkeiten. Bey ungleichförmigen Bewegungen ist das letzte Verhältniß der in gleichen Zeitelementen beschriebenen Räume dasjenige der

Digitized by Google

Geschwindigkeiten. Kraft ist hier das Vermögen eines Körpers, in einem andern Bewegungen hervorzubringen oder zu ändern. Wir messen sie durch die nach der Richtung der Kraft hervorgebrachte Bewegung, unter gleichen Umständen in der Lage der Körper. Beschleunigende Kraft (Schwerkraft) ist ein stetig wirkende, wodurch die Geschwindigkeit eines andern Körpers stetiger Weise vergrößert oder vermindert wird. Der relative Begriff von Ursache und Wirkung gehört unserm Geiste eigen, welcher ihn nicht aus der Erfahrung schöpft, weil die Erfahrung uns blos das Aufeinanderfolgen in den Zuständen der Dinge wahrnehmen läßt, nicht ihre Verknüpfung als Ursache und Wirkung. Das Gesetz einer beschleunigenden Kraft können wir willkürlich annehmen, so lange wir noch keine Anwendung auf die Körperwelt machen. Ohne diese ist die Untersuchung rein analytisch. Um zu erfahren, ob es in der Natur wirklich Statt habe, müssen die theoretischen Folgerungen mit der Erfahrung verglichen werden. So versichern wir uns in der Astronomie, daß die beschleunigenden Kräfte der Körper auf andere sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten, gewisse Bedingungen noch dabey vorausgesetzt. Masse eines Körpers ist die Verhältnißzahl für das Product aus der Größe in dessen Wirksamkeit.

Dieses sind die Begriffe, die wir in die Mathematik aufnehmen, um darauf die Mechanik als eine rationale Wissenschaft zu gründen. Dazu kommt noch der Unterschied zwischen festen und flüssigen Körpern, welchen wir zwar aus der Erfahrung nehmen, aber ihn auf eine allgemeine Art aus dem Begriffe eines wirklichen ausgedehnten Dinges herleiten. Ein fester Körper ist ein solcher, dessen Theile nicht trennbar sind, ein flüssiger ist ein solcher, dessen kleinste Theile nicht zusammen hängen, daher sie vollkommen unter sich beweglich sind, und jeden Druck im Innern oder von außen allenthalben hin gleich stark fortpflanzen. Die flüssigen Körper sind entweder unelastische oder elastische, deren jene sich in keinen kleinern Raum zusammenbringen lassen, diese aber dazu

Digitized by Google

fähig sind, so wie dieselben sich nach weggenommenen oder verminderten äußern Druck wieder ausdehnen.

Zufolge der Beschaffenheit der Körper erhält die Mechanik zwey Haupttheile: die Mechanik der festen Körper, und die Mechanik der flüssigen. Die erstere betrachtet die Körper entweder im Stande des Gleichgewichts, Statik, oder in der Bewegung begriffen, Mechanik insbesondere. In dieser wird erstlich untersucht, wie die Bewegungen beschaffen sind, die durch Schwerkräfte (beschleunigende Kräfte) entstehen, entweder so daß der Körper sich frey in einem leeren Raume oder in einem widerstehenden Mittel bewegt, oder daß er einen vorgeschriebenen Weg (z. B. ein Pendel) zu nehmen genöthigt ist. Die Untersuchung des ersten Falles giebt die Grundlage zu der physischen Astronomie. Sie wird sehr schwer, wenn mehr als ein Mittelpunct der Kräfte vorhanden ist. Man könnte diesen Theil der Mechanik schicklich die Phoronomie nennen, wenn dieser Ausdruck nicht schon einen weitern Umfang erhalten hätte. In einem andern Theile der Mechanik, den man die Dynamik nennen mag, wird untersucht, wie die Bewegungen verschiedener Körper, die durch Fäden oder Stangen (beide als Linien betrachtet) mit einander verbunden sind, indem sie von einer Schwerkraft getrieben werden, sich gegenseitig abändern, was überhaupt die Gestalt eines Körpers für einen Einfluß auf die Bewegung hat, er mag sich schwingen oder auf einer Fläche fortgehen, insbesondere aber die drehende Bewegung eines festen Körpers um eine Axe und die Schwänkungen derselben, wovon in der physischen Astronomie auf die Erde eine sehr feine Anwendung gemacht wird.

Die Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung unelastischer flüssiger Körper heißt die Hydrodynamik. Der Theil, der den Stand des Gleichgewichts flüssiger Körper unter sich und mit festen bestimmt, heißt Hydrostatik, wobey die erstere Benennung für die Bewegung insbesondere genommen wird. — Die Aero-

Digitized by Google

metrie oder Pneumatik handelt von der Bewegung flüssiger elastischer Körper.

Die Untersuchung der Schwingungen, wodurch Saiten und andere klingende Körper tönend werden, wie auch der Luftwellen, wodurch der Schall fortgepflanzt wird, macht die Akustik aus, einen Theil der mathematischen Physik, dessen Bearbeitung dem Scharfsinne der größten Analysten zu schaffen gemacht hat. Zu dieser gehört auch die Berechnung der Verhältnisse, durch welche die Intervalle der Töne angegeben werden. — In ältern Systemen der Mathematik wird die Musik als ein besonderer Theil der angewandten Mathematik abgehandelt.

Wegen des unmittelbaren Zusammenhanges der Astronomie mit der Mechanik erhält sie hier ihre Stelle gleich nach dieser. Ein Theil dieser großen Wissenschaft ist historisch-physisch, das ist, er enthält die Beschreibung alles dessen, was am Himmel wahrgenommen werden kann, also erstlich die ganze Astrognosie; dann die Beschreibung der Planeten, ihrer Monde und der Kometen; drittens dasjenige, was wir durch Beobachtung oder Folgerungen über die Beschaffenheit der Weltkörper zu entziffern vermögen. Der schwerere und vornehmste Theil, welcher allen Scharfsinn unsers Geistes erfordert, ist die Untersuchung der Bewegungen der Weltkörper. Von den scheinbaren Bewegungen (sphärische Astronomie) geht man zu der Entwickelung der wahren Bewegungen, (theorische Astronomie), die zuerst noch blos auf die Wahrnehmung gegründet, und nur durch gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen als richtig erkannt wird. Die physische Astronomie aber betrachtet die Darstellung der himmlischen Bewegungen als eine große Aufgabe der Mechanik, zu deren Auflösung sie nur so viele Data aus der Beobachtung zu nehmen sucht, als gerade nöthig sind, die allgemeine Theorie auf jeden besondern Fall anzuwenden. Dieses ist gewiß der erhabenste und schwerste Theil aller menschlichen Kenntnisse. Nichts beweiset die eigenthümliche, von der sinnlichen Erfahrung unabhängige, Kraft unsers Geistes mehr, als daß der menschliche

Digitized by Google

Verstand im Stande war, aus einer allgemeinen Theorie den Weltkörpern ihre Bahnen vorzuzeichnen, selbst auch sehr kleine Wirkungen der Nebenkräfte neben denen der Hauptkräfte in Rechnung zu bringen. — Die praktische Astronomie endlich sucht die vortheilhafteste Einrichtung der Werkzeuge, die bequemsten und sichersten Arten der Beobachtung, und liefert Tafeln zur möglichst genauen Berechnung des Ortes jedes Weltkörpers für jeden Ort der Erde in jedem Augenblicke der Zeit.

Mit der Astronomie ist genau verbunden die mathematische Geographie, weil eine genaue Kenntniß der Gestalt der Erde und der Lage jedes Ortes, wo Beobachtungen gemacht werden, zu den astronomischen Berechnungen erfordert wird. Auch ist der Halbmesser der Erde die Meßruthe, deren man sich am Himmel bedient. Die Methoden zur Verfertigung der Landcharten gehören auch in die mathematische Geographie. — Die Chronologie ist eine Anwendung der astronomischen Bestimmungen der Länge des Sonnenjahres und des Mondenmonats zur Eintheilung der bürgerlichen Zeiten. Dieser Anhang der Astronomie ist fast ganz historisch, indem darin die verschiedenen Wege erzählt und verglichen werden, welche von jeher zur Einrichtung der Zeitmaßen eingeschlagen sind. — Die Gnomonik, welche die Verfertigung der Sonnenuhren lehrt, ist eine Anwendung der geometrischen Lehre von den Projectionen auf die Schattenlinien einer Stange, welche der Erdaxe parallel ist. Nur wegen der verschiedenen Fälle der Entwerfung und der mancherley dabey ersonnenen Künsteleyen hat man eine eigene Abtheilung daraus gemacht.

Die dritte mathematisch-physische Wissenschaft ist die Optik. Es ist in den meisten Fällen erlaubt, das Licht als geradlinichte Ausflüsse des leuchtenden Körpers zu betrachten, und einen Lichtstrahl als eine gerade Linie, die nach einem gewissen Gesetze von spiegelnden Flächen zurückgeworfen, und an der Oberfläche durchsichtiger Körper gebrochen wird. Diese Gesetze sind der Grund, worauf die beiden Abtheilungen in der mathematischen Lehre

Digitized by Google

vom Lichte, die Katoptrik und die Dioptrik, beruhen. Die letztere ist viel schwieriger als die erstere und von weit größerm Umfange. Da das Licht bey seinem Durchgange durch brechende Körper, eben so wie bey der Zurückstrahlung, etwas von seiner Stärke verliert, so hat man versucht, diesen Verlust unter unterschiedenen Umständen zu messen, und auf die Versuche eine Theorie zu gründen. Man möchte diese eher zur Physik als zur Mathematik rechnen, weil sie ganz empirisch ist. Lambert hat sie die Photometrie genannt. Karsten hat diese Benennung für die ganze Optik gebraucht. — Die Perspectiv enthält die Regeln, nach welchen ein Gegenstand auf einer Fläche abzubilden ist, so daß die Lichtstrahlen von dem Bilde in eben der Lage gegen einander ins Auge kommen, wie sie von dem Gegenstande selbst es treffen würden, wenn das Auge eine ähnliche Stelle gegen denselben hat, als bey dem Bilde angenommen ist. Das Licht selbst kommt hier nicht als etwas erleuchtendes in Betrachtung, daher die Perspectiv kaum zur Optik zu rechnen ist, sondern einen Theil der geometrischen Lehre von der Projection ausmacht, welche wegen ihres Umfanges und der mancherley Anwendungen einen besondern Abschnitt in der Geometrie einnehmen müßte. — Was man noch die Optik im engern Verstande nennt, die Lehre von dem gerade fortgehenden Lichte, ist der Physik zu überlassen. Es ist nichts bedeutendes von mathematischer Beschaffenheit darin, als nur die Untersuchung über die Stärke der Erleuchtung einer Fläche nach der Lage des erleuchtenden Körpers gegen dieselbe.

Die technische Mathematik enthält sieben sehr ungleichartige Abtheilungen.

I. Die praktische Arithmetik begreift die merkantilische, juristische und politische Rechenkunst. Zu der politischen gehören die Berechnungen der Lebenden jedes Alters, der stehenden Ehen, der Wittwen und Wittwer, des Staatsvermögens, der Leibrenten jeder Art und allerhand Versorgungscassen.

Digitized by Google

II. Die praktische Geometrie begreift die Feldmeßkunst, theils die gemeine, theils die höhere zur Vermessung ganzer Länder; die Forstgeometrie insbesondere; das Nivelliren und die Markscheidekunst.

III. Die praktische Mechanik soll die vortheilhafteste Einrichtung der Maschinen angeben. Diese dienen theils zum Heben und Ziehen; theils zur Verfertigung von allerhand Bedürfnissen mit Ersparung menschlicher Kräfte; theils zur Erhebung des Wassers, hydraulische Maschinen (Hydraulik); theils zur Messung der Zeit, Uhren und einige andere ähnliche Maschinen.

IV. Die bürgerliche Baukunst giebt nur zu einigen mathematischen Fragen Anlaß, die Festigkeit der Mauern, der Gewölbe und Dächer betreffend, und über die Figuren der Durchschnitte zweyer Gewölbeflächen. Die Rechnungen, die beym Bauanschlage und etwa sonst noch vorkommen, sind ganz unbedeutend.

V. Die Wasserbaukunst oder Hydrotechnik handelt von der Anlegung der Dämme, Kanäle, Häfen und von der Leitung der Flüsse. Wegen der vielen Rücksichten auf örtliche Umstände kommt es hier hauptsächlich auf Erfahrung an, so daß die Theorie nur zur Unterstützung desjenigen dienen kann, was man nach der Analogie der Erfahrungen als ausführbar ansieht.

VI. Die Kriegswissenschaften sind: die Artillerie, die Befestigungskunst, die Führung des Angriffs und der Vertheidigung einer Festung und die Taktik. Die erste dieser Abtheilungen legt eine schwere Frage vor, über den Weg der Bomben und Kanonenkugeln in der Luft, als einem widerstehenden Mittel, und giebt Veranlassung noch zu einigen mathematisch-physischen Untersuchungen von Wichtigkeit. Die Befestigungskunst kann mit Hülfe der gemeinen Geometrie und Trigonometrie fertig werden. Nur die Frage von der Stärke der Futtermauern mag Schwierigkeit machen.

VII. Die Wissenschaften des Seewesens sind: der Schiffbau, die Regierung des Schiffes, die Lei-

Digitized by Google

tung des Schiffes oder die Steuermannskunst. Die beiden erstern erfordern Kenntnisse aus der feinern Mechanik. Die Steuermannskunst ist ganz von der Astronomie abhängig.

Alles dieses, was hier unter der Überschrift, technische Mathematik, zusammen gefaßt ist, sehe ich nur als eine Sammlung von Anwendungen mathematischer Lehren an, ohne darum alle die genannten praktischen Wissenschaften in das System der Mathematik selbst aufzunehmen. Die vierte, fünfte und sechste enthalten so vieles, von der Mathematik verschiedenartige, daß sich das mathematische darin verliert. — Die mathematischen Theorieen über den Bau und die Regierung der Schiffe nebst der Steuermannskunst gehören mehr zu der gesammten Kunde des Seewesens als diese zu der Mathematik. — Auch die praktische Mechanik erfordert mancherley ganz empirische Kenntnisse über die Größe der bewegenden und der widerstehenden Kräfte, über die Abweichung des wirklichen Effects von dem berechneten wegen der in der Theorie beseitigten Umstände, über die nöthige Stärke der Materialien u. m., so daß man die praktische Mechanik nur als eine sehr gemischte Wissenschaft betrachten kann, die man inzwischen zu den mathematischen rechnen mag, wegen des vorzüglichen Einflusses und Gebrauchs der Mathematik, welcher darin Statt findet. — Die praktische Geometrie ist größtentheils mathematisch, und muß daher als eine mathematische Disciplin angesehen werden, auch als eine besondere, weil sie, um praktisch brauchbar zu seyn, nicht in die theoretische Geometrie eingeschaltet werden kann, wo sie auch den Zusammenhang zu sehr unterbrechen würde. — Die praktische Arithmetik enthält zu sehr verschiedenartige Rechnungsfälle, als daß daraus eine besondere Disciplin gebildet werden könnte. Das meiste ist Anwendung allgemeiner Rechnungsvorschriften auf benannte Zahlgrößen. Die Lehre von den Leibrenten macht für sich eine sehr wichtige Untersuchung von großem Umfange aus, und giebt einen Anhang zu der Analysis.

Digitized by Google

Die Bestimmung, welche ich der mathematischen Physik gegeben habe, wird dienlich seyn, die Gränzen zwischen angewandter Mathematik und Physik zu ziehen. Es bleibt freylich dem Gutbefinden eines jeden Schriftstellers überlassen, was er zu dem Umfange einer von ihm abgehandelten Wissenschaft aus einer verwandten nehmen will. Allein in einer systematischen Anordnung unserer Kenntnisse muß jede ihr angewiesenes Fach haben, nicht in einem andern unvollständig wiederholt werden. Die Astronomie gehört der Mathematik ganz allein zu. Inzwischen mag in einem physikalischen Lehrbuche eine Übersicht des Weltgebäudes mitgetheilt werden, aber als etwas entlehntes, um den Zusammenhang unserer Erde mit dem Ganzen zu zeigen, und die Analogie einiger Erscheinungen zu bemerken. Was in der mathematischen Mechanik und Optik bewiesen wird, braucht in der Physik nicht erwiesen zu werden, sondern wird da, wo es gebraucht wird, als Lehnsatz angeführt. Dieses wird den Vortheil haben, daß man in der Physik sich nicht auf die leichtern Sätze wird einschränken dürfen, welche durch die elementarischen Sätze der Mathematik erwiesen werden können, daß man den Raum erspart, der selbst durch diese Beweise weggenommen ward, und daß die mangelhaften Beweise solcher Physiker, die der Mathematik nicht genugsam kundig sind, sich nicht zum Nachtheil der Leser verbreiten. Die Grundbegriffe der Mechanik mögen der Physik zu eigen verbleiben, eben so wie ihr die Erfahrungen gehören, worauf die optischen Wissenschaften gegründet werden.

Die Gewißheit der mathematischen Lehren wird von jedem anerkannt, auch von solchen, die ihre Richtigkeit nicht prüfen können, ohne Bedenken angenommen. Worin diese gegründet sey, ist aus der Beschaffenheit der mathematischen Begriffe und Schlüsse nicht schwer zu erörtern. Die Begriffe von Vielheit, Ausdehnung, Lage, Verhältniß entspringen in unserm Geiste selbst; sinnliche Dinge geben nur die Bilder, woran wir sie uns klar vorstellen. Die Formen dieser Begriffe sind unser eigenes

Digitized by Google

Werk, wovon wir die deutlichste und vollständigste Erkenntniß haben. Daher stimmen auch alle Mathematiker in ihren Erklärungen überein. Die Beweise in der Mathematik sind eine beständige Gegeneinanderhaltung der Größen und ihrer Verbindungen in Absicht auf Gleichheit und Ungleichheit, gleichsam eine Superimposition, wie man sie bey sinnlichen Größen in gewissen Fällen vornimmt, um über ihre Gleichheit oder Ungleichheit zu entscheiden, so weit es hier die Schärfe des Gesichts zuläßt. Nur aus Unachtsamkeit ist ein Irrthum möglich, der aber bald entdeckt und verbessert wird, s. Beweis. Bey Untersuchungen außerhalb der Mathematik liegt der Grund der Ungewißheit, oder Uneinigkeit zunächst in den Begriffen, welche nicht genugsam deutlich, nicht vollständig, nicht übereinstimmig, bey dem einen weiter, bey dem andern enger, oder sonst ungleich zusammengesetzt sind. Die Schlüsse sind von einer andern Art, wo es auf Beschaffenheit der Dinge ankömmt. Es sind Erscheinungen, die wir vergleichen, aber die wahren Gründe der Dinge bleiben uns verborgen. Wir können das Ganze nicht übersehen, und daher werden unsere Vorstellungen einseitig. Die Einbildungskraft übermeistert den kühlen Verstand, und setzt Bilder statt des Realen. Die sich selbst schmeichelnde Eigenliebe sieht die Phantasmen jener Zauberinn als neue Einsichten in das Innere der Dinge an, und verachtet die Belehrungen mehr besonnener Philosophen.

Kant hat in seiner Kritik der reinen Vernunft, in der Methodenlehre, Bemerkungen über die mathematische Erkenntniß vorgetragen, gegen welche aber einiges zu erinnern seyn möchte. Er sagt (S. 471), die philosophische Erkenntniß sey die Vernunfterkenntniß aus Begriffen, die mathematische aus der Construction der Begriffe. Einen Begriff construiren heiße: die ihm correspondirende Anschauung a priori geben. Zur Construction eines Begriffs wird, ihm zufolge, eine nicht empirische Anschauung erfordert, die als Anschauung zwar ein einzelnes Object ist, aber nichts desto weniger, als die Construction eines

Digitized by Google

Begriffs (einer allgemeinen Vorstellung) Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muß. So construire man ein Dreyeck, indem man den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand, entweder durch bloße Einbildung, in der reinen, oder nach derselben auch auf dem Papiere, in der empirischen Anschauung, beidemahl aber völlig a priori, ohne das Muster dazu aus irgend einer Erfahrung geborgt zu haben, darstellt. Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch, und dient gleichwol den Begriff, unbeschadet seiner Allgemeinheit, auszudrücken. — Die philosophische Erkenntniß (sagt Kant ferner) betrachtet das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besondern, ja gar im Einzelnen, gleichwol doch a priori und vermittelst der Vernunft. In dieser Form bestehe der wesentliche Unterschied dieser beiden Arten der Vernunfterkenntniß, und beruhe nicht auf dem Unterschiede ihrer Materie oder ihrer Gegenstände. Diejenigen, welche Philosophie von Mathematik dadurch zu unterscheiden vermeineten, daß sie von jener sagten, sie habe blos die Qualität, diese aber nur die Quantität zum Object, hätten (sagt er) die Wirkung für die Ursache genommen. Die Form der mathematischen Erkenntniß sey die Ursache, daß diese lediglich auf Quanta gehen kann. Denn nur der Begriff von Größen lasse sich construiren, d. i. a priori in der Anschauung darlegen, Qualitäten aber lassen sich in keiner andern als empirischen Anschauung darstellen. Daher könne eine Vernunfterkenntniß derselben nur durch Begriffe möglich seyn. — „Die Mathematik (sagt K. weiterhin) construirt nicht blos Größen (Quanta), wie in der Geometrie, sondern auch die bloße Größe (Quantitatem), wie in der Buchstabenrechnung, wobey sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Größenbegriffe gedacht werden soll, gänzlich abstrahirt. Sie wählt sich alsdann eine gewisse Bezeichnung aller Constructionen von Größen überhaupt, und, nachdem sie

Digitized by Google

den allgemeinen Begriff der Größen nach den verschiedenen Verhältnissen derselben auch bezeichnet hat, so stellt sie alle Behandlung, wodurch die Größe erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar. Vermittelst einer symbolischen Construction gelangt sie eben so gut, wie die Geometrie nach einer ostensiven, dahin, wohin die discursive Erkenntniß vermittelst bloßer Begriffe niemahls gelangen könnte."

Was Kant hier von der bildlichen Darstellung der geometrischen Größen sagt, ist völlig gegründet. Was aber die symbolische betrifft, so ist diese nicht mehr die Darstellung des Allgemeinen im Besondern, wie bey geometrischen Figuren, sondern des Allgemeinen selbst, da die Buchstabenzeichen ganz willkürliche, nicht wesentliche, wie die geometrischen Figuren, sind, und jeden möglichen Werth der Größen unmittelbar andeuten. Auch würde es etwas deutlicher seyn zu sagen, die Zeichen geben entweder die Verbindungsart der Größen, oder die Größen selbst an. Das Wort, Construction, ist bey den Mathematikern von der arithmetischen Verbindung der Größen nicht gewöhnlich. Auch der Unterschied zwischen Quantum und Quantitas pflegt, wenn man ihn macht, anders bestimmt zu werden.

Die wichtigste Bemerkung trifft den Satz, daß die mathematische Erkenntniß aus der Construction der Begriffe hervorgehe. Sie fließt vielmehr durchgehends aus den Begriffen selbst, entweder unmittelbar oder durch Verbindung mit andern Begriffen. Das sieht man aus allen Artikeln dieses Wörterbuchs. Jeder mathematische Begriff ist ein Gegenstand unserer Betrachtung und Vergleichung, dessen Natur in der Erklärung vollständig dargestellt wird. Verbinden wir mehrere Größen, es sey von einerley Form oder von verschiedener, mit einander, so führt das eigenthümliche einer jeden gewisse allgemeine Verhältnisse herbey, welche wir durch Lehrsätze ausdrücken, und worauf die Auflösungen der Aufgaben beruhen. — Ferner ist nicht die Form der mathematischen Erkenntniß die Ursache, daß diese lediglich auf Quanta ge-

Digitized by Google

hen kann, sondern umgekehrt, weil die Mathematik sich ausschließlich mit Quantis beschäftigt, hat die Erkenntniß in derselben eine eigene Form. Denn das Wesen einer Wissenschaft beruht auf ihrem Gegenstande, und ihre Methode wird durch diesen bestimmt.

Kant scheint den Ausdruck, Erkenntniß aus Begriffen, auf dasjenige einzuschränken, was aus einem einzelnen Begriffe folgt, wie ich aus dem von ihm gebrauchten Beyspiele schließe. Man solle einem Philosophen den Begriff eines Dreyecks geben, um ihn nach seiner Art ausfindig machen zu lassen, wie sich wol die Summe seiner Winkel zu einem rechten verhalte. Er werde aus dem Begriffe eines Dreyecks allein nichts Neues herausbringen. Der Geometer aber nehme sogleich eine Construction des Dreyecks vor, ziehe daran durch einen der Winkelpuncte eine parallele mit der gegenüber liegenden Seite, und finde nun durch eine Kette von Schlüssen, immer durch die Anschauung geleitet, eine völlig einleuchtende und allgemeine Auflösung der Frage. Wenn Kants Philosoph es in seinem Fache nicht besser macht als in der Geometrie, so wird er daselbst eben so wenig etwas herausbringen. Wie kann man ohne Verbindung mehrerer Begriffe, ohne Mittelsätze, zu irgend einem neuen Satze gelangen? Die von Kant so genannten analytischen Sätze, die aus einer Erklärung unmittelbar hergeleitet werden, sind ein kahles Idem per idem, nur zu Zwischensätzen in einer Schlußfolge brauchbar.

Allein bey diesem Exempel ist noch zu bemerken, daß hier in der That nichts aus dem Begriffe eines Dreyecks hergeleitet wird, sondern aus Sätzen über die Lage gerader Linien gegen einander. Der Satz betrifft nicht das Dreyeck, als eine von drey geraden Linien eingeschlossene Figur, sondern die Lage dreyer Linien gegen einander, und ist eigentlich dieser: Wenn zwey sich schneidende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so ist der Winkel jener das Complement der beiden innern Winkel eben derselben mit der dritten zu zwey rechten. Alles wird aus dem Begriffe von Parallelen hergeleitet. Zuerst hatte der

Digitized by Google

Geometer nur gefunden, daß die Summe der beiden innern Winkel kleiner als zwey rechte ist; nun sucht er, wie viel daran fehlen möge, und findet das Complement in dem Winkel der beiden geschnittenen Linien.

Ein besseres Beyspiel wird folgendes seyn. Man gebe unserm Philosophen einen Kreis, um daran etwas merkwürdiges zu entdecken. Aus der Erklärung kann er weiter nichts herleiten, als daß alle Durchmesser einander gleich sind, daß sie die Kreisfläche halbiren, und daß daher eine Chorde, die kein Durchmesser ist, den Kreis in zwey ungleiche Theile theilt. Der Geometer aber zeichnet darin ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Schenkel dem Halbmesser des Kreises gleich sind, und dessen Scheitel in den Mittelpunct des Kreises fällt. Aus den Eigenschaften dieses Dreyecks leitet er schon einiges für den Kreis her. Zwey solcher Dreyecke mit einem gemeinschaftlichen Schenkel führen ihn auf die Vergleichung der Winkel am Umfange und an dem Mittelpuncte, und diese leitet ihn allmählig immer weiter.

Nur noch eine Bemerkung zum Schlusse dieser Kritik. Kant behauptet, daß die Philosophie eben sowol von Größen handele als die Mathematik, z. B. von der Totalität, der Unendlichkeit u. s. w. Diese so genannten Größen sind doch von einer andern Art als die mathematischen. Aber Kant vermengt auch bey seinen Kategorien und deren Anwendung die logische Quantität und Qualität, jene mit der mathematischen, diese mit der physischen. Seine Nachfolger oder Nachbeter verfahren mit den so genannten Kategorien noch schlimmer, und machen eine steife, mechanische Topik daraus.

Die Übereinstimmung der durch Rechnung gefundenen Resultate mit den gezählten oder gemessenen Größen, oder der durch eine abstracte geometrische Construction gefundenen Verhältnisse mit der sinnlichen Zeichnung ist nothwendig, wenn nämlich die Data zu der Rechnung genau sind, und in der Zeichnung kein Fehler gemacht wird. Zusammensetzungen der Zahlen in bestimmten Zahlen können denen im Abstracto nicht widersprechen,

Digitized by Google

und die mit den Dingen selbst vorgenommenen nicht denen mit bloßen Zahlen auf dem Papiere. So fern man bey sinnlichen ausgedehnten Größen nur auf die Ausdehnung nach der Länge, Oberfläche oder des räumlichen Inhalts, oder die Lage sieht, muß alles, was sich darauf bezieht, mit der Rechnung oder den gefundenen Verhältnissen zusammentreffen.

Die mathematische Methode ist ein Muster einer streng wissenschaftlichen. Sie gebraucht vollkommen bestimmte und deutliche Begriffe, geht von unbezweifelbaren Grundsätzen aus, und kettet die Schlüsse so zusammen, daß nirgends eine schwache Stelle oder gar eine Lücke entsteht. Dieses wird durch die Form der mathematischen Schlüsse, die auf ihrem Gegenstande beruht, möglich. Die Beschaffenheit unserer Erkenntniß in andern Dingen läßt es nicht zu jenes Muster zu erreichen, allein im Allgemeinen muß man eben so verfahren, besonders muß man suchen mit den Begriffen aufs Reine zu kommen, und sich darüber gegenseitig zu verständigen. Die philosophischen Streitigkeiten haben vielleicht am häufigsten ihre Quelle in der Bildung der Begriffe, und der Unbestimmtheit, worin man sie läßt.

Die äußere Form der mathematischen Methode ist, daß man den Sätzen ihre Benennungen beyfügt: Lehrsatz, Aufgabe, Zusatz, Lehnsatz, Anmerkung (Scholium); daß man den Satz, der erwiesen werden soll, vor dem Beweise aufstellt; daß man eben so den Inhalt einer Aufgabe vorträgt, auch wol die Vorbereitung, die Auflösung und den Beweis jedes abgesondert folgen läßt; endlich, daß jedem Gliede der Schlußkette und jeder Forderung die Paragraphenzahl zugesetzt wird, wo der Beweis oder die Anweisung gegeben ist. Dieses hat allerdings seinen Nutzen, besonders was die Aufstellung der Sätze, und die Auflösungen der Aufgaben betrifft, um die Übersicht des Ganzen zu erleichtern. Das Citiren ist nicht durchgängig nothwendig, nur bey wichtigern Sätzen, weil der Leser nicht zur Bequemlichkeit verwöhnt werden muß. Allein die Form macht nicht

Digitized by Google

das Wesen aus. Die Nachahmungen der mathematischen Form bey andern Untersuchungen, welche durch Wolfs Beyspiel einmal Mode waren, haben gezeigt, daß die Form die Schlüsse nicht sicherer macht, so wenig als die vor Kurzem noch beliebte Topik der Kategorien auf neue Wahrheiten geführt hat.

Der Nutzen, den die Mathematik sowol für die Kenntniß der Natur als für die Bedürfnisse der bürgerlichen Gesellschaft leistet, erhellt aus dem vorher gemachten Abrisse so sehr, daß es ganz unnöthig seyn würde, darüber sich noch zu verbreiten. Zur Bildung des Geistes trägt sie dadurch ungemein viel bey, daß sie das Nachdenken schärft, die Aufmerksamkeit stärket, den Fleiß übt, den Verstand zur Ordnung, Deutlichkeit, Genauigkeit und schnellen Übersicht vieler Sätze gewöhnt, und dadurch das beste Vorbereitungsmittel zu andern Wissenschaften ist. Man muß bey mathematischen Untersuchungen nicht immer fragen, wozu sie nutzen mögen; es ist schon genug, wenn diese dem Geiste eine unterhaltende Übung seiner Kräfte gewähren, wenn sie zur Entwickelung sehr versteckter Verhältnisse auf einem unerwarteten Wege führen, wenn neue Vergleichungsmittel gefunden werden, um die Schwierigkeiten, die sich bey erweiterten Untersuchungen entgegenstellen, zu überwinden. Der mathematische Geist muß durch mancherley Übungen zu den höhern Erforschungen in der Natur vorbereitet werden. Die abstractesten Theorieen finden hier dereinst ihre Anwendung. Wenn aber auch manche einzelne Sätze und Aufgaben keinen weitern Nutzen haben, so mag man in Rücksicht auf diese die Mathematik mit dem Schachspiele vergleichen, wo es durchaus nicht auf einen Gewinn, sondern auf die Kunst der Spieler ankommt. Bey den Werken der schönen Kunst liegt ja auch der ganze Zweck nur in dem Genusse der ästhetischen Darstellung. In der Zeitschrift, die Horen, XI. 1796, ist diese Ansicht der Mathematik, als einer reinen, selbstständigen Wissenschaft, recht gut angegeben. Ich setze zur Bestätigung des Gesagten dieses

Digitized by Google

Zeugniß aus einer ästhetischen Schrift her. Die Verse hätten nur etwas wohlklingender seyn sollen.

Archimedes und der Lehrling.

Zu Archimedes kam ein wißbegieriger Jüngling;
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Früchte dem Vaterlande getragen,
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt.
Göttlich nennst du die Kunst! Sie ist es, versetzte der Weise.
Aber das war sie, mein Sohn, eh' sie dem Staat noch gedient.
Willst du nur Früchte, die kann auch eine Sterbliche zeugen;
Wer um die Göttinn freyt, suche in ihr nicht das Weib.

Mathematiker, eine der Mathematik kundige Person, im Französischen gewöhnlich Géometre. Hier folgen einige Bemerkungen über das Talent des Mathematikers aus dem Artikel, Géometre in dem Dictionnaire encyclopédique, welcher d'Alembert zum Verfasser hat.

Ein Mathematiker, wenn er sich auch darauf einschränkt, nur dasjenige zu verstehen, was von andern erfunden ist, muß doch verschiedene, nicht sehr gewöhnliche Fähigkeiten mit einander verbinden; ein richtiges Unterscheidungsvermögen für Wahrheit und Jrrschlüsse, eine leichte Fassungskraft sowol für das Einzelne als das Ganze, besonders bey verwickelten Beweisen, Gedächtniß, um nicht allein die Sätze, sondern auch wenigstens den Geist der Beweise zu behalten, um davon, wo es nöthig, Gebrauch zu machen. Der Mathematiker aber, der zu den Entdeckungen seiner Vorgänger noch neue hin-

Digitized by Google

zufügen will, muß nebst jenen Fähigkeiten des Geistes noch andere, mehr seltene, besitzen, Erfindungskraft, Tiefsinn, Scharfsinn und Stärke. Zu einem gelehrten Mathematiker wird schon ein nicht gemeiner Verstand erfordert; um ein großer zu seyn, muß man Genie haben, das ist, Erfindungskraft; denn Genie ist nichts anders als das Talent etwas Neues zu entdecken. Die Geschicklichkeit zur Mathematik ist freylich von anderer Art als die zu einem Epigramm, einem Gedichte, einem mit Beredsamkeit geschriebenen Aufsatze oder zum geschichtlichen Vortrage erfordert wird; aber darf man dann Geisteskraft auf diese Werke allein beschränken?

Man könnte fragen, ob mehr Geisteskraft dazu gehört habe, den Cinna, den Heraklius, die Rodogüne, die Horazier und den Polyeuctes zu verfassen, oder die Gesetze der Schwerkraft zu entdecken? Diese Frage ist keiner Beantwortung fähig, da beiderley Werke des Geistes zu verschieden sind, um mit einander verglichen werden zu können. Man kann aber auch fragen, ob nicht auf beiden Seiten das Verdienst gleich groß sey; und wirklich müßte derjenige, der die Wahl hätte, ein Newton oder ein Corneille zu seyn, sich sehr in Verlegenheit befinden, oder er verdiente es nicht die Wahl treffen zu können. Dennoch nehmen sich viele, die das verachten, was sie nicht wissen, und was sie zu wissen glauben, nicht kennen, sehr oft heraus, über diese Frage zu entscheiden, wiewol sie noch fern davon, Corneille würdigen, oder Newton lesen zu können, nicht einmahl einen Campistron zu beurtheilen oder den Euklides zu verstehen im Stande sind.

Obgleich diejenige Kraft des Geistes, welche zur Mathematik erfordert wird, von einer andern Art ist, als diejenige, wodurch man sich in den schönen Redekünsten hervorthut, so schließen sich doch beide einander nicht aus. Dennoch pflegt man, wenn man einen Mathematiker auf eine recht verbindliche Art loben will, von ihm zu sagen, er sey ein großer Mann in seinem Fache, und dem ungeachtet ein geistreicher Kopf, ein Mann von Geschmack. Es finden sich aber nicht selten die Bey-

Digitized by Google

spiele, daß beides mit einander vereinigt ist. Pascal, der ein so schönes geometrisches Werk über die Cykloide geliefert hat, und der vielleicht der größte Geometer auf der Welt geworden wäre, wenn er nicht aus einer zu ängstlichen Religiosität sein Talent zurückgesetzt hätte; dieser Pascal war zugleich ein sehr witziger Kopf; seine Lettres provinciales sind ein Meisterstück von Scherz und Beredsamkeit, das ist, ein Muster in zweyerley, dem Scheine nach unverträglichsten, Gattungen der Schreibart. Fontenelle, der ein angenehmer Schriftsteller und Mathematiker zugleich war, darf vielleicht nicht angeführt werden, weil man sagen möchte, er sey (als Secretär der Akademie der Wissenschaften) zufällig ein Mathematiker geworden. Dagegen aber kann man Descartes anführen, dessen philosophische Werke für seine Zeit ungemein gut geschrieben sind; ferner die Gedichte von Manfredi, die Fontenelle mit so vielem Grunde gelobt hat; das Gedicht, welches Halley den Newtonischen Principien der Naturwissenschaften vorgesetzt hat, und noch andere solche Beyspiele.

Die Mathematik, sagt man ferner, giebt dem Geiste eine Dürre. Das mag seyn, wenn die Anlage von Natur schon da ist, und in diesem Falle würde man an den Schönheiten in den Werken der Einbildungskraft nicht mehr Geschmack finden, wenn man auch die Mathematik gar nicht studirt hätte. Wer aber mit dem Talent zur Mathematik von der Natur zugleich einen für andere Gegenstände biegsamen Geist erhalten hat, der bedacht ist, diese glückliche Gewandtheit sich zu erhalten, dadurch, daß er nicht unablässig über Linien und Rechnungen gebückt sitzt, sondern auch mit der angenehmen Literatur und Philosophie sich beschäftigt, der wird über der Sorgfalt für die nothwendige Strenge in den Beweisen den Geschmack an den Werken der schönen Kunst nicht verlieren; er wird im Stande seyn, ein Problem aufzulösen und einen Dichter zu lesen, die Bewegungen der Planeten zu berechnen, und an einem Schauspiele Vergnügen zu finden.

Digitized by Google

Der Geist der Mathematik ist der Geist der Ordnung und Genauigkeit. Wer zu jener Wissenschaft aufgelegt ist, muß auch diesen haben, und es wäre ein Wunder, wenn er nicht bey Untersuchungen anderer Art nach demselben verführe. Sollte ein Mathematiker in einem andern Fache außer dem seinigen sich irren, so wird die Schuld eher an den Grundsätzen als an den Schlußfolgen liegen. Beruht eine Wissenschaft ganz auf Schätzung der Wahrscheinlichkeiten, so mag ein Kopf, der an die strengen Beweise der Mathematik gewöhnt ist, vielleicht nicht ein genugsam feines Unterscheidungsgefühl für das mehr und minder wahrscheinliche haben.

Manche glauben, daß ein Mathematiker, da er beständig mit Rechnungen umgeht, zum Spiel vorzügliche Geschicklichkeit haben müsse. Allein die Combinationen in der Mathematik geschehen langsam und vollständig, mit großer Vorsicht, im Spiele aber schnell, auf der Stelle und im Ganzen, wobey es weniger auf Regeln als auf eine Art von Instinct, der durch Übung erhöht ist, ankommt. Daher kann ein großer Mathematiker ein sehr mittelmäßiger Spieler seyn, wie es in der That meistens der Fall ist.

Zu den Beyspielen, die d'Alembert anführt, daß Mathematiker auch der schönen Redekunst fähig sind, gehört er selbst, der unter den neuern Literatoren Frankreichs eine ausgezeichnete Stelle einnimmt; auch unser Kästner, dessen Sinngedichte zu den witzigsten zu rechnen sind. Er war, wie bekannt genug ist, ein sehr allgemeiner Gelehrter, und suchte, mehr als es hätte wol seyn sollen, Verzierungen auch im mathematischen Vortrage.

Bey der Frage über die Verdienstlichkeit der Werke eines Newton und Corneille bemerke ich nur, daß Newtons Principien den Entwurf zu einem Gesetzbuche für alle Planetensysteme enthalten.

Mercier hat neulich behauptet, daß man gegenwärtig ein guter Mathematiker werden könne, wie man ein guter Schlösser werden kann, und daß die Kluft, die sonst die hohe Mathematik unzugänglich machte, durch die

Digitized by Google

Brücke, welche Euler darüber geschlagen hat, leicht übersteiglich geworden sey. Anders sey es mit der Kunst zu schreiben beschaffen. Die Schreibart eines de la Fontaine lasse sich nicht erlernen, und bey der zwölften Zeile könne man schon abnehmen, ob ein Schriftsteller einen eigenen Styl habe, oder ob er aus dem Gedächtniß schreibe.

Mercier, sagt man, ist eifersüchtig über das große Ansehen, welches die Mathematiker und Physiker in dem National-Institut haben. Freylich lassen sich die mathematischen Sätze, welche schon erfunden sind, erlernen; allein sie zu entdecken war so gut ein Werk des Genies, als in der Dichtkunst die Hervorbringung eines Originalstücks.

Media et extrema ratio, s. **extrema et media ratio.** Th. II. S. 177.

Mediale, s. Irrational. Th. II. S. 950.

Medietates, s. Mittel.

Mercators Reihe für die Hyperbel, s. Logarithmus (139) und Quadratur.

Mesolabum ist die Benennung, welche Eratosthenes einem von ihm erdachten Instrument, zwey oder mehrere geometrisch mittlere Proportionalen zwischen zwey gegebenen zu finden, gegeben hat, s. Th. I. S. 723. Auch ist Mesolabum der Titel einer Schrift von Slüse (Slusius) über die Aufgaben zwischen zwey gegebenen geraden Linien zwey mittlere proportionale zu finden, einen Winkel in drey Theile zu theilen, oder Aufgaben, die auf cubische Gleichungen führen, vermittelst der Durchschnitte zweyer Kegelschnitte aufzulösen, s. Th. I. S. 61.

Mesologarithmus ist in Keplers Rudolphinischen Tafeln der Neperische Logarithme der Tangente eines Winkels. Die Benennung ist daher, weil in Nepers und Ursinus Tafeln die Columne der logarithmischen Tangenten zwischen den Columnen der logarithmischen Sinus und

Digitized by Google

Cosinus steht. Dieses Kunstwort ist nicht in Gebrauch gekommen.

Meteoroscopium numerorum ist die allgemeine Überschrift dreyerley Gattungen von Tafeln in dem Opere Palatino de triangulis von Rhäticus und Otho.

Die erste Tafel enthält die Verhältnisse der Bogen der Parallelkreise auf der Kugel zu den gleichnamigen auf dem Äquator oder Meridian für jeden Grad des Abstandes von dem Äquator und durch alle Grade des Quadranten, mit den Sinus und Cosinus der Bogen in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel = 1000 0000. Es sey dieser Halbmesser = 1, der Abstand eines Parallels vom Äquator = β, der Winkel am Mittelpuncte eines Parallels = δ, so ist der zugehörige Bogen auf demselben = δ col β; der Sinus dieses Bogens = sin δ. col β, und der Cosinus = col δ. col β.

Die zweyte Tafel enthält für jeden Grad der Länge auf der Ekliptik in dem ersten Quadranten die zugehörige Rectascension und Declination, für eine Schiefe der Ekliptik von 23° 28′. Der zugleich angegebene Winkel der Ekliptik mit dem Declinationskreise ist ganz verkehrt berechnet. Z. B. für die Länge = 20° ist dieser Winkel angesetzt zu 24° 4′ 30″, da er doch 67° 48′ 27″ ist. Für 90° Länge ist derselbe 0° 4′ 20″ angegeben, da er doch hier = 90° ist. Diese Tafel füllt 10 Folioseiten, ist aber auf allen dieselbe, da die Columnen nur versetzt sind.

Die dritte Tafel enthält die Höhen der Sonne für die Stundenwinkel von 20 zu 20 Min. bis zu 3 Stunden, mittelst der Höhe der Sonne zu Mittage bey einer Polhöhe von 49° 6′. Die Mittagshöhen gehen von 16° 54′ bis 64° 54′, mit 1 Unterschieden von einem Grade. Auch ist das Azimuth auf der Nordseite beygefügt. Die Tafel ist nur für einen einzigen Parallel brauchbar. Auf die Veränderung der Declination in der Zwischenzeit des Mittags und der Zeit der Beobachtung ist nicht Rücksicht genommen.

Digitized by Google

Brücke, welche Euler darüber geschlagen hat, leicht übersteiglich geworden sey. Anders sey es mit der Kunst zu schreiben beschaffen. Die Schreibart eines de la Fontaine lasse sich nicht erlernen, und bey der zwölften Zeile könne man schon abnehmen, ob ein Schriftsteller einen eigenen Styl habe, oder ob er aus dem Gedächtniß schreibe.

Mercier, sagt man, ist eifersüchtig über das große Ansehen, welches die Mathematiker und Physiker in dem National-Institut haben. Freylich lassen sich die mathematischen Sätze, welche schon erfunden sind, erlernen; allein sie zu entdecken war so gut ein Werk des Genies, als in der Dichtkunst die Hervorbringung eines Originalstücks.

Media et extrema ratio, s. **extrema et media ratio**. Th. II. S. 177.

Mediale, s. Irrational. Th. II. S. 950.

Medietates, s. Mittel.

Mercators Reihe für die Hyperbel, s. Logarithmus (139) und Quadratur.

Mesolabum ist die Benennung, welche Eratosthenes einem von ihm erdachten Instrument, zwey oder mehrere geometrisch mittlere Proportionalen zwischen zwey gegebenen zu finden, gegeben hat, s. Th. I. S. 723. Auch ist Mesolabum der Titel einer Schrift von Slüse (Slusius) über die Aufgaben zwischen zwey gegebenen geraden Linien zwey mittlere proportionale zu finden, einen Winkel in drey Theile zu theilen, oder Aufgaben, die auf cubische Gleichungen führen, vermittelst der Durchschnitte zweyer Kegelschnitte aufzulösen, s. Th. I. S. 61.

Mesologarithmus ist in Keplers Rudolphinischen Tafeln der Neperische Logarithme der Tangente eines Winkels. Die Benennung ist daher, weil in Nepers und Ursinus Tafeln die Columne der logarithmischen Tangenten zwischen den Columnen der logarithmischen Sinus und

Digitized by Google

Cosinus steht. Dieses Kunstwort ist nicht in Gebrauch gekommen.

Meteoroscopium numerorum ist die allgemeine Überschrift dreyerley Gattungen von Tafeln in dem Opere Palatino de triangulis von Rhäticus und Otho.

Die erste Tafel enthält die Verhältnisse der Bogen der Parallelkreise auf der Kugel zu den gleichnamigen auf dem Äquator oder Meridian für jeden Grad des Abstandes von dem Äquator und durch alle Grade des Quadranten, mit den Sinus und Cosinus der Bogen in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel = 1000 0000. Es sey dieser Halbmesser = 1, der Abstand eines Parallels vom Äquator = β, der Winkel am Mittelpuncte eines Parallels = δ, so ist der zugehörige Bogen auf demselben = $\delta \cos\beta$; der Sinus dieses Bogens = $\sin \delta . \cos \beta$, und der Cosinus = $\cos \delta . \cos \beta$.

Die zweyte Tafel enthält für jeden Grad der Länge auf der Ekliptik in dem ersten Quadranten die zugehörige Rectascension und Declination, für eine Schiefe der Ekliptik von 23° 28′. Der zugleich angegebene Winkel der Ekliptik mit dem Declinationskreise ist ganz verkehrt berechnet. Z. B. für die Länge = 20° ist dieser Winkel angesetzt zu 24° 4′ 30″, da er doch 67° 48′ 27″ ist. Für 90° Länge ist derselbe 0° 4′ 20″ angegeben, da er doch hier = 90° ist. Diese Tafel füllt 10 Folioseiten, ist aber auf allen dieselbe, da die Columnen nur versetzt sind.

Die dritte Tafel enthält die Höhen der Sonne für die Stundenwinkel von 20 zu 20 Min. bis zu 3 Stunden, mittelst der Höhe der Sonne zu Mittage bey einer Polhöhe von 49° 6′. Die Mittagshöhen gehen von 16° 54′ bis 64° 54′, mit 1 Unterschieden von einem Grade. Auch ist das Azimuth auf der Nordseite beygefügt. Die Tafel ist nur für einen einzigen Parallel brauchbar. Auf die Veränderung der Declination in der Zwischenzeit des Mittags und der Zeit der Beobachtung ist nicht Rücksicht genommen.

Digitized by Google

Die Benennung, Meteoroscopium, bedeutet etwas, das zur Betrachtung des in der Höhe befindlichen dient, von μετεωρος, hoch oder erhaben, und σκοπειν, betrachten.

Methode ist erstlich eine gewisse Anordnung der Sätze und Aufgaben, hier der mathematischen. Diese mag auf mancherley Art gemacht werden. Es versteht sich, daß zu dem Beweise eines jeden Satzes die Prämissen alle in dem vorhergehenden sich finden, und daß zu allem, was bey der Auflösung einer Aufgabe zu construiren oder zu berechnen ist, die Art, wie es bewerkstelligt wird, in dem Vorhergehenden gezeigt sey. Dann aber muß auch die Reihe der Sätze und Aufgaben so eingerichtet werden, daß die Beweise und die Auflösungen so kurz und so faßlich, als es nur möglich seyn mag, werden. Ein Satz findet überhaupt da seine Stelle, wo alles zu dessen Erweise nöthige vorbereitet worden ist, und zwar so, daß der Beweis dadurch aufs kürzeste und einleuchtendste werde. Wenn ein Beweis zu umständlich wird, so muß man suchen, ob man den Weg dazu nicht durch Mittelsätze erleichtern möge, die gleichsam Ruheplätze für den Leser abgeben. Auf gleiche Art verhält es sich mit den Auflösungen der Aufgaben.

Es lassen sich nicht immer die Sätze und Aufgaben nach dem Gegenstande anordnen. Denn sehr oft findet dasjenige, was über einen Gegenstand beygebracht werden soll, nicht alles in dem Vorhergehenden seine Erweisgründe. Die Anordnung nach dem Inhalte muß der Anordnung, die der Schärfe der Beweise gemäß ist, immer nachstehen. Euklides handelt in dem ersten Buche seiner Elemente von Linien, Winkeln und Flächen durcheinander. Dieses ist gar nicht wider die gute Methode. Denn ihm kam es auf diejenige Anordnung an, wobey die Strenge der Beweise die Regel ist. In den folgenden Büchern, nachdem die Prämissen zu den Erweisen der Sätze und der Auflösungen in dem ersten niedergelegt sind, beobachtet er die Anordnung nach dem Inhalte.

Digitized by Google

Die Art, wie die Erweise der Sätze geführt, und die Auflösungen gefunden werden, ist zweyerley, die synthetische und die analytische, s. Analysis als Methode, Th. I. S. 86 ff. und Synthesis.

Zweytens ist Methode die Angabe eines mehr oder weniger allgemeinen Verfahrens zur Auflösung einer Gattung von Aufgaben. Sie gründet sich auf eine gewisse Theorie für eine Verbindung von Größen. Auf den Methoden in diesem Verstande beruht der Unterschied der ältern und neuern Mathematik. Die neuern sind viel befassender und tiefer eingreifend, als die in der ältern. Erfindungen in der Mathematik sind eigentlich Angaben von Methoden, wodurch auf eine kürzere und allgemeinere Art das geleistet wird, was vorher nur etwa in einzelnen, wenig schwierigen, Fällen hatte bewerkstelligt werden können.

Die Exhaustions-Methode der griechischen Mathematiker war sinnreich, aber nur in wenigen Fällen hinreichend; die Methodus indivisibilium continuorum von Cavaleri gieng etwas weiter, die Arithmetica infinitorum von Wallis noch weiter, aber die Methodus differentialis von Leibnitz oder Methodus fluxionum von Newton ward ein sicherer, bestimmt vorgezeichneter Weg, sowol diejenigen Aufgaben aufzulösen, wobey es erfordert wird, die letzten Verhältnisse zu finden, als auch diejenigen, bey welchen man von diesen Verhältnissen zu der Relation der Größen selbst geht. Das letztere erfordert wieder oft besondere Methoden, z. B. der Absonderung der veränderlichen Größen oder der Multiplication durch eine Function derselben. Die Methode der partiellen Differentiale und der Integrationen, wo dergleichen zum Grunde liegen, ist wieder eine Erweiterung der anfänglichen Differential- und Integralrechnung.

Die Methode vom Größten und Kleinsten liefert allgemein, was z. B. Fermat in einzelnen Fällen gefunden hatte. Die nach Guldin benannte Methode den Inhalt einer Figur zu finden ist für den Zustand der Wissenschaft zu seiner Zeit sinnreich, allein gegenwärtig unnöthig, au-

Digitized by Google

ßerdem, daß sie sehr eingeschränkt ist. S. Centrobaryca methodus. Th. I. S. 428 ff.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten ist ein sehr bequemer Weg irgend einen analytischen Ausdruck einer Größe in eine Reihe zu verwandeln.

Taylors Lehrsatz, la Grange's Lehrsatz, Hindenburgs combinatorische Analysis, Arbogasts Derivationsrechnung sind noch andere Beyspiele von Methoden in der Mathematik.

Million bezeichnet eine Zahl von tausend mahl tausend Einern, s. Zahl.

Minuendus ist die Zahl, von welcher eine andere Zahl abzuziehen ist.

Minus, ein Kunstwort, welches anzeigt, daß die Größe, welcher es vorgesetzt wird, von einer andern abgezogen werden muß. Das Zeichen ist —. Wo das zufolge einer allgemeinen Formel gefundene Resultat einer Rechnung dieses Vorzeichen bekommt, deutet es an, daß der in der allgemeinen Berechnung angenommene Fall der Verbindung der Größen ein anderer ist, als der Fall der Aufgabe, und daß in jenem die gesuchte Größe durchaus ihr Vorzeichen ändern muß, worauf das Resultat das Vorzeichen + erhalten wird. S. entgegengesetzte Größen.

Minute ist der sechzigste Theil einer Einheit, gewöhnlich der Grade oder der Stunden. Der sechzigste Theil einer Minute ist minutum secundum, oder kurz, Secunde. Davon der sechzigste Theil ist minutum tertium, oder Tertie, u. s. w. Diese für unsere genauern Berechnungen unbequeme Eintheilung mag daher beliebt worden seyn, weil die Zahl 60 viele Theiler hat, und daß daher ein Bruchtheil durch die Brüche, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, und die Producte derselben, wo nöthig, mit einigen Einern in den Zählern, ausgedruckt werden kann.

Digitized by Google

z. B. 42 Min. sind $\frac{7}{10} + \frac{1}{100}$ eines Grades; 37 Min. sind $\frac{6}{10} + \frac{2}{100}$. Ptolemäus theilt auch den Halbmesser in 60 Theile, und jeden Theil in eben so viele. Z. B. die Chorde von 36° giebt er an zu 37°4'55'', das ist 37,08194 ... solcher Theile, deren der Halbmesser 60 hat. Nimmt man diesen = 1, so wird ch. 36° = 0,618032, und sin 18° = 0,309016 nahe wie in unsern Tafeln.

Die Bezeichnung der Minuten geschieht durch ein Strichelchen oben an der Zahl, der Secunden durch zwey u. s. f. Z. B. 53'28''17'''.

Mittel ist eine Größe, die zwischen zwey andern enthalten ist, und aus diesen auf eine gewisse Art bestimmt wird. Diese Art ist dreyerley.

1. Das arithmetische Mittel zwischen zwey gleichnamigen Größen macht mit ihnen eine sterige arithmetische Proportion aus, z. B. 10, 15, 20. Es ist die halbe Summe derselben, wie hier $15 = \frac{1}{2}(10 + 20)$ ist. Das arithmetische Mittel zwischen n gleichnamigen Größen ist die Summe derselben durch n dividirt. Dieses Mittel kommt meistens in praktischen Rechnungen vor, z. B. wenn verschiedene Beobachtungen oder Berechnungen einer und derselben Größe aus jenen gemacht sind, sehr häufig in der Astronomie. Die Anzahl der Gebornen, Gestorbenen und Getraueten an einem Orte giebt man nach einem arithmetischen Mittel, einem Durchschnitt, mehrerer Jahre an, eben so den Ertrag eines Landgutes oder einer andern etwas veränderlichen Einnahme oder Ausgabe.

2. Das arithmetische Mittel zwischen zwey ungleichnamigen Größen ist auf gleiche Art die Hälfte ihres Unterschiedes absolut genommen, oder, zwischen a und −b ist das arithmetische Mittel $= \frac{1}{2}(a - b)$. Man kann sich dieses durch eine Zeichnung zweyer sich schneidenden geraden mit ihren Coordinaten noch deutlicher machen.

3. Das arithmetische Mittel mehrerer ungleichnamigen Größen ist das Aggregat derselben, jeder mit ihren Vorzeichen genommen, dividirt durch die Anzahl aller. —

Digitized by Google

Denn man setze zu jeder derselben eine Größe, wodurch die subtractiven oder negativen Größen alle positiv oder den andern gleichnamig werden. Alsdann wird das Mittel nach (1.) bestimmt. Nimmt man von diesem den nten Theil der n mahl zugesetzten Größe, d. i. sie selbst, weg, so erhält man das Mittel der vorgegebenen Größen.

4. Das geometrische Mittel zwischen zwey Größen ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen denselben, oder die Quadratwurzel aus ihrem Producte. Die beiden äußern Größen seyn a und c, das Mittel b, so ist $a : b = b : c$, wo $bb = ac$. In der Geometrie kommt es vorzüglich vor.

5. Das arithmetische Mittel zweyer Größen ist größer als das geometrische zwischen denselben. — Denn es sey b das geometrische Mittel zwischen a und c; β das arithmetische, so ist $bb = ac$ und $2\beta = a + c$. Da $4\beta^2 = a^2 + 2ac + c^2$ ist, so ist $4\beta^2 - 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$, und $\beta^2 - b^2 = \frac{1}{4}(a - c)^2$. Da das Quadrat immer positiv bleibt, so ist β größer als b.

6. Das harmonische Mittel b zweyer Zahlen a und c ist $= \frac{2ac}{a + c}$. Es ist nämlich $a - b : b - c = a : c$. (Harmonische Proportion, Th. II. S. 697).

7. Die drey Mittel lassen sich geometrisch bequem neben einander darstellen. Es seyn AD, DB, (Fig. 120.) die beiden äußern Größen auf der geraden AB. Diese werde in C halbirt, so ist AC oder CB das arithmetische Mittel. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser AC einen Halbkreis AEB, und ziehe durch D auf AB die senkrechte DE bis an den Kreis in E, so ist DE das geometrische Mittel. (Kreis, 29). Aus D ziehe man DF senkrecht auf CE, so ist EF das harmonische Mittel. — Was das letztere betrifft, so ist in den ähnlichen Dreyecken CDE, EFD, $CE : ED = ED : EF$. Da nun auch $AD : ED = ED : DB$, oder $ED : AD = DB : ED$ ist, so ist durch Zusam-

Digitized by Google

mensetzung der Verhältnisse, CE : AD = DB : EF, und EF ist das harmonische Mittel zwischen AD und DB (6.)

Pappus führt diese Construction der drey Medietäten an als eine von einem Ungenannten herrührende. Collect. Mathem. L. III. p. 12. Den Beweis hat dieser nicht zugesetzt. Er selbst giebt eine andere Construction, die jener aber weit nachsteht.

8. Die Alten haben noch sieben Arten von Medietäten betrachtet, die etwas verwandt mit der harmonischen sind. Es sey a — b : b — c wie c : a, oder wie c : b, oder wie b : a, so ist b eine Medietät. Die erste dieser dreyen ist die contraharmonische. Ferner sey a — c : a — b wie b : c, oder wie a : b, oder wie a : c, oder es sey a — c : b — c wie b : c, so ist b auch eine Medietät. Es ist nicht der Mühe werth, darüber noch Vergleichungen anzustellen. Die Pythagoräer haben sich viel mit den Medietäten beschäftigt, wie man aus des Theons Schrift über die mathematischen Kenntnisse zum Verständniß der platonischen Schriften, Cap. 61. sieht.

9. Eratosthenes hat von den Medietäten (περὶ μεσοτήτων) in zwey Büchern gehandelt. Pappus erwähnt derselben in der Vorrede zu dem siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen, ohne aber von der Behandlung das geringste anzuführen. Das griechische Kunstwort, μεσοτης, Medietät, bedeutet, nach der Erklärung, die Pappus im dritten Buche giebt, was wir eine stetige Proportion nennen; es sey eine arithmetische, geometrische oder harmonische. Die geometrische nannten die Alten insbesondere Analogie. Daher sagt Pappus, jede Analogie sey eine Medietät, aber nicht umgekehrt. Vielleicht hat Eratosthenes insbesondere sich mit den schwerern Fällen der harmonischen Medietät beschäftigt, wo der mittlere Terminus zwey Werthe erhält. Montucla glaubt (Hist. des Mathém. T. I. p. 280.), daß folgende zwey Aufgaben von Eratosthenes behandelt seyn möchten.

Digitized by Google

10. Es sind in einer Ebene zwey gerade Linien gegeben; in derselben werde noch eine dritte gezogen, die als Axe zu den Ordinaten an jene beiden Linien diene. Es wird der Ort gesucht, woran die Ordinaten das dritte Glied einer stetigen Proportion, es sey arithmetischen, geometrischen oder harmonischen, zu den correspondirenden Ordinaten an jene beiden Linien sind. Oder, es sind in einer Ebene drey gerade Linien gegeben, und eine vierte wird gezogen, die auf gleiche Art als Axe dient; es wird der Ort gesucht, woran die Ordinaten die vierte Proportionale zu den Ordinaten an die drey geraden ist, in einer der drey Proportionen.

Man kann hierzu noch die Aufgabe setzen, den Ort für die mittlere Proportionale zwischen den Ordinaten an zwey gegebene geraden zu finden. — Montucla sagt, daß jene beiden Aufgaben durch die neuere Analysis leicht aufgelöset werden. Sie verdienen, daß die Auflösung hier angezeigt werde.

11. Zuerst seyn zwey gerade Linien gegeben. Die Gleichungen für dieselbe seyn

I. $t = ax + b$; II. $u = cx + d$.

(Linie, 13). Die Coordinaten für den gesuchten Ort seyn x und y, von welchen x die für den Ort und die beiden geraden Linien gemeinschaftliche Abscisse ist. Erstlich sey die Ordinate y die dritte arithmetisch-proportionale zu t und u, so ist $y = 2u - t$, und es ist

$$y = (2c - a)x + 2d - b.$$

Der Ort ist also eine gerade Linie.

Zweytens sey y die dritte geometrisch-proportionale, so ist $y = \frac{uu}{t}$, und

$$(ax + b)y = (cx + d)^2, \text{ oder}$$
$$c^2x^2 - axy + 2cdx - by + d^2 = 0.$$

Die Gleichung gehört für einen Kegelschnitt. Daß dieser keine Ellipse seyn könne, ergiebt sich aus der Beschaffenheit der Aufgabe sogleich; aber auch keine Parabel, weil für unendliche entgegengesetzte x die unendlichen Or-

Digitized by Google

dinaten auch entgegengesetzt sind. Der Ort ist also eine Hyperbel, und wegen des fehlenden Gliedes y^2 ist die eine ihrer Asymptoten der Axe der y parallel (Krumme Linien der ersten Classe, 3 u. 33). Zur Vergleichung unserer Gleichung mit der allgemeinen am a. O. hat man die Bezeichnungen x und y mit einander zu vertauschen. Wenn man $x = -\frac{b}{a}$ nimmt, so wird y unendlich groß, und die eine Asymptote geht durch den aus dieser Gleichung bestimmten Punct in der Richtung der y. Setzt man x unendlich groß, so wird $y = \frac{c^2 x}{a}$. Mit der geraden Linie, die durch diese Gleichung bestimmt wird, ist die andere Asymptote parallel, wenn sie es nicht selbst ist.

Drittens sey y die dritte harmonisch-proportionale zu t und u, so ist $y = \frac{tu}{2t-u}$, und der Ort für diese proportionalen ist ebenfalls eine Hyperbel.

12. Es seyn drey gerade Linien gegeben, durch die Gleichungen: I. $t = ax + b$; II. $u = cx + d$; III. $v = ex + f$. Nun ist entweder $y = u + v - t$; oder $y = \frac{uv}{t}$, oder $y = \frac{tv}{2t-u}$. In dem erstern Falle ist der Ort eine gerade Linie, in den andern beiden eine Hyperbel.

13. Sind zwey gerade Linien gegeben, und nimmt man $yy = tu$, so ist $y^2 - acx^2 - (ad + bc)x - bd = 0$. Diese Gleichung gehört für eine Hyperbel, wenn a und c gleichnamige Größen sind, aber für eine Ellipse, wenn sie ungleichnamig sind (a. a. O. 31 u. 29). Die Ordinate y hat nur mögliche Werthe, wenn t und u gleichnamig sind. Sind a und c gleichnamig, so schneiden die beiden geraden Linien die Abscissenlinie nach derselben Gegend hin unter gleichnamigen Winkeln, und nur innerhalb gewisser Gränzen von dem Anfangspuncte an sind die Ordinaten t und u ungleichnamig, nämlich zwischen

Digitized by Google

ihren Durchschnittspuncten mit der Abscissenlinie. Daher ist hier eine Hyperbel der gesuchte Ort, da diese krumme Linie auch innerhalb gewisser Gränzen unmögliche Ordinaten hat. Sind aber a und c ungleichnamig, so sind die Durchschnittswinkel auch ungleichnamig, und die Ordinaten t und u sind nur innerhalb der Durchschnittspuncte gleichnamig; daher der Ort eine Ellipse ist.

14. Der Ort für die mittlere Proportionale jeder der drey Arten möchte noch eher von Eratosthenes untersucht seyn, als der für die dritte oder vierte Proportionale. Jene Aufgabe folgt natürlicher Weise auf die von der Bestimmung einer einzelnen mittlern Proportionale.

Modulus ist überhaupt was einen Maßstab abgiebt, insbesondere bey Logarithmen, wo der Modulus das Verhältniß der Logarithmen in einem System zu denen in dem natürlichen System, bey gleichen zugehörigen Zahlen angiebt, s. Logarithmus, 24. Das Kunstwort ist in dieser Materie von **Cotes** eingeführt, **Harmonia mensurarum**, im Anfange. Er nennt **ratio modularis** ein bestimmtes und unveränderliches Verhältniß, das zur Messung aller andern dient. Dieses ist ihm das von e : 1, oder 2,7182818 . . : 1, wo e die Basis des natürlichen Systems ist. Der Modulus in irgend einem System der Verhältnißmaßen ist das Maß dieses Verhältnisses. Es ist nämlich M = log. artif. e (Logar. 35), also das Maß des Verhältnisses e : 1 in dem künstlichen System. So wie man überhaupt eine Menge mit der Einheit A auf eine gleichgeltende Menge mit der Einheit B bringt, durch die Multiplication mit dem Werthe der Einheit A in Beziehung auf die Einheit B (z. B. 100 Fl. = $\frac{2}{3}$. 100 Rthlr.), so geschieht es auch bey der Reduction natürlicher Logarithmen auf künstliche. Das Verhältniß 1 : e, welches in dem natürlichen System als Einheit dient, hat in dem künstlichen, wo das Verhältniß 1 : a zur Einheit dient, einen Werth, der durch log. artif. e ausgedruckt wird. Darum muß ein künstlicher Logarithme mit

Digitized by Google

logar. artif. e multiplicirt werden, um ihn in einen künstlichen zu verwandeln.

Auf gleiche Art ist, wenn der künstliche Logarithme in einen natürlichen verwandelt werden soll, der künstliche Logarithme mit dem log. nat. a zu multipliciren, weil nun anstatt des Verhältnisses 1 : a das 1 : e zur Einheit genommen wird. Daher ist log. artif. $e = \frac{1}{\text{log. nat. a}}$. (Logarithmus, 34. 35.)

In der Baukunst dient der halbe Durchmesser einer Säule am Fuße als Maßstab für alle Theile, daher er hier auch der Modul heißt.

Möglich ist eine Größe, deren Zusammensetzung keinen Widerspruch gegen nothwendige Bedingungen enthält. So ist ein Dreyeck, dessen Seiten gegeben werden, möglich, wenn die Summe je zweyer derselben größer ist als die dritte. Ein Dreyeck in einen Kreis zu beschreiben ist möglich, wenn der Inhalt desselben nicht größer als der Inhalt des gleichseitigen Dreyecks ist, welches der Kreis faßt. (Größtes und Kleinstes, 12.). Es ist möglich, aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und ihrem Producte die Zahlen zu finden, wenn das Quadrat von der halben Summe der Zahlen nicht kleiner ist als das gegebene Product. (Gleichung, 36.). Die Möglichkeit, daß eine cubische Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, drey Wurzeln habe, fordert, daß $4b^3$ nicht kleiner sey als $27c^2$ (Gleichung, 70.)

Man sieht, daß hier blos die geometrische und analytische Möglichkeit verstanden wird.

Moment wird bisweilen statt Fluxion oder Differential von den Engländern gebraucht.

Monachus (μοναχος) ist die Benennung, die in der Schrift des Apollonius über den bestimmten Schnitt (s. Th. I. S. 293.) einigen Sätzen gegeben wird, welche einen einzelnen Fall einer allgemeinen Aufgabe enthalten.

Digitized by Google

Oder es bezeichnet als Beywort zu λογος, d. i. Verhältniß, ein bestimmtes individuelles unter unendlich vielen. In des Pappus mathematischen Sammlungen, 7. Buche sind der 61ste, 62ste und 64ste Satz durch den Beysatz, Monachus, ausgezeichnet.

1. Die allgemeine Aufgabe, worauf sich der 61ste Satz bezieht, ist folgende. Auf der geraden Linie,

A B E C D

seyn vier Puncte, A, B, C, D, gegeben, es soll zwischen den beiden mittlern Puncten B, C ein Punct E gefunden werden, so daß das Verhältniß des Rechtecks von den Abschnitten zwischen E und zweyen der gegebenen Puncte zu dem Rechteck von den Abschnitten zwischen demselben und den übrigen beiden Puncten ein gegebenes sey. Ein besonderer Fall dieser Aufgabe (epitagma) ist, wenn jene erstern Puncte die beiden äußern, A, D, die beiden andern die mittlern sind. Der durch monachus bezeichnete Satz sagt aus, in welcher Lage des Punctes E das Verhältniß der beiden Rechtecke am kleinsten ist, und giebt auch dieses Verhältniß selbst an.

2. Man setze $AD = a$; $AB = b$; $AC = c$; $AE = x$. Jener Satz, durch diese Bezeichnungen ausgedruckt, ist: wenn $b(a-b) : c(a-c) = (x-b)^2 : (c-x)^2$ ist, so ist das Verhältniß $x(a-x) : (x-b) \times (c-x)$ am kleinsten, und $= a^2 : [\sqrt{c(a-b)} - \sqrt{b(a-c)}]^2$.

3. Wenn das Verhältniß $x(a-x) : (x-b) \times (c-x)$ gegeben wird, so wird x durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden, oder durch eine Construction, welche für Aufgaben dieser Art das Vermögen der alten Geometrie nicht überstieg. Allein wenn dasjenige x gefunden werden soll, für welches jenes Verhältniß am kleinsten ist, so war dieses so viel, als die kleinste Ordinate an einer krummen Linie des dritten Grades finden. Dieser Fall war wirklich schwer, und es ist ein Beweis eines großen geometrischen Scharfsinns, daß Apollonius diese Aufgabe durch seine Geometrie aufgelöst

Digitized by Google

hat. In der von Robert Simson wieder hergestellten Schrift des Apollonius findet man das Verfahren, welches höchst wahrscheinlich dieser große Geometer dabey und bey den verwandten Aufgaben gebraucht hat. Das Künstliche desselben wird noch mehr einleuchten, wenn man diese Aufgaben durch die neuere Analysis auflöset. Die Rechnung gewährt auch eine gute Übung in der Anwendung der Gleichungen vom zweyten Grade beiderley Art und ihrer Verknüpfung.

4. Man setze $\frac{x(a-x)}{(x-b)(c-x)} = z$. Sowol für $x = b$, als $x = c$ wird der Werth von z unendlich groß. Es giebt daher für ein x zwischen b und c einen Werth von z, der ein Kleinstes ist. Für diesen ist $dz = o$. (Größtes und Kleinstes, 28.) Nun ist, wenn man zur Abkürzung setzt $\frac{P}{Q} = z$, für $dz = o$, $Q\,dP = P\,dQ$, und daher, nach gehöriger Reduction der Differentialgleichung,

$$(a-b-c)\,x^2 + 2bcx - abc = o.$$

Die Proportion, bey welcher nach Apollonius z ein Kleinstes ist, giebt die Gleichung,

$$b(a-b)(c-x)^2 = c(a-c)(x-b)^2,$$

und nach gehöriger Reduction,

$$(ac - c^2 - ab + b^2)\,x^2 + 2bc(c-b)\,x + acb^2 - abc^2 = o.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung lassen sich durch $c-b$ dividiren, wodurch wird

$$(a-b-c)\,x^2 + 2bcx - abc = o,$$

übereinstimmig mit der aus unserer Lehre vom Größten und Kleinsten gefundenen Gleichung.

5. Es ist nun der Quotient z zu finden, welcher den zweyten Theil des Satzes beym Pappus nach Apollonius ausmacht.

Die positive Wurzel der gefundenen Gleichung ist

$$x = \frac{-bc + \sqrt{bc(a-b)(a-c)}}{a-b-c}.$$

Es

Die negative Wurzel gehört für einen andern zu diesem gehörigen Fall, da der Punct E außerhalb AD genommen wird. Es ist hieraus

$$a-x=\frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)}-\sqrt{bc}]\sqrt{(a-b)(a-c)}}{a-b-c}.$$

$$x-b=\frac{[\sqrt{c(a-c)}-\sqrt{b(a-b)}]\sqrt{b(a-b)}}{a-b-c}.$$

$$c-x=\frac{[\sqrt{c(a-c)}-\sqrt{b(a-b)}]\sqrt{c(a-c)}}{a-b-c}.$$

Auch ist

$$x=\frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)}-\sqrt{bc}]\sqrt{bc}}{a-b-c}.$$

Durch diese Werthe wird z oder $\frac{x(a-x)}{(x-b)(c-x)}$

$$=\frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)}-\sqrt{bc}]^2}{[\sqrt{c(a-c)}-\sqrt{b(a-b)}]^2}.$$

Man multiplicire die Wurzeln im Zähler und Nenner durch $\sqrt{(a-b)(a-c)}+\sqrt{bc}$, so wird die Wurzel im Zähler $=a(a-b-c)$, und die Wurzel im Nenner $=(a-b-c)\sqrt{c(a-b)}-(a-b-c)\sqrt{b(a-c)}$. Folglich ist der kleinste Werth des Quotienten

$$z=\frac{a^2}{[\sqrt{c(a-b)}-\sqrt{b(a-c)}]^2}$$

wie es Apollonius angiebt.

6. Multiplicirt man beide Wurzeln durch $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{b(a-b)}$, so wird

$$z=\frac{[\sqrt{c(a-b)}+\sqrt{b(a-c)}]^2}{(c-b)^2}.$$

Diese Form für z hat Apollonius nicht.

7. Aus den Werthen von $x-b$ und $c-x$ folgt $x-b:c-x=\sqrt{b(a-b)}:\sqrt{c(a-c)}$, oder $(x-b)^2:(c-x^2)=b(a-b):c(a-c)$, diejenige Proportion, bey welcher nach Apollonius das Verhältniß $x(a-x):(x-b)(c-x)$ am kleinsten ist.

Digitized by Google

8. In der allgemeinen Aufgabe, worauf sich der 62ste Satz beym Pappus bezieht, wird der Punct E in einen der beiden äußern Abschnitte AB oder CD gesetzt. Ein besonderer Fall derselben, wobey ein kleinstes Verhältniß Statt hat, ist folgender:

Es soll ein Punct E gefunden werden, so das AE.EB : CE.ED ein gegebenes Verhältniß sey. Nach Apollonius ist dieses Verhältniß am kleinsten, wenn, mit Beybehaltung der obigen Bezeichnungen, ist

4. $a(a+b)\,x\,(c-b) = (a-x)^2 : (x-c)^2$,

wo, wenn E auf AB fällt, $c-x$ anstatt $x-c$ zu nehmen ist. Das kleinste Verhältniß ist

$$[\sqrt{c(a-b)} + \sqrt{a(c-b)}]^2 : (a-c)^2.$$

9. Es ist hier, wenn E auf CD fällt,

$$\frac{x(x-b)}{(x-c)(a-x)} = z,$$

welcher Ausdruck mit dem in (4.) dieselbe Form hat. Es sind a und b mit einander vertauscht, und statt $c-x$ ist hier $x-c$ gekommen, da CE eine der in (1.) entgegengesetzte Lage hat. Inzwischen ist es nicht ein gleichartiger Fall mit dem in (4.), weil hier $z = o$ ist für $x = b$, und unendlich groß für $x = a$, umgekehrt wie in (4.) Daher muß die Rechnung für denselben besonders gemacht werden.

10. Für den kleinsten Werth von z wird wie in (4.) erhalten,

$$(a+c-b)\,x^2 - 2acx + acb = o.$$

Die Gleichung entsteht auch aus der in (4.), wenn a und b mit einander vertauscht werden. Sie hat zwey Wurzeln, weil der gesuchte Punct sowol zwischen A und B, als zwischen C und D liegen mag. Beide Wurzeln sind positiv, weil die beiden AE nach derselben Richtung genommen werden.

11. Auf dieselbe Art wie in (5.) wird gefunden z oder

$$\frac{x(x-b)}{(x-c)(a-x)} = \frac{[\sqrt{ac} + \sqrt{(a-b)(c-b)}]^2}{[\sqrt{a(a-b)} - \sqrt{c(c-b)}]^2}.$$

Digitized by Google

Es ist hier das Zeichen + vor der Wurzelgröße gebraucht. Multiplicirt man die Wurzel im Zähler und Nenner mit $\sqrt{a\,(a-b)} + \sqrt{c\,(c-b)}$, so ist

$$z = \frac{[\sqrt{c\,(a-b)} + \sqrt{a\,(c-b)}]^2}{(a-c)^2},$$

wie es Apollonius angiebt. Multiplicirt man mit $\sqrt{ac} - \sqrt{(a-b)\,(c-b)}$, so ist

$$z = \frac{b^2}{[\sqrt{c\,(a-b)} - \sqrt{a\,(c-b)}]^2}.$$

12. Wenn E zwischen A und B fällt, so ist $\frac{x\,(b-x)}{(c-x)\,(a-x)} = z$, und daher

$$z = \frac{[\sqrt{ac} - \sqrt{(a-b)\,(c-b)}]^2}{[\sqrt{a\,(a-b)} + \sqrt{c\,(c-b)}]^2},$$

oder kürzer,

$$z = \frac{b^2}{[\sqrt{c\,(a-b)} + \sqrt{a\,(c-b)}]^2}.$$

$$z = \frac{[\sqrt{c\,(a-b)} - \sqrt{a\,(c-b)}]^2}{(a-c)^2}.$$

Dieser Werth von z ist ein Größtes. Es ist nämlich $z = 0$ für $x = 0$; positiv für x, die zwischen o und b fallen, und wiederum $= 0$ für $x = b$, daher z bis zu einer gewissen positiven Größe anwächst, um von da an wieder abzunehmen. Apollonius und Simson haben diesen Fall eines einzelnen Verhältnisses nicht. Der absolute Werth des z, welches ein Größtes ist, ist kleiner als derjenige, der ein Kleinstes ist.

Simson rühmt die von Apollonius gefundene Bestimmung des kleinsten Verhältnisses z : 1 und den Beweis sehr, als eines so großen Geometers würdig, und fügt hinzu, daß er nur durch anhaltendes Forschen den 62sten Satz wieder hergestellt habe. Der griechische Text sey besonders in dieser Stelle ganz verdorben.

Digitized by Google

13. Man nehme drittens den Punct E außerhalb AD, so daß

E A B C D

AE . ED : BE . EC oder $x(x+a) : (x+b)(x+c) = z : 1$ sey. Setzt man $dz = 0$, so ist, wenn $AE = x$ gesetzt wird,

$$(a-b-c)x^2 - 2bcx - ahc = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind denen der Gleichung in (4.) gleich aber entgegengesetzt. (Gleichung. 34. 35.) Man nehme nun in der Rechnung (5.)

$$x = \frac{bc + \sqrt{bc\,(a-b)\,(a-c)}}{a-b-c},$$

so wird

$$z = \frac{[\sqrt{(a-b)\,(a-c)} + \sqrt{bc}]^2}{[\sqrt{c\,(a-c)} + \sqrt{b\,(a-b)}]^2}.$$

Multiplicirt man die Wurzel im Zähler und Nenner mit $\sqrt{(a-b)\,(a-c)} - \sqrt{bc}$, so wird

$$z = \frac{a^2}{[\sqrt{c\,(a-b)} + \sqrt{b\,(a-c)}]^2}.$$

Dieses Verhältniß giebt auch Apollonius an, beym Pappus, Prop. 64.

Multiplicirt man beide Wurzeln mit $\sqrt{c\,(a-c)} - \sqrt{b\,(a-b)}$, so wird

$$z = \frac{[\sqrt{c}\,(a-b) - \sqrt{b\,(a-c)}]^2}{(c-b)^2}.$$

Dieser Werth von z ist ein Größtes. Denn wenn er ein Kleinstes wäre, so müßte der Werth von z nach dem Anfangspuncte der Abscissen A hin zunehmen. Er nimmt aber auch wieder ab, da in A der Werth von z Null ist. Folglich gäbe es zwischen E und A noch einen größten Werth von z. Nun ist aber auch für die hier als negativ zu betrachtenden x nach der Richtung AD (weil die nach AE hin als positive angenommen sind) ein Kleinstes für z nach (4.) vorhanden. Die quadratische Gleichung für die zu einem kleinsten oder größten Werthe von

Digitized by Google

z gehörigen x giebt aber nur zwey Werthe dieſer Abſciſſe z; es muß alſo der Werth von z in E ein Größtes ſeyn.

14. Die ſtetige Reihe der z für eine ſtetige Reihe von Werthen x ſind die Ordinaten einer krummen Linie des dritten Grades, oder der zweyten Claſſe, von der Art, wie die in Fig. 63. abgebildete iſt. Krumme Linien der zweyten Claſſe, 58. Die Axen der Abſciſſen und der Ordinaten ſind hier diejenigen der Ordinaten und der Abſciſſen, wenn die Axe der Abſciſſen in die Linie AD gelegt wird. Zwey Aſymptoten gehen in den beiden Fällen (4, 13) durch die Puncte B und C, die dritte Aſymptote iſt parallel der unbeſtimmt verlängerten AD, oberhalb derſelben, oder nach der Gegend der poſitiven Ordinaten. In den Fällen 9 und 12 gehen die beiden, der Axe der z parallelen, Aſymptoten durch die Puncte C und A, und die dritte iſt der Axe der Abſciſſen parallel unterhalb derſelben. Jene beiden Fälle machen nur eine einzige Aufgabe aus, eben ſo wie die beiden andern. Die Auflöſung, welche die Frage nach einem Kleinſten beantwortet, dient auch zur Beantwortung der Frage nach einem Größten, nur durch Veränderung eines Wurzelzeichens.

15. Käſtner hat im J. 1798 in der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften eine Abhandlung über die Monachos Apollonii vorgeleſen, von welcher in den Götting. gel. Anzeigen, 1798, 104. St. ausführliche Nachricht gegeben wird. Die Abhandlung ſelbſt in den Commentationen der Societät habe ich nicht nachſehen können. Die hier gemachten algebraiſchen Entwickelungen werden daſelbſt ſich nicht finden.

Monas iſt die griechiſche Benennung für Einer. Im Plural, Monades.

Monom, eine eintheilige Größe, wie a oder x, im Gegenſatze gegen zweytheilige oder mehrtheilige Größe. Dies hindert nicht, ſie als eine Menge von Einheiten und Theilen der Einheit anzuſehen.

Digitized by Google

Multinomium, Polynomium, eine Größe, die aus unbestimmt vielen, von einander verschiedenen Theilen, auch deren Vielfachen zusammengesetzt ist.

Multiplicandus und Multiplicator, s. Multiplication.

Multiplication, Vervielfachung, ist ein arithmetisches Verfahren, wodurch man eine Zahl findet, worin eine gegebene Zahl eben so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in einer andern gegebenen Zahl. Diese beiden Zahlen heißen Multiplicandus und Multiplicator, beide Factoren, und die daraus entstandene Zahl das Product (Factum).

Ist der Multiplicator eine ganze Zahl, so ist Multipliciren die Zusammensetzung einer Zahl aus so vielen gegebenen gleichen Theilen, als Einer in einer andern Zahl vorhanden sind. In dem beygesetzten Schema ist AB einer der gegebenen gleichen Theile, oder der Multiplicandus; AC die andere gegebene Zahl, der Multiplicator, ABCD das Product, welches so viel gleiche Theile, wie AB, enthält, als Einer in AC stecken. Das Product stellt dieselbe Größe auf zweyerley Art dar, einmahl als eine Anzahl gleicher Theile, die als eine besondere Einheit betrachtet werden, zweytens als eine dekadisch (oder nach einer andern Form) geordnete Zahl, wozu die Einheit dieselbe wie in dem Multiplicandus ist.

A	* * * * *	B
	* * * * *	
	* * * * *	
C	* * * * *	D

Ist der Multiplicandus eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruche, der Multiplicator noch eine ganze Zahl, so wird sowol die ganze Zahl als die Anzahl der Bruchtheile in jenem so oft genommen, als dieser die Einheit enthält, z. B. $7\frac{1}{4}$ mahl 5 ist $35 + \frac{5}{4}$, das ist $38\frac{1}{4}$.

Enthält der Multiplicator neben einer ganzen Zahl noch einen Bruchtheil, so enthält das Product zweyerley gleiche Theile. Einer dieser Theile ist der Multiplican-

Digitized by Google

dus, der andere ein gewisser Theil desselben. Z. B. 7 mit $5\frac{2}{3}$ multiplicirt geben das Product $7 \cdot 5 + 7 \cdot \frac{2}{3} = 35 + \frac{7}{3} \cdot 2 = 35 + \frac{14}{3} = 39\frac{2}{3}$. Und $7\frac{1}{4}$ multiplicirt mit $5\frac{2}{3}$ geben das Product $7 \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + 7 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = 35 + \frac{35}{4} + \frac{14}{3} + \frac{2}{12} = 43\frac{1}{12}$. S. Bruchrechnung.

Es ist gleichgültig, welcher der beiden Factoren als Multiplicandus oder Multiplicator betrachtet wird. Für ganze Zahlen zeigt es das obige Schema ganz deutlich. Enthalten AB und AC noch Bruchtheile über die Ganzen, ist nämlich $AB = a + \alpha$ und $AC = b + \beta$, wo a und b ganze Zahlen, α und β Bruchtheile bedeuten, so ist das Product $= (a + \alpha) b + (a + \alpha) \beta = ab + \alpha b + a\beta + \alpha\beta$. Dasselbe wird erhalten, wenn $b + \beta$ mit $a + \alpha$ multiplicirt wird. Das Product ist $(b + \beta) a + (b + \beta) \alpha = ba + \beta a + b\alpha + \beta\alpha$. Daß $\beta\alpha$ mit $a\beta$, und eben so $b\alpha$ mit αb, wie auch $\beta\alpha$ mit $\alpha\beta$ einerley ist, erhellt aus dem Artikel, Bruchrechnung.

Daher ist es einerley, in welcher Ordnung die Factoren eines Products in einander multiplicirt werden, wenn ihrer auch mehrere genommen werden. So ist das Product $abcde = cbeda$. Denn es ist $ab \cdot cde = cab \cdot de$; und $ab \cdot de = bade$; ferner $ad, e = ead$, und $ad = da$; also $abcde = cbeda$.

Der Multiplicator ist immer eine bloße Zahl, der Multiplicandus ist oft eine benannte Zahl; das Product ist dann mit dem Multiplicandus gleichnamig. Man kann nicht Thaler mit Thalern, oder Fuße mit Fußen multipliciren. Wenn in geometrischen Rechnungen Fuße mit Fußen multiplicirt werden, so sind dieses nur Zahlen, deren Product eine Verhältnißzahl für den Inhalt eines Rechtecks ist. Davon noch unten.

Ganze Zahlen mit einander zu multipliciren, setzt man das Product aus Partialproducten zusammen. Denn jeder Theil des einen Factors muß durch jeden Theil des andern multiplicirt werden. Die Theile sind in unserer dekadischen Arithmetik die von jeder Classe vorhandenen

Digitized by Google

Einheiten. Der leichteste Fall ist, wenn der Multiplicator eine Zahl der ersten Classe ist. Z. B.

Multiplicandus	8470359
Multiplicator	6
	8420804
	4240135
Product	50822154

Die Einer jedes Partialproducts sind in die obere Zeile des Products gesetzt, die Zehner in die untere. Dieses aber nur für Anfänger.

Wenn die Factoren eine oder mehrere Nullen am Ende haben, so werden dem Producte eben so viele angehängt.

Hat der Multiplicator mehrere Ziffern, so macht man für jede Ziffer das Partialproduct, schreibt dieses aber in die gehörige Stelle, dem Classenwerthe der Ziffer gemäß. Z. B.

	8470359
	87046
	50822154
	33881436.
	59292513...
	67762872....
	737310869514

Die Punete sind statt der Nullen gesetzt, welche den Producten durch die Zehner, die Hunderte ꝛc. angehängt werden müssen. Sie dienen hier nur das Einrücken der Producte begreiflich zu machen.

Man kann auch mit der höchsten Ziffer des Multiplicators anfangen, muß aber alsdann die Partialproducte nach der Reihe (die durch o nicht ausgeschlossen) rechter Hand ausrücken.

Eine Probe der Multiplication ist, wenn man das Product wieder durch den einen der Factoren dividirt, oder wenn man den Multiplicandus und Multiplicator mit ei

Digitized by Google

ander vertauscht. Leichter ist die Probe durch 9 oder 11. S. Rechnungsprobe.

Auf dieselbe Art, wie die Multiplication in dem dekadischen System ausgeführt wird, geschieht es auch in andern Systemen. Hier folgt ein Beyspiel für die Dodekadik:

```
                8 . 3 . 10 . 7 . 4
                    5 . 11 . 9 . 6
              ---------------------
            4 . 1 . 11 . 3 . 8 . 0
        6 . 2 . 10 . 11 . 6 . 0
      7 . 7 . 6 . 8 . 8 . 8
    5 . 5 . 7 . 5 . 0 . 8
  -------------------------------
  4 . 1 . 9 . 6 . 10 . 3 . 5 . 8 . 0
```

Die beiden Factoren sind dekadisch 172600 und 10338, das Product ist 1784338800. S. Dodekadik und Duodecimalrechnung.

Ein Beyspiel für die Multiplication dyadischer Zahlen ist

```
          111001101
             100101
        ------------
          111001101
        111001101
      111001101
      ------------
      100001010100001
```

Die Factoren sind 461 und 37, das Product ist 17057. S. Dyadik.

Wenn eine Zahl häufig als Factor zum Multipliciren vorkommt, wie bey Berechnung von Tabellen, oder wie der Umfang des Kreises, und der Modulus des Briggischen Systems, oder die Reciproken derselben, so muß man sich eine Tafel der Vielfachen einer solchen Zahl von 1 bis 9 verfertigen. Die Neperischen Stäbe dienen diese Tafel geschwind zu berechnen. S. instrumentale Arithmetik.

Digitized by Google

Abgekürzte Multiplication und Division.

Es ist oft der Fall, daß man ein Product nur bis zu den Einern, oder bis zu einem gewissen Bruchtheile genau verlangt, wodurch es unnöthig wird, das Product so weit zu suchen, als es die Factoren nach dem obigen Verfahren liefern würden. Die letztern Ziffern jedes der beiden Factoren mögen mit den höhern Ziffern des andern Partialproducte geben, die nicht zu vernachlässigen sind, sie selbst aber in einander multiplicirt können Partialproducte geben, welche nicht in Betracht gezogen werden sollen. Diese letztern werden weggelassen. Man fängt mit den obersten Ziffern des Multiplicators die Rechnung an, rückt die Producte aber nicht heraus, sondern fängt dagegen das Partialproduct in dem Multiplicator jedesmahl um eine Stelle höher an.

Exempel. Der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser 385729 Fuß ist, wird gesucht, bis auf Hundertstheile eines Quadratfußes. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange ist 1 : 3,141592653 ... Da die höchste Ziffer des Multiplicandus die fünfte Potenz von 10 enthält, so muß man die Multiplication bey der siebenten Decimalstelle anfangen, und zur Sicherheit wegen der Hundertheilchen, die aus den Tausendtheilchen entstehen, noch eine oder zwey Ziffern weiter herabwärts. Hat man eine Tafel der Vielfachen von 3,141.., so nehme man diese Zahl zum Multiplicator,

942477,7960
251327,4123
15707,9632
2199,1148
62,8318
28,2743

1211803,39..

als der gesuchte Kreisumfang.

Bey der abgekürzten Division verfährt man auf eine ähnliche Art. Man bestimmt, wie weit der Quotient gefunden werden soll. Der Dividendus muß eine oder zwey

Digitized by Google

Ziffern über diejenige hinaus genommen werden, deren Stellenzahl von dem Komma an gleich ist dem Unterschiede der Stellenzahlen der niedrigsten Ziffer im Quotienten, von dem Komma herunterwärts, und der höchsten im Divisor vom Komma aufwärts. Bey jeder Ziffer des Quotienten wird eine Ziffer des Divisors weniger genommen, nachdem man die Gränzziffer des Dividendus erreicht hat.

1. Exempel. Den Quotienten von 2384 durch 47328 bis auf die sechste Decimalstelle zu finden. Die Rechnung steht folgendermaßen.

47328	2384,0000	0,0503719 —
2366,40	176000	
14,1984	34016	
3,3129	887	
0,0473	414	
0,0425	— 11	

2. Exempel. Der Umfang eines Kreises sey 12118, den Halbmesser bis in die Einer richtig zu finden. Der Divisor ist hier 3,14159265 .. Da hier die Stellenzahl der höchsten Ziffer 0 ist, und der Quotient auch bis auf die Stellenzahl 0 gesucht wird, so nehme man den Dividendus bis zu der zweyten Stelle nach dem Komma. Die höchste Ziffer des Quotienten hat die Stelle + 3. Man muß also den Divisor bis zu der Stelle — 5 nehmen, damit das Product aus der höchsten Ziffer des Quotienten in die niedrigste des Divisors in der Stelle — 2 anfange.

3,14159	12118,00	3857,3 —
9424,78	269322	
2513,27	17995	
157,08	2287	
21,99	88	
0,94	— 6	

Multiplication in benannten Zahlen.

Bey dieser fängt man die Multiplication mit der niedrigsten Gattung von Einheiten an, dividirt das Product

Digitized by Google

durch die Anzahl von Einern der niedrigern Gattung in der nächst höhern, und setzt den Quotienten zu dem Producte, welches die nächst höhere Gattung giebt, den Rest aber nimmt man als einen Theil des Totalproducts.

Exempel.

57 Rthlr. 14 gr. 10 pf. mit 8 multiplicirt,

geben 456 " 112 " 80 "

oder 460 Rthlr. 22 gr. 8 pf.

Wenn der Multiplicator grösser ist als die Menge der kleinern Einheiten in der nächst grössern, so zerlege man ihn in ein Vielfaches jener Menge, so groß als es seyn kann, und in den Überschuß. Bey der Multiplication mit dem Vielfachen braucht man nur den Namen der Einheit zu ändern. Z. B. 10 pf. mit 64 multiplicirt sind 50 gr. 40 pf. oder 53 gr. 4 pf. oder 2 Rthlr. 5 gl. 4 pf. Ist der Überschuß über das Vielfache beträchtlich, so nehme man das nächst größere Vielfache, ziehe aber das Product in die Ergänzung ab. Z. B. das Product aus 14 gr. in 64 zu finden, multiplicirt man sie mit 72 — 8, so erhält man 42 Rthlr. weniger 112 gr., das ist 37 Rthlr. 8 gr.

Man kann auch die der Hauptgattung angehängten kleinern Gattungen als Brüche behandeln, und sie in aliquotische (gleich große) Theile der größten Einheit zerfällen. Z. B. 14 gr. sind $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ eines Thalers; 10 pf. sind $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ eines Groschen. Die kleinern aliquoten Theile können auch auf die nächst grössern bezogen werden. So sind 14 gr. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ eines Thalers, und 10 pf. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ eines Groschen. Sind nun 14 gl. 10 pf. mit 385 zu multipliciren, so zerfälle man die Groschen und Pfennige in aliquote Theile des Thalers, die wiederum von dem nächst grössern ein aliquoter Theil sind. Nun verwechsle man die Benennungen, und betrachte die Zahl 385 als Thaler, die Bruchtheile als absolute Zahlen, und multiplicire jene mit diesen folgendergestalt:

Digitized by Google

385 Thlr.					14 gl.		10 pf.	
192	Thlr.	12	gl.	— pf.	12	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
32	"	2	"	—	2	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{12}$
8	"	—	"	6			1	$\frac{1}{24}$
4	"	—	"	3				
1	"	8	"	1				
237	"	22	"	10 "				

Die Rechenmeister nennen diese Auflösung in aliquote Theile einer größern Einheit das Zerstreuen. In den Rechenbüchern findet man mehrere Beyspiele.

Geometrische Multiplicationen.

Das Verhältniß zweyer Rechtecke wird aus den Verhältnissen ihrer Grundlinien und Höhen zusammengesetzt. Druckt man ihre Seiten durch Zahlen mittelst irgend einer Einheit aus, so verhalten sich die Rechtecke wie die Producte aus den Zahlgrößen für ihre Seiten. Das eine der Rechtecke sey ein Quadrat, dessen Seiten die Längen-Einheit sind, so wie es selbst die Einheit für die Flächen ist. Dann wird das andere Rechteck durch das Product der Zahlgrößen für seine Seitenlinien dargestellt. Man bezeichne das Quadrat durch A, das Rechteck durch B, die Seiten jenes durch 1, des Rechtecks durch die Zahlen a, b, so ist $A : B = 1 \times 1 : a \times b$, und $B = \frac{a \times b}{1 \times 1} A$, oder abgekürzt $B = a \times b$ Quadrate A.

Das Quadrat A erhält seinen Namen zufolge seiner Seite. Ist diese ein Zoll, ein Fuß, eine Ruthe, so heißt A ein Quadratzoll, ein Quadratfuß, eine Quadratruthe u. s. f. Das Product der Zahlgrößen für die Seiten eines Rechtecks erhält den Namen des Quadrats. So werden dem Scheine nach Längen mit Längen multiplicirt, und geben zum Product eine Fläche.

Das Verhältniß zweyer Prismen wird zusammengesetzt aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen. Werden die Grundflächen durch das Quadrat A

Digitized by Google

der Längen-Einheit ausgedruckt, womit auch die Höhe gemessen wird, so wird der Inhalt des Prisma durch das Product aus der Anzahl der A für die Grundfläche in die Zahlgröße für die Höhe dargestellt. Die Einheit für den Körper sey der Würfel C, dessen Seite die Längen-Einheit ist, die Grundfläche des Prisma sey gleich einem Rechteck dessen Seiten a, b sind, die Höhe des Prisma sey c, und Prisma P, so ist C : P = 1 × a × 1 × a × b × c, und $P = \frac{1 \times a \times b \times c}{1 \times 1 \times 1} C$, oder abgekürzt $P = a \times b \times c$ Würfel C. Der Würfel C bekommt seine Benennung von der Längen-Einheit, als Cubikzoll, Cubikfuß, Cubikruthe u. s. f.

Alle geometrischen Berechnungen lassen sich auf Vergleichungen der Flächen und der Körper mit einem Quadrat und einem Würfel bringen. Nimmt man eine andere Einheit für die Flächen und die Körper an, so werden nur die Zahlausdrücke nach Maßgabe der neuen Einheit geändert.

Wenn die Längen an den Flächen und Körpern auch in den Bruchtheilen nach der Dekadik ausgedruckt werden, so ist die Berechnung selbst das ganz gemeine arithmetische Verfahren. Man muß nur bemerken, daß das Quadrat der Längen-Einheit 100 Quadrate von ihrem 100ten Theile, 10000 Quadrate von ihrem 100sten Theile u. s. enthält; daß der Würfel von der Längen-Einheit 100 Würfel von dem 100ten Theile, 1000000 Würfel von dem 100sten Theile u. s. f. faßt. Diesem zufolge muß die Absonderung der Quadrate und Würfel von den kleinern Einheiten, wenn man sie unterscheidet, geschehen. Die Seiten eines Rechtecks seyn 7° 4′ 3″ und 5° 3′ 2 Decimalmaß, oder 7,43 und 5,32, so ist der Inhalt = 39,5276 Quadratruthen, wo 39 die ganzen, 527 die Decimaltheile sind. Oder es ist der Inhalt = 39 52′ 76″ Quadratmaß. Über diesem Rechteck sey ein Prisma von der Höhe 4° 7′ errichtet, so ist der Inhalt

Digitized by Google

= 185,77972 Cubikruthen, wo die 185 die ganzen sind. Oder der Inhalt ist 185° 779′ 720″ Cubikmaß.

Wird die Längen-Einheit, wie es auch geschieht, nach der Duodecimal-Progression eingetheilt, so leistet die oben nach der Dodekadik gewiesene Multiplication gute Dienste. Es seyn 1198° 7′ 4″ in 71° 9′ 6″ zu multipliciren. Man muß nur die Ganzen, oder die Menge der Haupteinheit auf die Duodecimal-Progression bringen. Es sind 1198 nach derselben 8 . 3 . 10 und 71 = 5 . 11. Das Product aus 8 . 3 . 10° . 7′ . 4″ in 5 . 11° 9′ 6″ ist nun nach dem gegebenen Exempel 4 . 1 . 9 . 6 . 10° 3 . 5′ 8 . 0″ Quadr. Duod. Maß. Nämlich eine Quadratruthe enthält 144 Quadratfuß, und 144 . 144 Quadratzoll, nach Duodecimalmaß. Darum müssen hier auch je zwey Ziffern nach den Einern abgeschnitten werden, und, wenn eine einzelne übrig bliebe, müßte noch eine Null beygefügt werden. Die 4 , 1 . 9 , 6 . 10° sind nach der Dekadik = 86050°; die 3 . 5′ sind 41′, und die 8 . 0″ sind 96″ Quadratmaß.

Wenn in dem obigen Exempel der Factor 8 . 3 . 10° . 7 . 4 Quadratmaß bedeutet, nämlich 8° 3 . 10′ . 7 . 4″ Qu., der andere Factor aber Längenmaß, 5 . 11° 9′ 6″, so ist das Product = 4 . 1 . 9° 6 . 10 . 3′ 5 . 8 . 0″ Cubikmaß = 597° 987′ 816″ Duod. Cub. Maß. S. Duodecimalrechnung.

Von der Multiplication der Brüche, s. Bruchrechnung.

Von der algebraischen Multiplication, s. Buchstabenrechnung; und von der Multiplication der Reihen, s. Combinatorische Analysis (5.).

Muschellinie, s. Conchoide.

Myriade, ein griechisches Wort (μυριας), welches Zehntausend bedeutet. Wir haben im Deutschen kein einfaches Wort für die Zahl 10000, nur ein zusammengesetztes. Daher zählen wir über 1000 hinaus mit Tausenden und den kleinern Einheiten bis zu 1000 Tau-

Digitized by Google

senden, und nennen dieses eine Million, welche hernach wieder als Einheit dient u. s. f. Archimedes, der in seiner Schrift, die Sandrechnung betitelt, zeigt, wie alle, auch noch so große Zahlen, benannt werden mögen, zählt von 1 bis 10000 mit den im Griechischen vorhandenen Wörtern, dann bis zu 10000 mal 10000 oder 10^8. Diese nennt er zusammen die erſten Zahlen. Die höchste derselben wird die Einheit in der zweyten Octade, deren Zahlen er die zweyten Zahlen nennt; und von welchen die größte ist 10^{16}. Diese ist die Einheit in der dritten Octade, welche er die Reihe der dritten Zahlen nennt, die letzte derselben ist 10^{24}. So weiset er allen Zahlen ihre Stellen in einer der Octaden an. An die Stelle unserer Millionen, Billionen, Trillionen treten daher bey Archimedes die Potenzen des Quadrats einer Myriade, nämlich 10^8, 10^{16}, 10^{24}, u. s. f.

Eine kritische Ausgabe von des Archimedes ψαμμιτης oder Arenarius ist in dem dritten Theile der Operum Wallisii befindlich.

N.

Näherung (approximatio) ist die Angabe des Werthes einer Größe, welcher zwar nicht völlig genau ist, aber doch dem wahren Werthe nahe kommt. Es verhält sich mit den allgemeinen analytischen Ausdrücken einer Größe oft wie mit den Irrationalzahlen. Man kann diese durch die Einheit und deren Theile nicht vollkommen angeben, aber es lassen sich doch Gränzen anzeigen, zwischen welchen sie enthalten ist, und diese Gränzen lassen sich immer näher an einander rücken. Jeder Reihenausdruck einer Größe, der ins Unendliche fortgeht, ist eine Irrationalgröße. Je kleiner die Progressionalgröße in Verhältniß gegen die Einheit oder eine gegebene, zur Vergleichung dienende, Größe ist, desto schneller geschieht die Näherung zu dem völligen Werthe. Es ist oft möglich, einen gebrochenen Werth zu finden,

Digitized by Google

der entwickelt mit einer Anzahl Glieder der Reihe zusammen stimmt, und bequemer zu berechnen ist, als das Aggregat dieser Glieder. So kann man für die Wurzeln aus einer zweytheiligen Größe bequeme Bruchformen finden.

In der Cyklotechnie und Logarithmotechnie hat man gesehen, daß es oft künstlich genug ist, einer Reihe eine solche Form zu geben, wodurch sie sich dem genauen Werthe schnell nähere, so daß die Abweichung unter einer gegebenen Gränze bleibe. Die Reihen, wie sie geradezu durch Entwickelung eines analytischen Ausdrucks gefunden werden, sind oft noch ein roher Stoff, den die Kunst bearbeiten muß.

Name eines Verhältnisses ist gleich bedeutend mit Exponent.

Nebenwinkel, s. Winkel.

Negativ, s. entgegengesetzte Größen.

Neigung zweyer geraden Linien, oder zweyer Ebenen gegen einander, oder einer geraden gegen eine Ebene, ist der Winkel, welchen sie mit einander machen. Wo von zwey Ebenen oder von einer Ebene und einer geraden Linie die Rede ist, kommt noch die Bestimmung der Neigungs-Ebene hinzu, in welcher die zwey geraden liegen, deren Winkel demjenigen der beiden Ebenen oder der Ebene und der geraden gleich ist. Diese Neigungs-Ebene ist eine auf beide Ebenen senkrechte, das ist die Ebene zweyer in den beiden Ebenen, auf einen Punct ihrer Durchschnittslinien gezogenen senkrechten, s. Ebene. Der Winkel einer geraden mit einer Ebene wird in einer durch jene auf diese senkrechten Ebene gemessen, s. Ebene, 27.

Die Lehre von den Neigungen (inclinationes, νευσεις) bey den Alten ist ein System von Aufgaben, deren allgemeiner Inhalt ist: zwischen zwey gegebenen Linien, gerade oder krummen (γραμμαι), eine gerade Linie von gegebener Länge so zu legen, daß sie durch einen ge-

Digitized by Google

gebenen Punct gehe. Sie bemerkten, daß einige dieser Aufgaben, ebene, andere körperliche, noch andere linearische sind, d. i. durch den Kreis, oder einen Kegelschnitt, oder eine höhere Curve construirt werden. Von dieser Art sind die Aufgaben, 8, 9, 10 in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie. Hier folgen noch zwey Aufgaben, die zugleich zur Erläuterung der Lehre von den entgegengesetzten Größen dienen.

Ein Halbkreis über dem Durchmesser AB (Fig. 121.) und eine gerade auf AB (hier verlängerten) senkrechte DE sind der Lage nach gegeben, es soll zwischen dem Kreise und der geraden DE eine gerade FG gelegt werden, so daß sie nach dem Endpuncte B des Durchmessers AB gehe.

Aus der Natur des Kreises ist $FG \cdot FB = FH\,(FH + 2HC)$, und in dem Dreyeck FBC ist $FB^2 = BC^2 + FC^2 + 2BC \cdot CD$, (Kreis, 35, und Dreyeck, 20.). Nun sey $AC = a$; $CD = b$; $FG = c$; $FB = x$, so ist $FG \cdot FB = cx$, und $FC^2 = x^2 - a^2 - 2ab$. Daraus ist $FH = \sqrt{(x^2 - a^2 - 2ab)} - a$, und $FH + 2HC = \sqrt{(x^2 - a^2 - 2ab)} + a$. Folglich

$$cx = x^2 - 2a^2 - 2ab,$$

$$\text{oder } x^2 - cx = 2a^2 + 2ab,$$

$$\text{und } x = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab + \tfrac{1}{4}c^2)}.$$

Die Lage und Größe von BF kann nur eine einzige seyn. Es ist also die Frage, was die zweyte Wurzel, die negativ ist, bedeute. Man bemerke, daß wir auch hätten BG für die gesuchte Größe nehmen können. Dann ist $BF = c + x$, und $FC^2 = (c + x)^2 - a^2 - 2ab$. Nun wird die Gleichung,

$$x^2 + cx = 2a^2 + 2ab,$$

$$\text{und } x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab + \tfrac{1}{4}c^2)}.$$

Die positive Wurzel ist hier die entgegengesetzte der negativen nach der ersten Auflösung, so wie die negative nach der zweyten die positive nach der ersten Auflösung ist. Die Negation zeigt also nur an, daß die beiden Wurzeln in Beziehung auf die gegebene FG entgegengesetzte Lage haben. Wird BF von B aus an DE gelegt, so wird FG nach B hin genommen, wird aber BG an den Kreis ge-

Digitized by Google

legt, so wird GF von B abwärts genommen. Der Unterschied der absoluten Werthe der Wurzeln ist $= c$, wie es seyn muß.

Zweyte Aufgabe. Es sind zwey Halbkreise über den Durchmessern AB, CD, die auf derselben geraden liegen, gegeben (Fig. 122), es soll zwischen ihnen eine gerade EF von gegebener Länge gelegt werden, so daß sie verlängert durch den Endpunct D des Durchmessers des einen Halbkreises gehe.

Man verlängere die DF in dem Kreise über AB bis an denselben in G, und ziehe aus dem Mittelpuncte H desselben Kreises die senkrechte HK auf EG. Es ist $DE \cdot DG = DB \cdot DA$. Zieht man die Chorde CF, so ist CF senkrecht auf DF und daher parallel mit HK. Es ist also $DC : DH = DF : DK$. Auch ist $DG = 2DK - DE$. Man setze $AB = a$; $DC = b$; $DH = c$; $EF = d$; $DE = x$, so ist $DK = \frac{c(x-d)}{b}$

und $DG = \frac{2c(x-d)}{b} - x = \frac{(2c-b)x}{b} - \frac{2cd}{b}$.

Folglich ist

$$\frac{(2c-b)x^2}{b} - \frac{2cdx}{b} = c^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder

$$(2c-b)x^2 - 2cdx = b(c^2 - \tfrac{1}{4}a^2).$$

Diese Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel. Die letztere ist hier eine fremde Wurzel, die selbst, oder deren entgegengesetztes, bey der geometrischen Aufgabe nicht gebraucht werden kann. Der Werth von d kann im Allgemeinen jeder seyn, in Beziehung auf die Aufgabe ist d zwischen zwey Gränzen eingeschränkt.

Es könnte auch GF eine gegebene Länge haben. Dieses giebt dieselbe Gleichung mit der gefundenen, nur daß d einen andern Werth hat. Die Werthe von d liegen, beide Fälle zusammen genommen zwischen CB und CA.

Digitized by Google

Anstatt die gerade EF nach dem Puncte D hin sich erstrecken zu lassen, kann sie auch nach irgend einem andern Puncte hin gezogen werden.

Nenner, s. Bruch.

Nepers Logarithmen, s. Logarithmen. — Desselben Regel zur Berechnung sphärischer rechtwinklichter Dreyecke, s. Trigonometrie, sphärische. — Desselben Stäbchen, s. instrumentale Arithmetik.

Netz ist die in einer Ebene gezeichnete Figur, welche die Oberfläche eines Körpers so darstellt, daß sie unmittelbar um denselben gelegt werden kann, ohne eine Verrükkung der Theile, eine Ausdehnung oder Zusammenziehung zu leiden. Dieses geht nur bey Körpern an, die in ebenen Flächen eingeschlossen sind, oder die sich abwickeln lassen. Die merkwürdigsten Netze sind, welche von den regulären Körpern, Pyramiden und senkrechten Kegeln gezeichnet werden. Das Netz eines schiefen Kegels wird außer den zwey geraden Seitenlinien von einer transcendenten krummen Linie begränzt, s. Kegel. Zu den Netzen der regulären Körper, auch einiger halbregulären wird in dem Artikel, vieleckige Körper, die Anweisung gegeben; zu den Netzen der Pyramiden in dem Artikel, Pyramide. Man vergleiche noch den Artikel, krumme Fläche, 126 ff.

1. Von einer Kugel kann kein Netz im eigentlichen Verstande gezeichnet werden, weil sich ihre Oberfläche nicht abwickeln läßt. Es ist nur die Frage, wie sich ein Netz zeichnen lasse, mit so weniger Abweichung als nur möglich seyn mag. Wegen der Überziehung der Erd- und Himmelskugeln mit den in Kupfer gestochenen Segmenten der Kugelfläche ist die Untersuchung von praktischem Nutzen.

2. Die gewöhnliche Art Kugelnetze zu zeichnen ist nach Wolf (Elem. Mathes. Astron. §. 309.) folgende.

Man theilt den Umfang der Kugel in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf. Einem dieser Theile sey die

Digitized by Google

Länge AB (Fig. 123.) gleich. Mit einem Halbmesser CA oder BD, der 10 mahl so groß als AB ist, beschreibe man durch A und B Kreisbogen, die sich in E und F schneiden, so ist das Bilineum EAFB eines der zwölf Segmente, die sich auf eine Kugel, deren Umfang 12 AB ist, aufziehen lassen, wenn EF etwas gedehnt wird. Auf der Kugel ist der Bogen EAF so lang als der Bogen EHF. Es muß sich also beym Aufziehen der Segmente EHF etwas dehnen, und EAF etwas verkürzen, oder, weil das Verkürzen nicht wohl möglich ist, EAF seine Länge behalten, EHF aber sich dehnen.

3. Nach dieser Construction ist der W. ACE $= 18° 12'$. Der Bogen AE ist aber größer als der Quadrant der Kugel. Denn es ist AC : AE $= 1 : 0{,}317648$, und AC : AH $= 1 : 0{,}05$. Auf der Kugel ist AH : AE $= 1 : 6$.

4. Damit auch in der Planzeichnung AH : AE nächstens wie 1 : 6 sey, muß ACE $= 19° 17'$ genommen werden. Dann ist sin. vers. ACE $= 0{,}05610$, und der Bogen AE $= 0{,}33655$, nämlich für AC $= 1$. Hier ist 6 AH $= 0{,}33660$, sehr nahe $=$ AE. Den Winkel ACE findet man durch die Formel für $1 - \cos\varphi$ in dem Artikel, Cyklometrie, 6, wenn $1 - \cos\varphi = 6\varphi$ gesetzt wird, durch Näherung. Es ist φ ziemlich nahe $= \frac{1}{3}$, weßwegen man $\varphi = \frac{1}{3} + u$ zu setzen hat, worauf man wie bey der Auflösung numerischer Gleichungen verfährt, s. Gleichung, 237.

Nimmt man den Halbmesser der Kugel zur Einheit, so ist AH $= \frac{1}{24}$ des Umfanges $= \frac{1}{12}\pi = 0{,}26180$. Da AH : AC $= 0{,}05610 : 1$ ist, so ist AC $= 4{,}6664$, in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel.

5. Nimmt man zu größern Kugeln AB $= \frac{1}{20}$ des Umfanges $= 18$ Grad, so muß seyn AH : AE $= 1 : 10$. Dieses giebt den W. ACE $= 11° 30'$, und AH : AC $= 2 : 190$ sehr nahe, folglich AC $= 25$ AB. Nimmt man den Halbmesser der Kugel zur Einheit, so ist AB $= \frac{2\pi}{20}$, und AC $= 7{,}8540$.

Digitized by Google

Man sieht hieraus, daß die Größe des Halbmessers in der Planzeichnung mit der Breite der Segmente veränderlich ist. Je schmäler der Streifen in Verhältniß gegen die Länge genommen wird, desto näher kommt das Verhältniß von AE : HE dem der Gleichheit, und daher wird der Bogen AE desto flächer, der Halbmesser desto größer.

6. Man ziehe LE und ME (Fig. 123) senkrecht auf EC und ED, so sind die Winkel HEL und HEM = ACE oder BDE. Da LE und ME die Kreisbogen AE, BE in E berühren, so ist der W. LEM gleich dem Winkel der beiden Bogen. Nach der erstern Construction ist LEM = 38° 34′, nach der zweyten ist LEM = 23°. Auf der Kugel ist nach der erstern der Winkel des Segments = 30°, nach der zweyten 18°.

7. Es ist eine ganz willkürliche Annahme, daß die Segmente des Netzes durch Kreisbogen begränzt werden. Vielmehr ist es eine andere Curve, welche sich ohne Veränderung ihrer Länge in einen Kreisbogen krümmt, indem die Mittellinie EF sich so viel ausdehnt, daß sie dem Halbkreise gleich wird. Die Aufgabe, diejenige Curve zu finden, welche dazu am schicklichsten ist, ist nicht leicht.

8. Lowitz, ehedem Professor in Göttingen,*) der sich mit Verfertigung größer, unvollendet gebliebenen, Himmels- und Erdkugeln beschäftigte, legte der Societät daselbst im J. 1756 eine Abhandlung über die Zeichnung der Segmente zur Beziehung der Kugeln vor, die aber erst in dem ersten Bande der neuen Commentationen dieser Societät für das J. 1778 gedruckt erschienen ist. In demselben Bande befindet sich auch

*) Er ward im J. 1774, da er, zufolge eines Auftrages der Petersburger Akademie der Wissenschaften, zwischen der Wolga und dem Don eine Vermessung unternommen hatte, von den Rebellen unter des Pugatschew Anführung auf eine klägliche Weise getödtet. Eine Nachricht von diesem Manne ist in dem Supplément au Recueil pour les Astronomes, par J. Bernoulli, p. 41—60 befindlich.

Digitized by Google

eine Abhandlung von Käſtner über denſelben Gegenſtand.

Das von Lowitz angewandte Verfahren macht die Zeichnung des Segments gut begreiflich, welche nach der Käſtneriſchen Methode ſchwieriger iſt. Dagegen iſt die Zeichnung der Bogen der Parallelkreiſe nach Lowitz ſehr mühſam, nach Käſtner aber leicht. Jener dehnt das Segment beym Aufziehen nach allen Richtungen, dieſer blos nach der Länge. Zuerſt folgt hier ein Abriß des Lowitziſchen Verfahrens.

9. Es ſtellt PApB (Fig. 124.) ein Segment einer Kugelfläche vor; die Pole ſind P, p, der Mittelpunct iſt C; ein Sector des Äquators iſt ACB; eines Parallelkreiſes DGE. Man ziehe die Chorden AB, DE. Dieſe ſind einander parallel. (Denn die geraden AD, BE verlängert treffen die Linie der Axe Pp in demſelben Puncte, liegen alſo in derſelben Ebene, daher auch die Chorden AB, DE in einer Ebene ſich befinden, und weil ſie in parallelen Ebenen liegen, parallel ſind). Sie ſind, ſo wie alle auf gleiche Art gezogene, Seitenlinien eines ſchiefen Cylinders, über dem Kreiſe, wovon PAp oder PBp die Hälfte iſt. In einem ſchiefen Cylinder ſind zwey Schnitte (Wechſelſchnitte) Kreiſe, da die andern Ellipſen ſind, ſ. Cylinder. Man halbire den Winkel ACB durch die gerade Cf, welche von AB in F geſchnitten werde. Eben ſo werde der W. DGE durch Gh halbirt, welche von DE in H geſchnitten wird. Die Puncte F, H, und alle auf gleiche Art beſtimmte, liegen auf einer Ellipſe, deren halbe große Axe iſt PC, und halbe kleine CF. Das cylindriſche Segment zwiſchen den Halbkreiſen PAp, PBp läßt ſich abwickeln. Es beſteht aus zwey Segmenten, deren gemeinſchaftliche Grundlinie die halbe Ellipſe PFp iſt, auf welche die Seitenlinie AF und DH, BF und EH ſenkrecht ſtehen. Daher verwandelt ſich die halbe Ellipſe PFp in eine gerade Linie von derſelben Länge (Cylinder, Th. I. S. 703), die beiden begränzenden Halbkreiſe und alle übrigen Ellipſen wer-

Digitized by Google

den transcendente Curven, ohne Veränderung der Länge, weil bey der Abwickelung weder Dehnung noch Zusammenziehung geschieht.

10. Es sey (Fig. 124.) $AC = 1$; $ACB = 2\omega$, also $ACF = \omega$; der W. HCF oder der Bogen $hf = \varphi$, so ist $CF = \cos\omega$; $AF = \sin\omega$; $DG = \cos\varphi$; $DH = DG \times \sin\omega = \cos\varphi \cdot \sin\omega$. Nun nehme man (Fig. 125.) die gerade FP gleich dem elliptischen Quadranten FHP, und darauf FH gleich dem elliptischen Bogen FH, welches durch die Formeln für die Rectification der Ellipse möglich ist. Auf FP setze man in F die senkrechte $FA = \sin\omega$, und in H die senkrechte $HD = \cos\varphi \cdot \sin\omega$, so sind A und D Puncte der begränzenden Curve des Segments. Man kann solchergestalt so viele Puncte wie D finden, als nöthig ist, um die Curve aus freyer Hand, oder mittelst eines nach den Puncten gekrümmten elastischen Blechs zu zeichnen. Mit diesem Viertheil des Segments werden die andern drey Theile übereinstimmig gezeichnet.

11. Wenn das Segment auf die Kugelfläche gepaßt werden soll, so muß es nach der Länge und Breite ausgedehnt werden. Es muß von der cylindrischen Fläche, auf welcher es vollkommen anliegt, gleichsam durch eine Kraft von dem Mittelpuncte der Kugel her in jedem Puncte bis an die Kugelfläche getrieben werden. Die mittlere Halbellipse wird dabey am meisten ausgedehnt, die andern leiden weniger Dehnung, desto geringere, je näher sie den Halbkreisen PAp oder PBp (Fig. 124.) liegen. Die Chorde AFB wird in den Bogen AfB ausgedehnt, und so auch jede andere Chorde, wie DHE, in einen Bogen eines großen Kreises.

12. Die meiste Mühe nach diesem Verfahren macht die Zeichnung der Bogen der Parallelkreise. Diese sind nothwendig, um die Lagen der Sterne und der Örter auf der Erdfläche auf die Segmente gehörig einzutragen. Die Ordinaten, wie DH, stellen Bogen größter Kreise vor. Der Punkt eines Parallelkreises, wie h (Fig. 124.), erscheint auf dem ebenen Segment da,

Digitized by Google

wo der Halbmesser Ch die Ellipse in der Ebene des Kreises Php schneidet.

13. Es ist CF die halbe kleine Axe der Ellipse PFp. Da $CF = \cos\omega$, so ist $AC^2 - CF^2 = \sin\omega^2$. Es ist aber $AC^2 - CF^2$ das Quadrat des Abstandes des Mittelpunctes von den Brennpuncten. Nennt man diesen Abstand e, also $\sin\omega^2 = e^2$, und φ den Kreisbogen fh, der dieselbe Abscisse mit dem elliptischen Bogen FH hat, so ist dieser Bogen FH =

$$\varphi$$
$$-\frac{1}{4}e^2\varphi + \frac{1}{4}e^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$-\frac{3}{64}e^4\varphi + \frac{3}{64}e^4\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{32}e^4\sin\varphi^3\cdot\cos\varphi$$
$$-\frac{5}{256}e^6\varphi + \frac{5}{256}e^6\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$+\frac{5}{384}e^6\sin\varphi^3\cdot\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{96}e^6\sin\varphi^5\cdot\cos\varphi$$
— etc.

s. Rectification, oder Lamberts Beyträge, Th. III. S. 44.

Für $\omega = 15°$, oder wenn AB der 12te Theil des Umfanges ist, ist die Länge der ganzen Abscisse = 1,54415.

14. Man kann die Fläche des Kugelsectors PApBP (Fig. 124.) auch ansehen als zusammengesetzt aus unendlich vielen Zonenstücken, deren jedes sich, wie die Fläche eines Kegelstücks, abwickeln läßt. Das abgewickelte Zonenstück, dessen eine Grundlinie der Bogen DE auf dem Parallelkreise mit dem Durchmesser DG, die andere ein diesem Bogen DE unendlich naher ist, wird auf der ebenen Fläche durch zwey Kreisbogen von glei-

Digitized by Google

cher Länge wie DE ist, begränzt, die aber mit einem andern Halbmesser beschrieben sind, nämlich mit der Tangente des Bogens DP. Denn die Spitze des Kegels, zu dem das Kegelstück über DE gehört, liegt auf der geraden CP, wo sie von der in D berührenden getroffen wird. Alle Zonenstücke auf dem Kugelsegmente APf (Fig. 124.) stelle man sich auf die dreyseitige Figur APF (Fig. 125.) übergetragen vor, in welcher die Seite AP dem Quadranten der Kugel gleich ist. Durch jeden Punct auf AP werde mit einem Halbmesser, welcher der berührenden in dem zugehörigen Puncte auf der Kugel gleich ist, aus einem Mittelpuncte auf der geraden FP (jenseits P) ein Bogen Dh beschrieben. Die Zonenstücke behalten aber, wegen der Verkürzung von FP nicht gleiche Breite, wie sie auf der Kugel haben. Es ist nun nach der Voraussetzung, daß das Trilineum APF dieselbe stetige Folge von Kreisbogen, längs der Seite ADP, enthält, als der Sector APf auf der Kugel, die Gleichung für die Curve ADP zu finden.

15. Es sey (Fig. 124.) der Halbmesser der Kugel $AC = 1$; der Bogen $AD = \varphi$, der Winkel ACF oder $DGh = \omega$, wo ω zugleich die Länge des Bogens Af ist. Der dem Bogen Dh zugehörige Winkel auf der ebenen Fläche ist $= \frac{\omega \cdot \cos \varphi}{\cot \varphi} = \omega \cdot \sin \varphi$, weil bey gleichen Bogen die Winkel sich umgekehrt wie die Halbmesser verhalten. Dieser heiße μ. Ferner seyn zu einem Puncte D der Curve ADP (Fig. 125.) die Coordinaten $FH = x$; $HD = y$, so ist y der Sinus des Winkels μ für den Radius $= \cot \varphi$, also $\frac{y}{\cot \varphi} = \sin \mu$, daher $y = \sin \mu \cdot \cot \varphi$. Drittens, da ein Bogen der Curve, der zu einem Parallelkreise gehört, dem auf der Kugel zu denselben gehörenden gleich gesetzt ist, so ist auf der Curve $AD = \varphi$, und $\partial \varphi^2 = \partial x^2 + \partial y^2$. So haben wir die Gleichungen:

Digitized by Google

I. $\mu = \omega . \sin \Phi.$
II. $y = \sin \mu . \cot \Phi.$
III. $\partial x^2 = \partial \Phi^2 - \partial y^2.$

Hieraus muß nun der Werth von x durch Φ dargestellt werden.

16. Erstlich ist

$$\sin \mu = \mu - \tfrac{1}{6}\mu^3 + \tfrac{1}{120}\mu^5 - \tfrac{1}{5040}\mu^7 + \text{etc.}$$

(Cyklometrie, 5.) Daher ist

$$y = \cos \varphi \, (\omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin \Phi^2 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \sin \Phi^4 - \tfrac{1}{5040}\omega^7 + \text{etc.}).$$

17. Die Differentiation giebt

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -(\omega + \tfrac{1}{2}\omega^3) \sin \Phi + (\tfrac{1}{2}\omega^5 + \tfrac{1}{30}\omega^5) \sin \Phi^3 - (\tfrac{1}{24}\omega^5 + \tfrac{1}{840}\omega^7) \sin \Phi^5 + (\tfrac{1}{720}\omega^7 + \tfrac{1}{45360}\omega^9) \sin \Phi^7 - \text{etc.}$$

und abgekürzt:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -A \sin \Phi + B \sin \Phi^3 - C \sin \Phi^5 + D \sin \Phi^7 - \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von $\frac{\partial y^2}{\partial \varphi^2}$, und daraus der von $\frac{\partial x^2}{\partial \varphi^2}$. Man setze, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten,

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 1 - \alpha \sin \Phi^2 + \beta \sin \Phi^4 - \gamma \sin \Phi^6 + \delta \sin \Phi^8 - \text{etc.}$$

so giebt die Vergleichung

$$\alpha = \tfrac{1}{2}A^2.$$
$$\beta = AB - \tfrac{1}{8}A^4.$$
$$\gamma = AC + \tfrac{1}{2}B^2 - \tfrac{1}{8}A^2B + \tfrac{1}{16}A^6.$$
$$\delta = AD + BC - \tfrac{3}{4}A^2B^2 - \tfrac{1}{8}A^3C + \tfrac{3}{8}A^6B - \tfrac{3}{128}A^8.$$

Diese Coefficienten werden immer kleiner, weil sie nach den geraden Potenzen des Bogens ω fortgehen, der nicht über 15°, das ist, 0,2618... in Theilen des Halbmessers, genommen wird.

Digitized by Google

18. Durch die Integration wird erhalten,

$$x = \varphi$$
$$- (\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{8}\beta + \tfrac{5}{16}\gamma - \tfrac{35}{128}\delta + \text{etc.})(\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi)$$
$$- (\tfrac{1}{4}\beta - \tfrac{5}{24}\gamma - \text{etc.}) \sin\varphi^3 \cos\varphi + \text{etc.}$$

Wegen der Integration sehe man nach, Integralformel, 112.

Die Curve kann nun mittelst der Formeln für x und y für einige Werthe von φ gezeichnet werden.

19. Zu dieser Construction ist es sehr behülflich, den Halbmesser des Krümmungskreises an einigen Puncten zu suchen, welches Kästner unterlassen hat. Der Halbmesser der Krümmung sey r, so ist $r = -\frac{\partial x \partial \varphi}{\partial^2 y}$, wenn $\partial\varphi$ constant ist, s. Krümmungskreis, 10. Aus dem Werthe von $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ folgt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -A\cos\varphi + 3B\sin\varphi^2 . \cos\varphi - 5C\sin\varphi^4 . \cos\varphi + \text{etc.}$$

Da

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 1 - \alpha\sin\varphi^2 + \beta\sin\varphi^4 - \text{etc.},$$

so ist

$$r = \frac{1 - \alpha\sin\varphi^2 + \beta\sin\varphi^4 - \text{etc.}}{A\cos\varphi - 3B\sin\varphi^2\cos\varphi + 5C\sin\varphi^4\cos\varphi + \text{etc.}}$$

20. In dem Puncte A', wo $\varphi = 0$ ist, ist der Halbmesser der Krümmung $= \frac{1}{A} = \frac{1}{\omega + \frac{1}{3}\omega^3}$. In P, wo $\varphi = 90°$ ist, ist der Halbmesser der Krümmung unendlich groß. Die Curve wird also immer flächer, je näher ein Bogen derselben an P liegt.

Digitized by Google

21. Die Lage des Krümmungshalbmeſſers zu beſtimmen, muß man die Subnormale ſuchen. Für dieſe iſt der allgemeine Ausdruck $\frac{y\partial y}{\partial x}$. Sie iſt alſo $=$

$$-\frac{A\sin\varphi - B\sin\varphi^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha\sin\varphi^2 + \text{etc.}}\,y.$$

Die Negation zeigt an, daß ihre Richtung, von dem Grundpuncte der Ordinate an genommen, der Richtung der Abſciſſen entgegengeſetzt iſt.

22. Die Tangente des Winkels, welchen eine berührende an der Curve mit der Abſciſſenlinie macht, iſt hier $-\frac{\partial y}{\partial x}$, weil Subtangente und Abſciſſe einerley Richtung haben (berührende Linie, 15.). Sie iſt alſo

$$=\frac{A\sin\varphi - B\sin\varphi^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha\sin\varphi^2 + \text{etc.}}.$$

In P, wo $\sin\varphi = 1$ iſt, iſt die Tangente des Winkels, $= \frac{A - B + C - \text{etc.}}{1 - \alpha + \beta - \text{etc.}}$, und nähert ſich ſehr der tang ω ſelbſt. Der Quotient iſt nahe $A + A\alpha - B = A + \frac{1}{2}A^3 - B = \omega + \frac{1}{3}\omega^5$, mit Weglaſſung der höhern Potenzen von ω. Die beiden erſten Glieder von tang ω ſind ebenfalls $\omega + \frac{1}{3}\omega^5$. (Cyklometrie, 14.).

23. Oder noch deutlicher folgendergeſtalt. Da $y = \sin\mu \,.\, \cot\varphi$, und $\mu = \omega\sin\varphi$ iſt, ſo iſt

$y = (\omega\sin\varphi - \frac{1}{6}\omega^5\sin\varphi^5 + \text{etc.})\cot\varphi$
$= \omega\cos\varphi - \frac{1}{6}\omega^5\sin\varphi^2\,.\cos\varphi + \text{etc.}$ Alſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\omega\,.\sin\varphi - \tfrac{1}{6}\omega^5(2\sin\varphi\,.\cos\varphi^2 - \sin\varphi^5) + \text{etc.}$$
$$= -\omega\sin\varphi - \tfrac{1}{6}\omega^5(2\sin\varphi - 3\sin\varphi^3) + \text{etc.}$$

Dieſes iſt, abſolut genommen, der Werth des Sinus des Winkels, welchen die berührende mit der Abſciſſenlinie macht. In P iſt dieſer Sinus $= \omega + \frac{1}{3}\omega^3 - \text{etc.}$

24. Exempel. Man nehme $\omega = 15°$, dem 12ten Theile des halben Umfanges, ſo giebt die numeriſche Rechnung,

Digitized by Google

$A = 0{,}2677805$. $\alpha = +\ 0{,}035853$
$B = 0{,}0090127$, $\beta = +\ 0{,}001771$
$C = 0{,}0000513$. $\gamma = -\ 0{,}000009$
$D = 0{,}0000001$.

Der Coefficient δ beträgt höchstens 0,00000006.

Die Länge der ganzen Abscisse FP ist = 1,54369. Kästner findet sie 1,5407910, weil er in den Coefficienten β und γ (die bey ihm b und c heißen) Rechnungsfehler gemacht hat. Nach der Lowitzischen Construction ist FP = 1,54415. Die Länge des Kreisquadranten ist = 1,570796.

Der Halbmesser der Krümmung in A ist

$$= \frac{1}{0{,}26718} = 3{,}7344 \ldots .$$

In der Lowitzischen Construction ist $y = \sin\omega \,.\, \cos\varphi$, also $\partial y = -\sin\omega \,.\, \sin\varphi \,.\, \partial\varphi$, und $\partial^2 y = -\sin\omega \,.\, \cos\varphi \,.\, \partial\varphi^2$. Daher ist in A, wo $\varphi = 0$, und $\partial x = \partial\varphi$ ist, der Halbmesser der Krümmung $= \frac{1}{\sin\omega} = \operatorname{cosec} . \omega$.

Für $\omega = 15°$ ist derselbe = 3,86370.

25. Mayer nimmt in seiner praktischen Geometrie, Th. IV. S. 634. statt der Differentialgleichung, $\partial x^2 = \partial\varphi^2 - \partial y^2$, die endliche, $\Delta x^2 = \Delta\varphi^2 - \Delta y^2$, für endliche Unterschiede der Coordinaten und des Bogens, welches in dem gegenwärtigen Falle sehr wohl geschehen kann. Da aus den beiden ersten Formeln in (15.) der Werth von y gefunden wird, so findet er aus denselben die Werthe von Δy von 10 zu 10 Graden des Quadranten; hieraus dann den Werth von Δx. Die Werthe von Δx successiv addirt, geben die zu den berechneten y gehörigen Werthe von x. Zur deutlichen Vorstellung von der Curve setze ich die von diesem Gelehrten berechneten Werthe von x und y her.

Digitized by Google

φ	x	y
0	0,00000	0,26180
10	0,17448	0,25773
20	0,34859	0,24568
30	0,52202	0,22608
40	0,69453	0,19960
50	0,86602	0,16715
60	1,03650	0,12978
70	1,20611	0,08864
80	1,37508	0,04496
90	1,54372	0,00000

Der Werth der ganzen Abscisse für $\varphi = 90°$ stimmt sehr genau mit dem vorher berechneten überein.

26. Euler hat noch eine besondere Weise Kugeln zu überziehen angegeben, in einer Abhandlung über die regulären Körper, Acta Acad. Petrop. T. II. P. 1. a. a. 1778. Eine Kugelfläche kann mit zwölf regulären Fünfecken, denen an jeder Seite noch ein Kreissegment beygefügt wird, bedeckt werden, wobey die Fünfecke allerdings eine Ausdehnung leiden. Diese beträgt nahe den 11ten Theil ihrer Fläche.

Der Halbmesser der Kugel sey $= r$. In einem Kreise, dessen Halbmesser $= 0{,}6196097 \cdot r$ ist, wird ein reguläres Fünfeck gezeichnet, über dessen Seiten auswärts ein Kreissegment angesetzt wird, dessen Halbmesser $= 3{,}484114 \cdot r$ ist.

Allein die Eintragung der Parallelkreise auf den Segmenten wird kaum möglich seyn. Auch ist die Frage, ob die Kreisbogen sich auf der Kugel gut an einander fügen werden.

* * *

Netz bedeutet auch eine durch gerade oder krumme Linien und Fächer eingetheilte Figur, die dazu dient, etwas hinein zu zeichnen. In geographischen oder astronomischen Charten liegt ein Netz zum Grunde, in dessen Fächer die Örter und Länder, oder die Sterne eingetragen

Digitized by Google

werden. Es besteht in jenen aus den Breitenkreisen und Parallelkreisen, in den astronomischen zugleich aus den Declinationskreisen und den Parallelkreisen des Äquators. Bey größern Landvermessungen wird aus den Dreyecken, deren Seiten und Winkel durch trigonometrische Messung bestimmt sind, ein Netz gebildet, in welches die übrigen Gegenstände getragen werden. Man macht ein Netz durch Eintheilung eines großen Quadrats in kleine, um dadurch Risse einer Landschaft abzuzeichnen, auch zu verkleinern. In der Katoptrik macht man ein Netz zu den verzerrten Bildern, die sich auf einem krummen Spiegel ordentlich darstellen.

Neun ist die vorletzte Zahl in der ersten Classe der dekadischen Anordnung der Zahlen.

1. Als solche hat die Neun die Eigenschaft, daß die Summe der Ziffern einer dekadischen Zahl, nach ihrem absoluten Werthe genommen, durch 9 dividirt, denselben Rest giebt, welchen die Zahl durch 9 dividirt läßt. Z. B. in der Zahl 843527 ist die Summe der Ziffern = 29, welche durch 9 dividirt zum Reste 2 läßt. Eben diesen läßt die Division der Zahl selbst durch 9.

2. Dieses beruht darauf, daß jede Potenz von 10, als 10, 100, 1000, u. s. f. durch 9 getheilt, zum Reste 1 läßt. Es enthält $(9+1)^m$ lauter Vielfache von 9 mit der mten Potenz von 1, das ist 1 (Binomischer Lehrsatz). Die Stellenwerthe der Ziffern sind also Vielfache von 9 mit einem Überschusse so groß als der absolute Werth jeder Ziffer ist; die ganze Zahl ist also ein Vielfaches von 9 mit einem Überschusse so groß, als die Summe der absoluten Werthe der Ziffern. Die Zahl und diese Summe geben folglich bey der Division durch 9 denselben Rest.

3. Eine Zahl mit 9 zu multipliciren setze man ihr eine 0 zu, und ziehe dann die Zahl selbst ab. Bey der Multiplication mit 99, oder 999 u. s. f. hängt man zwey, drey u. s. f. Nullen an. Z. B.

Digitized by Google

57468.	57468.
57468	57468
517212	5689332

4. Ist eine Zahl durch 9; 99; 999, u. s. f. theilbar, so läßt sich daher die Division in eine Subtraction verwandeln.

5. Von zwey Zahlen M, N seyn m, n die Reste bey der Division durch 9; das Product M × N giebt denselben Rest, welchen das Product m × n giebt, das ist, die Summe der Ziffern in dem Producte M × N durch 9 getheilt giebt denselben Rest, welchen die Summe in m × n giebt. Z. E.

$$756429 \times 4358 = 3296517582.$$

Die Reste der Factoren sind 6 und 2, ihr Product 12 läßt den Rest 3, welchen auch die Summe der Ziffern in dem Producte läßt.

Denn es sey $M = p \times 9 + m$; $N = q \times 9 + n$, so ist $M \times N = pq \times 81 + (mq + np) \times 9 + mn$. Es geben also M × N und m × n denselben Rest bey der Division durch 9; daher auch die Summen der Ziffern in diesen Producten denselben Rest geben.

6. Es sey D ein Dividendus, d ein Divisor, Q der Quotient, R der Rest, alles in ganzen Zahlen. Das Product der Reste von der Division durch 9 aus d und Q nebst dem Reste aus R ist gleich dem Reste aus D. Denn es ist $D = d \times Q + R$. Die Neuner, welche in dem Producte der Reste aus d und Q, und dem Aggregat dieses Products und des Restes aus R stecken mögen, werden weggeworfen, um den Rest aus D in der kleinsten Zahl zu haben.

7. Die Zahl Eilf hat in dem dekadischen System eine verwandte Eigenschaft mit der Zahl Neun. Die geraden Potenzen von 10 oder 11 — 1 sind Vielfache von 11 mit + 1; die ungeraden Potenzen von 10 sind Vielfache von 11 mit — 1, z. B. $100 = 9 \times 11 + 1$; $1000 = 91 \times 11 - 1$. In einer dekadischen Zahl sind also die Stellenwerthe in den ungeraden Stellen Vielfa-

Digitized by Google

che von 11 plus 13 in den geraden Vielfache von 11 minus 1; also ist die ganze Zahl ein Vielfaches von 11 plus die Summe der Ziffern in den ungeraden Stellen, minus die Summe der Ziffern in den geraden. Ist die letztere größer als die erstere, so fehlt der Zahl zu einem Vielfachen von 11 so viel als der Unterschied beider Summen beträgt. Z. B. die Zahl 8427965 ist ein Vielfaches von 11 + 24 — 17, oder der Rest von der Division durch 11 ist 24 — 17 = 7. Die Zahl 4827265 giebt den Rest 13 — 21 = — 8. Da ihr 8 zu einem Vielfachen von 11 fehlen, so ist sie um 3 größer als das nächst kleinere Vielfache.

8. Von zwey Zahlen M, N seyn m, n die Reste bey der Division durch 11; das Product M × N giebt denselben Rest, welchen das Product m × n giebt. — Der Beweis wie in (5.). Die Reste m, n aus M, N und den aus M × N sucht man nach (7.). Z. B.

$$756429 \times 4358 = 3296517582.$$

Hier ist $m = 18 - 15 = 3$; $n = 11 - 9 = 2$, also $m \times n = 6$, welches hier selbst der Rest von $m \times n$ ist. Der Rest des Products ist $16 - 32 = -16$. Das Product ist also ein Vielfaches von 11 um 16 vermindert, oder von 11 um 6 vergrößert, das ist der Rest ist 6.

9. In jedem Zahlensystem haben die beiden der Grundzahl nächste Zahlen dieselbe Eigenschaft wie 9 und 11 für die Grundzahl 10. Z. B. in dem dodekadischen System ist $12 = 11 + 1$, also jede Potenz von 12 ein Vielfaches von 11 um 1 vergrößert, und jede Zahl ein Vielfaches von 11 mit einem Überschusse so groß als die Summe der absoluten Werthe der Zahlziffern. Beide geben daher, durch 11 dividirt, denselben Rest. Z. B. in der dodekadischen Zahl 4.11.5.10.7 ist die Summe der Ziffern dodekadisch 3.1. Durch 11 dividirt läßt sie den Rest 4, als die Summe der Ziffern 3 und 1. Sie ist dekadisch = 102799.

10. Da $12 = 13 - 1$ ist, so ist jede gerade Potenz von 12 ein Vielfaches von 13 plus 1, jede ungerade

Digitized by Google

ein Vielfaches von 13 minus 1. Eine dodekadische Zahl ist daher ein Vielfaches von 13 plus die Summe der Ziffern in den ungeraden Stellen, minus die Summe der Ziffern in den geraden. Ihr Unterschied ist entweder der Überschuß der Zahl über ein Vielfaches von 13, oder eines solchen Vielfachen über die Zahl. Z. B. in der dodekadischen Zahl 11.4.5.10.7 (dekadisch 235855) ist der Unterschied der beiden Summen = 1.11 — 1.2 = 9, daher 9 der Rest durch 13 ist. In der Zahl 4.11.5.10.7 (dekadisch 102799) ist der Unterschied der beiden Summen = 1.4 — 1.9 = — 5. Das Complement 8 zu 13, ist der Rest bey der Division durch 13.

Neunerprobe, s. Rechnungsprobe.

Newtonisches Parallelogramm (oder auch analytisches) ist ein geometrisches Hülfsmittel, das erste Glied der Reihe für eine veränderliche Größe y zu finden, wenn y durch eine ungesonderte Function von x gegeben wird. Newton hat es in der Methodo fluxionum et serierum infinitarum angegeben; beschreibt es auch in einem zur Mittheilung an Leibnitz bestimmten Briefe an Oldenburg. Newtoni Opuscula, T. I. p. 41 et 351.

1. Newton hat seine geometrisch-analytische Methode nur kurz beschrieben, und nicht gezeigt, wie man alle, sowol fallende als steigende, Reihen für y aus der Gleichung zwischen x und y herleiten könne. Hernach ist sie von andern erklärt und erweitert, als von Colson in seiner Ausgabe der Newtonischen Schrift; von Maclaurin in dem Treatise of Algebra, P. II. ch. 10.; von Stirling in seinem Commentar über Newtons Abhandlung von den Linien der dritten Ordnung; von Kästner in einer Disputation: Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per Series, Lipsiae 1743, und daraus in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen, §. 632 ff. Der Abbé de Gua setzte für das Parallelogramm ein Dreyeck, dessen sich auch Cramer in seiner Introduction à l'Analyse des lignes courbes bedient.

Digitized by Google

Dieser Analyst gebraucht das analytische Dreyeck durchgängig. Taylor hat in seiner Methodus incrementorum, Prop. 9. eine etwas veränderte Construction zur Erfindung des Exponenten des ersten Gliedes angegeben. La Grange hat eine blos analytische Methode gelehret, das Anfangsglied der Reihe, wie auch die übrigen zu finden, welche la Croix beschreibt, in dem Traité du Calcul diff. et intégral, nr. 119 ff.

2. Die Anwendung des analytischen Parallelogramms zu verstehen, muß man den Abschnitt von der Entwickelung ungesonderter Functionen, in dem Artikel, Function, 41 ff. gelesen haben. Es ist hier die Absicht, diejenigen Glieder einer Gleichung zwischen x und y heraus zu heben, durch welche, wenn ihr Aggregat = 0 gesetzt wird, das erste Glied der Reihe für y sich ergiebt.

B						C
	x^4	$x^4 y$	$x^4 y^2$	$x^4 y^3$	$x^4 y^4$	$x^4 y^5$
	x^3	$x^3 y$	$x^3 y^2$	$x^3 y^3$	$x^3 y^4$	$x^3 y^5$
	x^2	$x^2 y$	$x^2 y^2$	$x^2 y^3$	$x^2 y^4$	$x^2 y^5$
	x	$x y$	$x y^2$	$x y^3$	$x y^4$	$x y^5$
A	1	y	y^2	y^3	y^4	y^5
						D

3. Ein Parallelogramm ABCD ist in gleiche Quadrate eingetheilt, in welche die Potenzen von x oder y, und deren Producte so eingetragen werden, wie es in dem Schema ersichtlich ist. Diese Potenzen und Producte stellen die Glieder einer Gleichung zwischen x und y, ohne die Coefficienten vor. Das Parallelogramm muß man nach allen Richtungen hin unbestimmt erweitert sich gedenken. Zieht man durch die gleichnamigen Winkelpuncte

Digitized by Google

zweyer Fächer eine gerade Linie, so sind die Glieder in denen Fächern, deren mit jenem gleichnamigen Winkelpuncte die gerade trifft, in geometrischer Progression. Werden nun zwey Glieder einander gleich gesetzt, so sind alle diejenigen, welche mit denselben auf gedachte Art in gerader Linie sich befinden, einander gleich. Auch sind alle die Glieder einander gleich, deren Fächer an einer mit jener geraden parallelen liegen. Setzt man den Werth von y, der aus jener angenommenen Gleichheit folgt, in ein Glied, das oberhalb der geraden Linie an den Fächern der sich gleich gesetzten Glieder liegt, so entsteht daraus eine höhere Potenz von x als in diesen; setzt man denselben Werth von y in ein Glied unterhalb jener Linie, so entsteht eine niedrigere Potenz. Z. B. wenn die gerade durch die Fächer, x^5, x^2y^2, xy^4, y^6, geht, und zwey dieser Glieder sich gleich gesetzt werden, so sind sie alle sich gleich, und wegen $x = y^4$ ist jedes $= x^5$. Zieht man mit jener geraden eine parallele, z. B. an den Fächern x^4y, x^3y^3, x^2y^5, so sind diese Glieder durch jenen Werth von y auch gleich, und der Werth eines derselben ist $x^{\frac{5}{2}}$. Legt man die Parallele durch x^3y, xy^3, y^5, so sind diese Glieder gleich, und der Werth eines derselben ist $x^{\frac{5}{3}}$.

4. Allgemein seyn α und β die Coordinaten eines Punctes in Beziehung auf die Seiten des Parallelogramms AD und AB; γ und δ die Coordinaten eines andern Punctes, und $x^{\alpha} . y^{\beta} = x^{\gamma} . y^{\delta}$. Die gerade Linie durch die beiden Puncte schneide die Seite AB in dem Puncte, dessen Abstand von A ist e, so ist $x^{\alpha} . y^{\beta} = x^{e}$. Denn da jene Gleichung für alle ganze Werthe von Abständen gilt, so gilt sie auch für gebrochene, als eingeschaltete Größen. Auf einer mit jener Linie parallelen seyn zwey Puncte, deren Coordinaten sind a und b, c und d, so ist $c - a : d - b = \gamma - \alpha : \delta - \beta$. Da $x^{\gamma-\alpha} . y^{\delta-\beta} = 1$, also $y = x^{\frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}}$ ist, so ist auch $x^{a-c} . y^{d-b} = 1$, und daher $x^a . y^b = x^c . y^d$. Für den Durchschnitt dieser parallelen mit AB ist $d = 0$, und $x^a . y^b = x^c$, wo e der Abstand des Durchschnittspunctes von A ist.

Digitized by Google

5. Hieraus ergiebt sich, wie man in einer Gleichung zwischen x und y diejenigen Glieder finden könne, welche einen solchen Werth für y durch x geben, daß alle übrigen Glieder durch diesen Werth von y entweder höhere oder niedrigere Dimensionen nach x erhalten als jene. Nämlich nachdem alle Glieder in ihre gehörigen Fächer eingetragen sind, hat man diejenigen Glieder auszuheben, an welchen die gerade Linie durch die bestimmten Winkelpuncte ihrer Fächer entweder unterhalb aller übrigen oder oberhalb liegt. — Denn in dem erstern Falle geben alle Glieder, außer den ausgesuchten, nach der Substitution des Werthes von y höhere Potenzen von x. Sie verschwinden also für sehr kleine, oder wenigstens unendlich kleine Werthe von x gegen jene Glieder. In dem andern Falle geben alle Glieder, außer den ausgesuchten, niedrigere Potenzen von x als diese, und verschwinden daher für sehr große, oder wenigstens unendlich große x, gegen dieselben.

6. In dem ersten Falle ist die Reihe für y eine steigende Reihe. Denn in einer solchen verschwinden auch die folgenden Glieder gegen das Anfangsglied für unendlich kleine x. In dem andern Falle ist die Reihe eine fallende; denn in einer solchen verschwinden die folgenden Glieder gegen das Anfangsglied für unendlich große x. In beiden Fällen bleibt für y nur das Anfangsglied, und diese vorläufige Gleichung ist dieselbe mit der, welche die in einer untersten oder obersten Linie befindlichen Glieder geben.

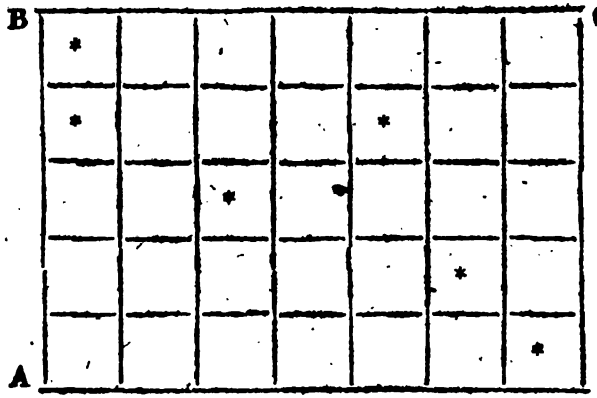
7. Es sey $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+\varepsilon\delta} + \text{etc.}$ Zwey Glieder, welche sich in einer untersten Linie in dem Parallelogramm befinden, seyn $ax^\alpha . y^\beta$ und $bx^\gamma . y^\delta$. Man setze in diesen für y dessen Werth aus der Gleichung $y = Ax^m$, so ist mit Beyseitsetzung der Coefficienten das erstere Glied $x^{\alpha + m\beta}$, das andere $x^{\gamma + m\delta}$. Da beide einerley Potenz von x geben, so ist $\alpha + m\beta = \gamma + m\delta$, also $m = \frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta}$.

8. Exempel. Die gegebene Gleichung sey

$$y^6 - 5xy^6 + \frac{x^5 y^4}{2} - 7a^2x^2y^2 + 6a^5x^5 + b^6x^4 = 0.$$

Digitized by Google

Man zeichne in dem obigen Parallelogramm die in dieser Gleichung befindlichen Glieder durch ein Merkmahl aus, oder trage in das Parallelogramm blos die Glieder der Gleichung ein, für das Exempel wie folget.



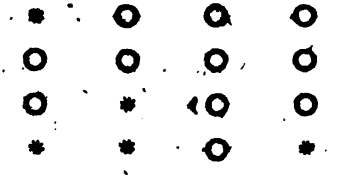
Man lege ein Linial an den untersten Winkelpunct linker Hand zweyer Fächer, so daß alle Fächer, welche das Linial nicht trifft, oberhalb desselben liegen, hier also an das Fach für x^5 und an das für y^6. Diese Linie geht zugleich durch das Fach für x^2y^2. Diese Glieder, für sich allein genommen, geben die Gleichung, $y^6 - 7a^2x^2y^3 + 6a^5x^5 = 0$. Die vier möglichen Wurzeln derselben sind $\pm\sqrt{ax}$ und $\pm\sqrt{2ax}$. Setzt man diese Werthe von y in die übrigen Glieder der Gleichung, so wird die Anzahl der Dimensionen nach x größer als in jenen Gliedern. In diesen ist die Anzahl 3, aber in xy^5 ist sie $3\frac{5}{6}$, in x^4 ist sie 4, in x^5y^4 ist sie 5.

Man lege nun das Linial so, daß alle Fächer, welche es nicht trifft, unterhalb desselben liegen. Diese Lage hat es an den Fächern für x^4 und x^5y^4. Diese Glieder geben, für sich allein genommen, die Gleichung, $x^5y^4 + ab^3x^4 = 0$, also $y^4 = -ab^3x$, und $y = \pm\sqrt[4]{-ab^3x}$, wo x negativ genommen werden muß, wenn nicht a negativ ist. Die übrigen Glieder erhalten nach ihrer Lage in dem Parallelogramm die Dimensionen, 3; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

Es sind demnach hier sechs Reihen für y möglich, vier für eine steigende Reihe, deren Anfangsglieder sind $\pm \sqrt{ax}$ und $\pm \sqrt{2ax}$; dann noch zwey für eine fallende Reihe, deren Anfangsglieder sind $\pm \sqrt[4]{-ab^3x}$.

9. Zweytes Exempel. Es sey das Anfangsglied der Reihe für y in der Gleichung, $y^5 - x^5 + axy + a^3y - 2a^5 = 0$ zu finden. Die auszuzeichnenden Fächer sind:



Die unterste Reihe giebt die Gleichung,

$$y^5 + a^3y - 2a^5 = 0,$$

deren einzige mögliche Wurzel ist $y = a$. Eine andere Reihe geben die beiden Glieder y^3 und x^5, aus welchen das Anfangsglied einer Reihe ist $= x$.

10. Wenn gebrochene Potenzen von x oder y in der Gleichung vorkommen, so hat man diese durch Substitution einer andern veränderlichen Größe auf ganze Potenzen zu bringen. Oder man setzt jedes Glied dahin, wo es durch die Exponenten von x und y, als Coordinaten betrachtet, seine Stelle erhält.

11. Die folgenden Glieder der Reihe für y kann man auf zweyerley Art finden. Newton setzt, wenn das erste Glied Ax^m heißt, $y = Ax^m + p$, und findet nun eine Gleichung zwischen x und p, aus welcher das erste Glied für p, welches Bx^{m+d} sey, hergeleitet wird. Nun setzt er $p = Bx^{m+d} + q$, und sucht das erste Glied für q, welches Cx^{m+2d} sey, setzt $q = Cx^{m+2d} + r$, worauf das erste Glied der Reihe für r das vierte der gesuchten Reihe für y wird u. s. f.

12. Exempel. Die Gleichung sey $y^3 - x^3 + axy + a^3y - 2a^3 = 0$, so ist, wie vorher gefunden ward, das Anfangsglied für $y = a$. Es sey $y = a + p$; so ist

Digitized by Google

$p = -\frac{1}{4}x + q$; ferner $q = \frac{x^3}{64a} + r$; und

$r = \frac{131}{512} \cdot \frac{x^5}{a^2} + s$; u. s. f.

13. Ein bequemerer Weg ist, die Reihe für y mit unbestimmten Coefficienten anzunehmen, nämlich $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + \text{etc.}$ zu setzen, wo aber noch der Unterschied der Exponenten $\pm d$ zu bestimmen ist. Wie dieses geschieht, ist in dem Artikel, Function, gewiesen.

14. Maclaurin nennt dieses Verfahren die zweyte allgemeine Methode der Reihen nach Newton (Treatise of Algebra, p. 261), allein ich finde nicht, daß Newton sie gebraucht hätte. Es bedient sich in seinen analytischen Schriften immer der erstern Methode. Das vorher genommene Exempel ist aus seiner Methodus fluxionum et serierum infinitarum, pag. 44. Opusc. T. I. In einem Briefe an Wallis (Opusc. I. p. 366.) erwähnt inzwischen Newton einer Methode zu integriren durch die Annahme einer Reihe für die unbekannte Größe.

Die Berechnung der Reihe für y aus derselben Gleichung nach der zweyten Methode geschieht folgendermaßen. Es ist hier $m = 0$, und $d = +1$ für eine steigende Reihe. Da $y = Ax + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$ ist, so ist

$$\begin{aligned}
y^3 = {} & A^3 + 3A^2Bx + 3AB^2x^2 + B^3x^3 + \text{etc.} \\
& + 3A^2C \cdot + 3A^2D \cdot + \text{etc.} \\
& + 6ABC \cdot + \text{etc.} \\
+ a^2y = {} & a^2A + a^2B \cdot + a^2C \cdot + a^2D \cdot + \text{etc.} \\
+ axy = {} & + aA \cdot + aB \cdot + aC \cdot + \text{etc.} \\
- 2a^3 = {} & - 2a^3 \\
- x^3 = {} & - 1 \cdot
\end{aligned}$$

Die Coefficienten jeder Potenz von x Null gesetzt, geben die Werthe der Coefficienten in der für y angenommenen

Digitized by Google

Reihe. Das Glied A ergiebt sich aus der Gleichung $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$, nämlich $A = a$, wie aus der Gränzgleichung für unendlich kleine x schon gefunden worden ist.

15. Zur Erläuterung von (4.) folgt hier noch eine geometrische Construction, wie sie Taylor a. a. O. S. 30 angegeben hat.

Man ziehe (Fig. 126.) die geraden AB, AC von unbestimmter Länge senkrecht auf einander. Auf AC nehme man den Theil $AD = \beta$, und ziehe die mit AB parallele $DE = \alpha$; wenn α und β die Exponenten von x und y in dem Gliede $x^\alpha . y^\beta$ der Gleichung sind. Zu dem Puncte E setze man die Zahl $\alpha + m\beta$, wenn die Reihe für y ist $Ax^m + By^{m+\delta} + \text{etc.}$ Auf gleiche Weise nehme man für das Glied $x^\gamma . y^\delta$ den Theil $AF = \delta$ und die mit AB parallele $FG = \gamma$, und setze zu dem Puncte G die Zahl $\gamma + m\delta$. So trage man für jedes Glied der gegebenen Gleichung die Werthe der Puncte ein, welche zu den Potenzen von x und y, mittelst der Exponenten derselben und des Exponenten m des Anfangsgliedes der Reihe, gehören. Setzt man die Zahlen in den Puncten E, G einander gleich, so ergiebt sich der Werth des Exponenten m. Denn man ziehe die mit AC parallele GH an DE, so ist, nach der Voraussetzung, $m \times AD + DE = m \times AF + FG$, woraus ist $m = \frac{DE - FG}{AF - AD}$, das ist $m = \frac{HE}{HG}$. Noch ziehe man EK parallel mit AC an AB, so ist $HE : HG = IK : KE$, also $m = \frac{IK}{KE}$, und $m \times AD + DE = \frac{IK \times AD}{KE} + DE = IK + AK = AI$. Dieses ist der Werth des Exponenten der Potenz von x, welche dem Gliede $x^\alpha y^\beta$ oder $x^\gamma y^\delta$ gleich ist.

Digitized by Google

Die Puncte E, G seyn äußerste, das ist, alle übrige Puncte, die nicht auf der geraden durch E, G, befindlich sind, liegen auf derselben Seite von EG. Ein solcher Punct sey M. Man ziehe ML und MN parallel mit AB und AC, und zu M werde auf ähnliche Art, wie vorher, die Zahl $m \times AL + ML$ gesetzt, wo AL der Exponent von y, ML von x in dem zugehörigen Gliede ist. Man ziehe MO parallel mit EG, so ist

$$m \times AL + ML = \frac{NO}{MN} \times AL + ML = NO + ML = AO.$$

Fallen also alle Puncte, außer denen auf EG oberhalb dieser Linie, so geben alle Werthe der Glieder, außer den sich gleich gesetzten, höhere Potenzen von x als diese; fallen sie aber alle unterhalb, so geben sie niedrigere Potenzen. Durch die Lage von AI wird das Vorzeichen von d in den Exponenten der folgenden Glieder der Reihe für y bestimmt.

16. Taylor giebt folgendes Exempel an einer Differentialgleichung vom zweyten Grade,

$$1 + xy - \frac{x^2 y \partial y}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Setzt man $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \text{etc.}$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = mAx^{m-1} + \text{etc.}$, und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1) \times Ax^{m-2} + \text{etc.}$ Nun erhalten wir durch die Substitution von $y = Ax^m$ für y folgende Exponenten von x aus den Gliedern der Gleichung,

$$0 ; m+1 ; 2m+\tfrac{1}{2} ; m-2.$$

Da m noch erst zu finden ist, so kann man diese Exponenten nicht in das Parallelogramm setzen. Inzwischen setzt Taylor sie so über der Linie AC (Fig. 126.), daß 0 in A, $m+1$ und $2m+\frac{1}{2}$ über AC, und $m-2$ unter AC zu liegen kommen, worauf er die äußersten Exponenten einander gleich setzt. Man mag aber auch je zwey einander gleich setzen, wobey diejenigen als die äußersten anzusehen sind, durch welche die übrigen beiden größer oder kleiner als jene werden.

Digitized by Google

Setzt man $o = m - 2$; so ist $m = 2$, und die beiden übrigen Exponenten sind 3; $4\frac{1}{2}$. — Setzt man $m - 2 = 2m + \frac{1}{2}$, so ist $m = -\frac{3}{2}$, und die übrigen sind o; $-\frac{3}{2}$, beide gültig in relativem Sinne. — Setzt man $m + 1 = 2m + \frac{1}{2}$, so ist $m = \frac{1}{2}$, und die beiden andern sind o und $-\frac{3}{2}$. — Endlich sey $o = m + 1$, so ist $m = -1$, und die beiden andern Exponenten sind $-\frac{1}{2}$; -3.

Die vier hieraus entspringenden Reihen haben die Form,

1. $y = Ax^{\alpha} + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{\delta} + \text{etc.}$
2. $y = Ax^{-\frac{1}{2}} + Bx^{-1} + Cx^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.}$
3. $y = Ax^{-\frac{1}{2}} + Bx^{-1} + Cx^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.}$
4. $y = Ax^{-1} + Bx^{-\frac{3}{2}} + Cx^{-4} + \text{etc.}$

Nodus, s. Knoten. Exempel von Linien der dritten Ordnung mit einem Knoten sehe man in Newtons Abhandlung von denselben.

Nonagonum ist Neuneck, s. Vieleck.

Normale ist eine gerade, die auf eine Curve in einem Puncte derselben senkrecht ist, das ist, auf die sie daselbst berührende. In dem Artikel, berührende Linie, 40—45. ist gezeigt, wie sie, bey rechtwinklichten Coordinaten, mittelst der Subnormale gezogen wird. Da der allgemeine Ausdruck für die Subnormale ist $\frac{y\partial y}{\partial x}$, so ist die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate $= \frac{\partial y}{\partial x}$, welches auch die Tangente des Winkels der berührenden mit der Abscissenlinie ist.

1. Wenn der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ für positive y positiv ist, d. i., wenn x und y sich gleichnamig verändern, so liegt die Normale auf derjenigen Seite der Ordinate, nach welcher hin die Abscissen genommen werden. Oder,

Digitized by Google

eine positive Subnormale zeigt an, daß sie von dem Grundpuncte der Ordinate an nach der Richtung der Abscissen zu nehmen ist.

2. Da für Ordinaten, die aus einem Puncte gezogen werden, die Tangente des Winkels der berührenden mit der Ordinate ist $\frac{y\partial\varphi}{\partial x}$ (a. angef. O. 27.), so ist die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate $= \frac{\partial y}{y\partial\varphi}$, wo $y\partial\varphi$ statt ∂x bey rechtwinklichten Ordinaten steht. Der spitze Winkel liegt nach der Gegend hin, nach welcher der Winkel φ genommen wird.

3. Es sey MAN (Fig. 127.) eine krumme Linie, die Axe der Abscisse AX, eine Abscisse $AP = x$; Ordinate $PM = y$; B ein gegebener Punct, dessen Coordinaten sind $AD = f$, $BD = g$. Aus B ziehe man irgend eine BM an die Curve in M, und setze $BM = z$. Es ist $z^2 = (g+y)^2 + (f-x)^2$, in dem Falle der Figur. Die Differentiation giebt $z\partial z = (g+y)\partial y - (f-x)\partial x$. In dem Falle eines Größten oder Kleinsten ist $\partial z = 0$, also $(g+y)\partial y = (f-x)\partial x$. Die BM schneide AD in Q, so ist $g+y : f-x = y : PQ$, also ist $y\partial y = PQ \cdot \partial x$, oder $PQ = \frac{y\partial y}{\partial x}$. Folglich ist in dem Falle eines Größten oder Kleinsten z die PQ die Subnormale für M, und BM ist die Normale in M.

4. Die Curve sey nach B hin concav. Ein Kreis, der aus dem Mittelpuncte B durch M beschrieben wird, berührt die Curve in M. Der Kreis geht entweder zwischen der geraden berührenden und der Curve durch, oder die Curve zwischen der berührenden und dem Kreise, oder der Kreis macht den Übergang von den aus einem Puncte der Normale durch M beschriebenen Kreisen, bey welchen das erstere oder das zweyte Statt findet. In diesem dritten Falle ist BM der Halbmesser des Krümmungskreises in dem Puncte M. S. Krümmungskreis.

Digitized by Google

5. In dem Falle, da BM größer ist als der Halbmesser der Krümmung, ist BM größer als die nächsten von B an die Curve gezogenen geraden; in dem Falle, da BM kleiner ist als der Krümmungshalbmesser, ist BM kleiner als die nächsten von B an die Curve gezogenen geraden; ist BM der Halbmesser der Krümmung, so ist es das kleinste Größte und das größte Kleinste.

6. Die Normale MQ, von der Curve bis an die Axe, ist $= y\sqrt{(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2})}$. Es ist gleichgültig, wo der Anfang der Abscissen genommen wird.

7. Die krumme Linie sey eine Parabel, so ist $ax = yy$, und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{2y}$. Also ist

$MQ = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4y^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{a(a + 4x)}$. Der Halbmesser der Krümmung an der Parabel ist

$r = (a + 4x)\sqrt{\frac{a + 4x}{4a}}$, (Krümmungskreis, 12.).

Daher ist $MQ : r = a : a + 4x$.

8. Die krumme Linie sey eine Ellipse, an welcher die Abscissen von dem Mittelpuncte aus genommen werden. Die halbe große Axe ist $= a$; die halbe kleine $= b$. Es ist $1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{b^2(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}{a^4y^2}$, (a. a. O. 13.); also die Normale bis an die große Axe,

$N = \frac{b}{aa}\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}$. Der Halbmesser der Krümmung ist $r = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$. Folglich ist $N : r = a^2b^2 : a^4 - (a^2 - b^2)x^2$.

9. Für die Hyperbel wird b^2 an der Ellipse mit $-b^2$ vertauscht. Daher ist die Normale bis an die Axe, $N = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2x^2 + b^2x - a^4)}$. Man bringe näm-

Digitized by Google

lich in (9.) den Factor b unter das Wurzelzeichen, wo derselbe b^2 ist, und vertausche darauf b^2 mit $-b^2$. Der Halbmesser der Krümmung an der Hyperbel ist

$$r = \frac{(a^2x^2 + b^2x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$, indem in (8.) b mit $b\sqrt{-1}$ vertauscht, und Zähler und Nenner durch $\sqrt{-1}$ dividirt werden. Es ist also in

$$N : r = a^2b^2 : (a^2 + b^2)x^2 - a^4.$$

10. Die Normale N ist an den Kegelschnitten kleiner als der Halbmesser der Krümmung. An der Parabel erhellt es unmittelbar. An der Ellipse fällt das Verhältniß N : r zwischen $b^2 : a^2$ und 1 : 1 als den äußersten Werthen. An der Hyperbel ist am Scheitel N : r = 1 : 1, und von da an nimmt das Verhältnißglied für r immer fort zu. Daher ist die Normale unter denjenigen geraden, die von einem Puncte der Axe an einen Kegelschnitt gezogen werden, ein Kleinstes.

11. Apollonius hat in dem fünften Buche seines Werks über die Kegelschnitte sich mit den Normalen, die an die Kegelschnitte durch einen gegebenen Punct gezogen werden, beschäftigt, s. den Artikel, Größtes und Kleinstes, Th. II. S. 684 ff. Er bestimmt, unter welchen Umständen keine, oder nur eine, oder zwey gerade durch einen gegebenen Punct an einen Kegelschnitt gezogen werden können, worauf die Axe ein Kleinstes abschneide, d. i. unter welchen Umständen keine, oder nur eine, oder zwey Normalen aus dem gegebenen Puncte an die Curve auf der andern Seite der Axe sich ziehen lassen. Da diese Untersuchung eine der feinsten in der alten Geometrie ist, so ist es der Mühe werth, zu suchen, wie unsere Algebra sich dabey verhält.

12. Es sey MAN eine Parabel, deren Parameter = a ist. Ihre Gleichung ist $ax = yy$; die Subnormale $PQ = \frac{y\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}a$. Nun ist BD + MP : PD = PM : PQ, das ist $g + y : f - x = y : \frac{1}{2}a$; daher

Digitized by Google

$$fy - xy = \tfrac{1}{2}ag + \tfrac{1}{2}ay,$$

und da $axy = y^3$ ist,

$$y^3 - a(f - \tfrac{1}{2}a)y + \tfrac{1}{2}aag = 0.$$

13. Ist f kleiner als $\frac{1}{2}a$, so bekommt das zweyte Glied das Vorzeichen +, und die Gleichung hat nur eine mögliche, und zwar negative Wurzel. Die Größe g kann immer als positiv betrachtet werden, das ist, die Lage, wie in dem Falle der Figur haben, weil man diejenige Gegend, nach welcher hin BD genommen wird, als die für die negativen Ordinaten ansehen kann. Da nun das gegebene Glied das Vorzeichen + hat, so hat die Gleichung immer eine negative Wurzel (Gleichung, 174.), also ist, bey der Voraussetzung, $f < \frac{1}{2}a$, die einzige Wurzel negativ. — Oder, der Werth der Gleichung ist für $y = o$, und für alle positive y positiv, wird aber für hinlänglich große y negativ, daher der Übergang von den positiven zu den negativen Werthen nur für ein negatives y, die einzige Wurzel der Gleichung, geschieht.

Ist $f > \frac{1}{2}a$, so kann die Gleichung drey mögliche Wurzeln haben, nämlich wenn $4a^3(f - \frac{1}{2}a)^3 > 27 \cdot \frac{1}{4}a^4g^2$ (Gleichung, 70.), das ist, wenn $16(f - \frac{1}{2}a)^3 > 27ag^2$ ist. Zwey Wurzeln sind positiv und eine ist negativ (Gleichung, 174.). Oder, wegen des fehlenden zweyten Gliedes ist das Aggregat der drey Wurzeln Null, folglich sind die Wurzeln ungleichnamig. Da der Werth der Gleichung für $y = o$ positiv ist, und für hinlänglich große positive y auch positiv ist, so müssen zwey positive Wurzeln vorhanden seyn, damit auf den Übergang von den positiven Werthen zu den negativen wieder ein entgegengesetzter folge.

Es sind also in diesem Falle zwey Normalen jenseits der Axe AX, und eine diesseits für negative Ordinaten vorhanden.

Ist $16(f - \frac{1}{2}a)^3 < 27ag^2$, so hat die Gleichung nur eine mögliche, negative Wurzel, und es kann keine Normale jenseits AX an die Parabel gezogen werden.

Ist $16(f - \frac{1}{2}a)^3 = 27ag^2$, so hat die Gleichung zwey gleiche positive Wurzeln neben einer negativen, und

Digitized by Google

es ist an der Parabel jenseits AX nur eine einzige Normale möglich.

14. Apollonius zeigt erstlich in Prop. 49, daß keine Normale durch B an den Bogen AM, und zwar jedes Kegelschnitts möglich ist, wenn AD kleiner ist als der halbe Parameter. An der Parabel ist $PQ = \frac{1}{2}a$, folglich kann AD nicht kleiner als PQ oder $\frac{1}{2}a$ genommen werden. In der Prop. 51 giebt er die Bedingungen der Möglichkeit einer oder zweyer Normalen durch B an AM an. Er nimmt die vierte Proportionale zu $\frac{1}{2}a$; $\frac{2}{3}(f-\frac{1}{2}a)$ und $\sqrt{\frac{1}{2}a(f-\frac{1}{2}a)}$; und nennt sie K. Ist g größer als diese K, so giebt es keine Normale an den Bogen AM, jenseits der Axe; ist $g = K$, so ist nur eine Normale vorhanden; ist g kleiner als K, so finden zwey Normalen Statt. Dieses ist dasselbe mit dem, was unsere Algebra von den Gränzen der Möglichkeit aller drey Wurzeln einer cubischen Gleichung angiebt.

15. Es ist AMBmA (Fig. 128.) eine Ellipse, deren große Axe $AB = 2a$, halbe kleine $= b$; Mittelpunct C; eine Abscisse $CP = x$; Ordinate $MP = y$, ist. Die Gleichung für dieselbe ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Ferner sey E ein gegebener Punct, dessen Coordinaten sind $CD = f$, und $DE = g$. Auch sey EM eine Normale, welche die Axe in Q schneidet. Es ist

$$PQ = -\frac{y\partial y}{\partial x} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Die ähnlichen Dreyecke MPQ, EDQ geben die Proportion $g + y : f + x = y : \frac{b^2x}{a^2}$. Daraus entsteht die Gleichung,

$$a^2y(f + x) = b^2x(g + y), \text{ oder}$$
$$a^2fy = (b^2g + b^2y - a^2y)x.$$

Zur Abkürzung sey $a^2 - b^2 = c^2$, so ist

$$a^2fy = (b^2g - c^2y)x.$$

Digitized by Google

Auf beiden Seiten quadrirt, und für x^2 der Werth durch y^2 gesetzt, wird

$$a^2 b^2 f^2 y^2 = (b^2 g - e^2 y)^2 (b^2 - y^2).$$

Diese Gleichung entwickelt und geordnet wird

$$\begin{aligned} c^4 y^4 - 2b^2 c^2 gy^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 gy - b^6 g^2 \\ - b^2 c^4 y^2 \\ + a^2 b^2 f^2 y^2. \end{aligned} = 0$$

Die Lage von g kann immer als positiv betrachtet werden, wie in (13.) bemerkt ist. So ist die Folge der Vorzeichen $+ - \pm + -$. Die Gleichung hat also, wenn alle vier Wurzeln möglich sind, drey positive, und eine negative Wurzel. (Gleichung, 88.)

16. Die Lage der Normalen für eine Hyperbel zu finden, braucht man nur $+ b^2$ mit $- b^2$ zu vertauschen, also auch $a^2 + b^2 = c^2$ zu setzen. So wird die Gleichung,

$$\begin{aligned} c^4 y^4 + 2b^2 c^2 gy^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 gy + b^6 g^2 \\ + b^2 c^4 y^2 \\ - a^2 b^2 f^2 y^2 \end{aligned} = 0$$

Die Folge der Vorzeichen ist $+ + \pm + +$. Die Gleichung hat also, wenn alle vier Wurzeln möglich sind, entweder zwey positive und zwey negative Wurzeln, oder vier negative. Der letztere Fall ist nicht möglich. Es müßte der Punct E zwischen den beiden entgegengesetzten Zweigen liegen; alsdann aber ist nur an jedem eine Normale möglich.

17. Apollonius findet in Propos. 52. die Gränzen der Möglichkeit zweyer Normalen, und die Bedingung für eine einzige an der Hyperbel auf der entgegengesetzten Seite der Axe; und auch in einem Quadranten der Ellipse, wenn die senkrechte von dem gegebenen Puncte auf die große Axe zwischen dem Mittelpunete und dem Scheitelpunete liegt.

18. An der Hyperbel nimmt er auf der Axe, von dem Mittelpunete aus, eine Linie $AH = \frac{aaf}{ee}$, und sucht

Digitized by Google

es ist an der Parabel jenseits AX nur eine einzige Normale möglich.

14. Apollonius zeigt erstlich in Prop. 49, daß keine Normale durch B an den Bogen AM, und zwar jedes Kegelschnitts möglich ist, wenn AD kleiner ist als der halbe Parameter. An der Parabel ist $PQ = \frac{1}{2}a$, folglich kann AD nicht kleiner als PQ oder $\frac{1}{2}a$ genommen werden. In der Prop. 51 giebt er die Bedingungen der Möglichkeit einer oder zweyer Normalen durch B an AM an. Er nimmt die vierte Proportionale zu $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}(f-\frac{1}{2}a)$ und $\sqrt{\frac{1}{2}a(f-\frac{1}{2}a)}$; und nennt sie K. Ist g größer als diese K, so giebt es keine Normale an den Bogen AM, jenseits der Axe; ist $g = K$, so ist nur eine Normale vorhanden; ist g kleiner als K, so finden zwey Normalen Statt. Dieses ist dasselbe mit dem, was unsere Algebra von den Gränzen der Möglichkeit aller drey Wurzeln einer cubischen Gleichung angiebt.

15. Es ist AMBmA (Fig. 128.) eine Ellipse, deren große Axe $AB = 2a$, halbe kleine $= b$; Mittelpunct C; eine Abscisse $CP = x$; Ordinate $MP = y$, ist. Die Gleichung für dieselbe ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Ferner sey E ein gegebener Punct, dessen Coordinaten sind $CD = f$, und $DE = g$. Auch sey EM eine Normale, welche die Axe in Q schneidet. Es ist

$$PQ = -\frac{y\partial y}{\partial x} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Die ähnlichen Dreyecke MPQ, EDQ geben die Proportion $g + y : f + x = y : \frac{b^2x}{a^2}$. Daraus entsteht die Gleichung,

$$a^2y(f + x) = b^2x(g + y), \text{ oder}$$
$$a^2fy = (b^2g + b^2y - a^2y)x.$$

Zur Abkürzung sey $a^2 - b^2 = c^2$, so ist

$$a^2fy = (b^2g - c^2y)x.$$

Digitized by Google

Auf beiden Seiten quadrirt, und für x^2 der Werth durch y^2 gesetzt, wird

$$a^2 b^2 f^2 y^2 = (b^2 g - e^2 y)^2 (b^2 - y^2).$$

Diese Gleichung entwickelt und geordnet wird

$$\begin{aligned} c^4 y^4 - 2b^2 c^2 gy^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 gy - b^6 g^2 \\ - b^2 c^4 y^2 \\ + a^2 b^2 f^2 y^2. \end{aligned} = 0$$

Die Lage von g kann immer als positiv betrachtet werden, wie in (13.) bemerkt ist. So ist die Folge der Vorzeichen $+ - \pm + -$. Die Gleichung hat also, wenn alle vier Wurzeln möglich sind, drey positive, und eine negative Wurzel. (Gleichung, 88.)

16. Die Lage der Normalen für eine Hyperbel zu finden, braucht man nur $+ b^2$ mit $- b^2$ zu vertauschen, also auch $a^2 + b^2 = c^2$ zu setzen. So wird die Gleichung,

$$\begin{aligned} c^4 y^4 + 2b^2 c^2 gy^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 gy + b^6 g^2 \\ + b^2 c^4 y^2 \\ - a^2 b^2 f^2 y^2 \end{aligned} = 0$$

Die Folge der Vorzeichen ist $+ + \pm + +$. Die Gleichung hat also, wenn alle vier Wurzeln möglich sind, entweder zwey positive und zwey negative Wurzeln, oder vier negative. Der letztere Fall ist nicht möglich. Es müßte der Punct E zwischen den beiden entgegengesetzten Zweigen liegen; alsdann aber ist nur an jedem eine Normale möglich.

17. Apollonius findet in Propos. 52. die Gränzen der Möglichkeit zweyer Normalen, und die Bedingung für eine einzige an der Hyperbel auf der entgegengesetzten Seite der Axe; und auch in einem Quadranten der Ellipse, wenn die senkrechte von dem gegebenen Puncte auf die große Axe zwischen dem Mittelpuncte und dem Scheitelpuncte liegt.

18. An der Hyperbel nimmt er auf der Axe, von dem Mittelpuncte aus, eine Linie $AH = \frac{aaf}{cc}$, und sucht

Digitized by Google

die beiden mittlern Proportionalen zwischen ΔH und $\Delta\Gamma$ ($= a$). Die zweyte derselben, die nächste an $\Delta\Gamma$, nennt er ΔK. Es ist $\Delta K^3 = \frac{a^4 f}{c^2}$. Diese nimmt er zur Abscisse von dem Mittelpuncte aus, und setzt die zugehörige (positive) Ordinate $= KB$. Ich setze $\frac{a^4 f}{c^2} = h^3$, und $KB = k$, so ist $b^2 (h^2 - a^2) = a^2 k^2$, zufolge der Gleichung für die Hyperbel. Ferner nimmt Apollonius $EH = \frac{bbf}{cc}$; $HK = \frac{aaf}{cc} - h$, und sucht eine Linie A, so daß ihr Verhältniß zu KB zusammengesetzt sey aus den Verhältnissen $\Delta E : EH$ und $HK : K\Delta$, das ist, aus $f : \frac{bbf}{cc}$ und $\frac{aaf}{cc} - h : h$, daher ist

$$A = \frac{k(aaf - cch)}{bbh}.$$

Setzt man für h und k ihre Werthe, so ist

$$A = \frac{af - c\sqrt[3]{acf}}{ab\sqrt[3]{acf}} \sqrt{(a^2\sqrt[3]{a^2c^2f^2} - a^2c^2)}.$$

Apollonius zeigt nun folgendes. Ist g größer als A, so ist durch den gegebenen Punkt keine gerade an die Hyperbel möglich, auf welcher die Axe ein Kleinstes abschnitte; ist $g = A$, so ist nur eine solche durch den gegebenen Punct möglich; ist g kleiner als A, so sind zwey solche gerade durch den Punct möglich.

Das heißt, die Gleichung für die Hyperbel hat zwey unmögliche Wurzeln, wenn g größer als dieses A ist, und nur die negativen sind möglich; sie hat zwey gleiche positive, wenn $g = A$ ist; sie hat zwey ungleiche positive Wurzeln, wenn g kleiner als A ist. Es ist sehr merkwürdig, daß Apollonius diese bestimmten Gränzscheidungen gefunden hat. Man wird Mühe haben, sie durch algebraische Rechnung zu bestimmen.

Digitized by Google

19. An der Ellipse nimmt Apollonius C D negativ, oder es liegt ihm D zwischen A und C. Es ist in seinem Beweise, den er mit dem für die Hyperbel zusammen gezogen hat, nur die Frage von den Kleinsten in dem Quadranten über A C. Hier ist $AH = \frac{aaf}{aa-bb} = \frac{aaf}{cc}$.

Ferner $AK^3 = \frac{a^4f}{cc} = h^3$, und $b^2(a^2-h^2) = a^2k^2$.

Weiter ist $EH = \frac{bbf}{cc}$, und $HK = h - \frac{aaf}{cc}$. Das Verhältniß A : KB wird aus denselben Verhältnissen zusammengesetzt wie für die Hyperbel, so daß

$$A = \frac{k(cch-aaf)}{bbh}.$$

Die Fälle, worin von der durch den gegebenen Punct an den Quadranten gezogenen geraden durch die Axe entweder gar kein Kleinstes, oder nur ein einziges, oder zwey abgeschnitten werden, werden durch dieselben Beziehungen von g in Absicht auf A bestimmt, wie für die Hyperbel.

Inzwischen, wenn an dem einen Quadranten zwey Kleinste möglich sind, und noch eine Normale für eine negative Ordinate Statt hat, so giebt es noch ein Kleinstes in dem zweyten Quadranten für eine positive Ordinate, da in der biquadratischen Gleichung, wenn sie drey mögliche Wurzeln hat, auch noch die vierte möglich ist.

Numerisch ist, was sich auf bestimmte Zahlen bezieht.

Numerische Algebra ist diejenige Art des Vortrages derselben, wo die Aufgaben in bestimmten Zahlen angegeben, auch die Beweise in solchen Zahlen geführt werden.

Numerische Buchstaben sind diejenigen, die zu Zahlzeichen dienen.

Numerische Figuren oder Zeichen sind die Ziffern, die ihren Classenwerth durch die Stellen, worin sie stehen, erhalten.

Digitized by Google

Numeriren, s. Zahl.
Numerator oder Zähler, s. Bruch.

O.

Oberfläche ist die Gränze eines geometrischen Körpers, welche etwas zu dem Körper gehöriges ist, ohne einen Theil davon auszumachen. Das griechische Kunstwort ist ἐπιφανεια, etwas, das auswärts erscheint. Abgesondert von dem Körper gedacht heißt sie eine Fläche, s. Fläche. Sie ist wie diese eben oder krumm. Eine krumme ist entweder einfach krumm, wie an Cylindern und Kegeln, oder gedoppelt krumm, wie an Kugeln und Sphäroiden, oder von einer Mittelgattung, wenn sie durch die stetige Bewegung einer geraden Linie beschrieben wird, so daß der Durchschnittspunct zweyer nächsten geraden veränderlich ist, s. krumme Fläche, 49—60, und 126—134. — Eine Oberfläche heißt an einer Stelle concav, wo die berührenden Ebenen innerhalb des Körpers fallen: convex, wo die berührenden Ebenen außerhalb des Körpers liegen.

Oblatus, abgeplattet, wird insbesondere von Sphäroiden gebraucht, die durch Umdrehung einer Ellipse um die kleinere Axe entstanden sind. Archimedes nennt es ἐπιπλατυσφαιροειδες.

Oblongum, als Substantiv gebraucht, bedeutet meistens ein Rechteck, dessen Seiten ungleich sind. Als Adjectiv bezeichnet es die Ungleichheit zweyer Dimensionen, z. B. Sphaeroides oblongum, ein solches, das durch die Umdrehung einer Ellipse um die größere Axe entstanden ist. Archimedes nennt es παραμαχες (dorisch).

Octaëdrum, ein regulärer, in acht gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper, s. Vieleckige Körper.

Octangulum, ein Achteck.

Digitized by Google

Octogonalzahl, s. Polygonalzahl.

Octogonum, ein Achteck.

Okytoboon, griechisch ὠκυτοβοον, ist der Titel einer verlornen Schrift des Apollonius Pergäus, worin er das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange genauer, als es von Archimedes geschehen war, angegeben hat. Eutocius meldet dieses in seinem Commentar über des A. Kreisrechnung. Die Etymologie des Wortes läßt sich nicht angeben. Die erste Hälfte bedeutet Geschwind oder Geschwindigkeit. Es kann seyn, daß Apollonius in dieser Schrift eine Anleitung zum bequemern Rechnen, als es mit den griechischen Zahlenbuchstaben möglich war, ertheilt hat. Dieses vermuthet Halley in der Vorrede zu seiner Ausgabe von des Apollonius Werk über die Kegelschnitte. Umständlich handelt von diesem Worte Kästner in den geometr. Sammlungen, II. nr. 20.

Ordentliche Figur ist eine geradlinichte Figur, in welcher alle Seiten und alle Winkel gleich groß sind, s. Vieleck.

Ordinaten sind erstlich parallele gerade Linien, die von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, der Abscissenlinie, an eine krumme Linie, oder auch an eine andere gerade Linie, in derselben Ebene gezogen sind. Zweytens sind es gerade Linien, die von einem gegebenen Puncte aus an eine krumme Linie, bisweilen auch an eine gerade gezogen werden, wobey ihr Winkel mit einer gegebenen geraden statt der Abscissenlinie dient. Drittens sind es die parallelen geraden, die von einer der Lage nach gegebenen Ebene an eine gedoppelt krumme Linie oder an eine krumme Fläche gezogen werden. Für jene liegen ihre Grundpuncte auf der Ebene in einer krummen Linie, die durch ihre Coordinaten auf derselben bestimmt wird; für die krumme Fläche können die Grundpuncte in einer geraden, oder irgend einer krummen Linie genommen werden. Auch bey geraden Linien gebraucht man diese Art, die Or-

Digitized by Google

dinaten zu ziehen, wenn mehrere, die nicht in einer Ebene liegen, mit einander verbunden werden, s. Linie. Zu vergleichen der Artikel, Coordinaten.

Apollonius nannte die in einer einfach krummen Linie gezogenen parallelen geraden, welche von einer geraden halbirt werden, τεταγμενως κατηγμενας, welches man ordinatim applicatas übersetzt hat. Daher der Ausdruck, ordinatae, zugeordnete. Die Neuern haben den Begriff dahin abgeändert, daß die Ordinaten von irgend einer in der Curve gezogenen geraden an genommen werden, die entgegengesetzten Ordinaten mögen sich gleich oder ungleich seyn, die Ordinaten mögen auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Abscissenlinie liegen, zwey oder mehrere Statt finden.

Desargues, ein praktischer Schriftsteller über den Steinschnitt, die Perspectiv und die Gnomonik im 17ten Jahrhundert, hat die aus einem Puncte gezogenen Linien schon Ordinaten genannt, welches Leibnitz bemerkt hat, Opp. T. III. p. 264.

Ordnungen der krummen Linien sind Abtheilungen derselben, in deren Gleichungen die höchste Summe der Exponenten von den Coordinaten dieselbe ist, s. krumme Linie. Auf gleiche Art werden die Ordnungen der krummen Flächen unterschieden, s. krumme Fläche.

Organische Beschreibung einer Linie ist die Zeichnung derselben durch stetige Bewegung eines Punctes mittelst eines Werkzeuges, insbesondere wenn der Punct sich durch den Durchschnitt zweyer beweglichen geraden Linien ergiebt. Dergleichen Zeichnungen sind in den Artikeln, Ellipsograph und Hyperbel, 51. 52. angeführt. In dem Artikel, Parabel, wird die mechanische Zeichnung dieser Linie gezeigt. Mancherley Methoden findet man in van Schootens Schrift de organica conicarum sectionum in plano descriptione; de Witt elementis curvarum linearum, L. I. bey der Ausgabe der Geometrie des Descartes von van Schooten; in Newtons Abhand-

Digitized by Google

lung von den Linien der dritten Ordnung; in Maclaurins Geometria organica, Lond. 1720; in Braikenridge's descriptio linearum curvarum, Lond. 1733. Drey Nachträge zu den beiden letztern Schriften von den Verfassern sind in den Philos. Transf. vol. 39. for 1735 anzutreffen. S. Geometrie, Th. II. S. 336.

Der Kreis, die einfachste krumme Linie, wird durch das einfachste Werkzeug, den Zirkel, gezeichnet. Cykloiden und Epicykloiden durch sterige Bewegung zu zeichnen ergiebt ihre Entstehungsart unmittelbar; nur wird es nicht leicht seyn, die Einmischung einer fremden Bewegung zu vermeiden.

Ort, geometrischer, ist eine Linie oder eine Oberfläche, welche zur Auflösung unbestimmter Aufgaben dienen. Diese enthalten nämlich alle die Puncte, welche der Aufgabe eine Genüge leisten.

Die alten Geometer unterschieden unter den Örtern der ersten Gattung ebene, körperliche und linearische Örter (loca plana, solida, linearia, oder τοποι ἐπιπεδοι, στερεοι, γραμμικοι). Die ebenen waren ihnen die gerade Linie und die Kreislinie; körperliche, die drey Kegelschnitte, den Kreis ausgeschlossen; linearische, alle andere Linien, als die Conchoide, Cissoide, Spirale, Quadratrix. Die Kegelschnitte heißen körperliche Örter, weil sie Schnitte eines Körpers sind, und als solche betrachtet wurden, die Entstehung der geraden Linie und des Kreises aber in einer Ebene gedacht werden kann. Von den Örtern an eine Oberfläche hat Euklides zwey Bücher geschrieben, von welchen Pappus in der Vorrede zum 7ten Buche nur den Titel anführt. Es kann seyn, daß diese Örter doppelt krumme Linien gewesen sind, dergleichen einige von den Alten betrachtet sind, als die cylindrische und die sphärische Spirale, auch auf der Oberfläche eines Cylinders zwey Curven, durch welche Archytas die Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels auflösete.

Apollonius hat über die ebenen Örter zwey Bücher geschrieben, die verloren sind, aber von Robert

Digitized by Google

Simson, nach dem von Pappus aufbewahrten Inhalte, wieder hergestellet worden, Glasgow 1749; übersetzt von Camerer, 1796. Dieses Werk ist zur Übung in der Elementargeometrie vortrefflich geeignet. Van-Schooten hat es auch versucht diese Schrift wieder herzustellen. Exercitationes mathematicae. L. III. In Fermats Werken ist auch ein Versuch darüber vorhanden. Beyspiele ebener Örter sind folgende.

Wenn aus zwey gegebenen Puncten zwey gerade Linien, die einen gegebenen Winkel mit einander machen, gezogen werden, so ist der Ort ihres Durchschnitts ein Kreisbogen, s. Kreis, 19.

Wenn die Grundlinie und der Inhalt eines Dreyecks gegeben sind, so ist der Ort des Scheitels eine gerade Linie.

Wenn von einem Puncte an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien, sie mögen parallel seyn oder sich schneiden, zwey gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die entweder ein gegebenes Verhältniß haben, oder von welchen die eine mit derjenigen, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, eine gegebene Summe ausmacht, so ist der Ort des Punctes eine gerade Linie. — Dieses ist der oben S. 206 erwähnte Fall. Statt Summe kann auch der Unterschied genommen werden, welches Apollonius nicht bemerkt hat.

Wenn aus zwey Puncten zwey gerade Linien gezogen werden, die ein gegebenes Verhältniß haben, so ist der Ort ihres Durchschnitts eine gerade oder ein Kreis. — Das erstere, wenn das Verhältniß dasjenige der Gleichheit ist. S. auch Kreis, 51—55. Des Apollonius Auflösung führt Eutocius in seinem Commentar zu dessen Werke über die Kegelschnitte im Anfange des ersten Buches an.

Wenn von irgend mehrern Puncten gerade Linien an einen Punct gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen ähnlichen Figuren einem gegebenen Flächenraume gleich ist, so ist der Ort des Durchschnitts eine Kreislinie, s. Kreis, 58—65.

Digitized by Google

Beyspiele von Aufgaben, welche auf einen körperlichen Ort führen, geben die Eigenschaften der Kegelschnitte selbst an. Es werde das Dreyeck gesucht, dessen Grundlinie gegeben ist, und dessen zwey übrige Seiten eine gegebene Summe ausmachen, so ist der Ort eine Ellipse. Setzt man anstatt Summe Unterschied, so ist der Ort eine Hyperbel. Insbesondere ist hier die Aufgabe merkwürdig, welche in dem Artikel, krumme Linien der ersten Classe, 36, 37 vorgetragen ist. Eine synthetische allgemeine Auflösung hat Newton in den Princip. nat. Phil. Lemma XVIII. XIX. gegeben. — In Pauli Frisii Operibus, T. I. ist eine Abhandlung de locis geometricis enthalten, die analytisch ist. Es sind Aufgaben, die auf Kegelschnitte führen. — Man sehe auch de Witt elementa curvarum, L. II. bey der Geometria Cartesii, und van Schooten in den Locis planis restitutis, einiges auch in dessen Sectionibus miscellaneis oder Exerc. mathem. L. V.

Jede krumme Linie giebt mittelst ihrer Eigenschaften einen geometrischen Ort ab, wenigstens ist sie der Ort zur Auflösung der unbestimmten Gleichung, durch welche ihre Natur angegeben wird.

Wenn eine bestimmte Aufgabe auf der Erfüllung zweyer Bedingungen beruht, so giebt jeder Durchschnitt der beiden Linien, welche die Örter für die Bedingungen sind, eine Auflösung der Aufgabe. Z. B. es soll über einer gegebenen geraden Linie ein Dreyeck gezeichnet werden, dessen Inhalt gegeben wird, und dessen beide übrige Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, so ist die gerade Linie und der Kreis zu finden, deren jene ein Dreyeck von dem gegebenen Inhalt, dieser das Dreyeck mit dem gegebenen Verhältnisse der Seiten giebt.

Eine Aufgabe, die auf einen linearischen Ort, oder auf eine Linie des dritten Grades führt, ist folgende. Zwey gerade Linien, die sich schneiden, sind der Lage und Länge nach gegeben, es soll der Ort des Punctes gefunden werden, von welchem aus die beiden Linien unter gleichen

Digitized by Google

Winkeln gesehen werden. Die Aufgabe ist zugleich ein gutes Beyspiel zu den Linien der dritten Ordnung.

Es seyn AC, BC (Fig. 129.) die gegebenen geraden, und P ein Punct, an welchem die Winkel APC, BPC gleich groß sind. Man halbire den Winkel ACB durch die gerade CD, und setze AC = a; BC = b; CP = z; ACD oder BCD = α; DCP = φ, also ACP = α − φ; BCP = α + φ. Nun ist

$$\text{tang APC} = \frac{AC \cdot \sin ACP}{CP - AC \cdot \cos ACP},$$

$$\text{und tang BPC} = \frac{BC \cdot \sin BCP}{CP - BC \cdot \cos BCP},$$

s. Trigonometrie. Also ist zufolge der Bedingung

$$\frac{a \sin(\alpha - \varphi)}{z - a \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{b \sin(\alpha + \varphi)}{z - b \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Daraus ist

$$z = \frac{ab \sin 2\varphi}{b \sin(\alpha + \varphi) - a \sin(\alpha - \varphi)}.$$

Aus diesem Werthe von z durch φ lassen sich für irgend welche Winkel φ die zugehörigen z bestimmen, also so viele Puncte der Curve finden, als man will. Nimmt man φ = α, so ist z = a; nimmt man φ = −α, so ist z = b. Nimmt man φ = 0, oder = 180°, so ist z = 0. Die krumme Linie geht also durch die drey gegebenen Puncte A, B, C. Man muß bemerken, daß die Aufgabe im geometrischen Sinne einen weitern Umfang hat, als im optischen. Wenn P in A fällt, so wird die schneidende eine berührende. Der Winkel derselben mit CA muß nun dem CAB gleich seyn. Eben so verhält es sich in B, und in C muß ein Knoten seyn, damit daselbst zwey schneidende in zwey berührende sich verwandeln können.

Ist b sin(α + φ) = a sin(α − φ), so ist z unendlich groß, und z ist entweder die Asymptote oder ihr parallel. Die Entwickelung dieser Gleichung giebt

Digitized by Google

$\text{tang}\,\varphi = -\frac{b-a}{b+a}\,\text{tang}\,\alpha$. Die Negation zeigt, daß die Lage der unendlich großen z von CD nach CB hin zu nehmen ist. Es falle dieses z in CE, so daß

$\text{tang}\,DCE = \frac{b-a}{b+a}\,\text{tang}\,\alpha$ sey.

Diese CE nehme man zur Abscissenlinie, um die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten gleich so viel möglich einfach zu machen, und setze $DCE = \beta$. Von P ziehe man auf CE die senkrechte PM, und setze $CM = x$; $PM = y$; auch $\beta + \varphi = \omega$, so ist $x = z\cos\omega$, und $y = z\sin\omega$. In dem Werthe von z bringe man statt φ den Winkel ω, so ist

$$z = \frac{ab\sin(2\omega - 2\beta)}{b\sin(\alpha - \beta + \omega) - a\sin(\alpha + \beta - \omega)}.$$

Es ist $\sin 2\omega = 2\sin\omega\,.\cos\omega = \frac{2xy}{z^2} = \frac{2xy}{xx+yy}$,

und $\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = \frac{xx-yy}{xx+yy}$. Dadurch ist $\sin(2\omega - 2\beta)$

$$= \sin 2\omega\,.\cos 2\beta - \cos 2\omega\,.\sin 2\beta$$

$$= \frac{2\cos 2\beta\,.\,xy - \sin 2\beta\,(xx-yy)}{xx+yy}.$$

Ferner ist $bz\sin(\alpha-\beta+\omega) - az\sin(\alpha+\beta-\omega)$

$$= [b\sin(\alpha-\beta) - a\sin(\alpha+\beta)]\,x$$
$$+ [b\cos(\alpha-\beta) + a\cos(\alpha+\beta)]\,y.$$

Der Factor zu x ist $= (b-a)\sin\alpha\,.\cos\beta - (b+a)\times\cos\alpha\,.\sin\beta$. Da $\frac{b-a}{b+a}\,\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\beta$ ist, so ist dieser Factor $= 0$. Der Factor von y ist $= (b+a)\times\cos\alpha\,.\cos\beta + (b-a)\sin\alpha\,.\sin\beta = \frac{(b+a)\cos\alpha}{\cos\beta}$.

Digitized by Google

So wird die gesuchte Gleichung,

$$\frac{(b+a)\cos\alpha}{\cos\beta}(y^3+x^2y)+ab\sin 2\beta(x^2+y^2)$$
$$-2ab\cos 2\beta\,.\,xy=0.$$

Die Linie ist vom dritten Grade, und gehört zu der ersten Gattung, s. krumme Linien der zweyten Classe, 32. Das höchste Glied, y^3+x^2y, ohne den Coefficienten, hat nur den einfachen Factor y, und den quadratischen, nicht zerlegbaren, y^2+x^2. Die Gleichung ist einfach genug, so daß es nicht nöthig ist, sie auf die Form in 32. zu bringen. Setzt man x unendlich groß, so bleiben blos die Glieder, x^2y und x^2, welches giebt $y=-\frac{ab\sin 2\beta\cos\beta}{(a+b)\cos\alpha}$.

Dieses ist der Abstand der Asymptote von der geraden DE. Die Curve ist die in Fig. 59. gezeichnete, zu 38. a. a. O. gehörige. Die Ovale schließt sich an die beiden unendlichen Zweige, weil für jeden Winkel φ, von 0 bis 360° ein z, aber auch nur ein einziges vorhanden ist. In dem Bogen unterhalb der beiden Chorden, AC, BC, sind statt der Winkel, über diesen Chorden, die Nebenwinkel zu nehmen, so daß der Nebenwinkel an der einen dem Winkel über der andern gleich ist.

Wenn $a=b$, so ist $\text{tang}\beta=0$, oder $\beta=0$, und die Gleichung wird

$$(y^2+x^2)\cos\alpha=ax,$$

eine Gleichung für einen Kreis. Denn wenn in diesem Falle durch die drey Puncte A, B, C ein Kreis beschrieben wird, so erscheinen die beiden AC, BC von jedem Puncte der Kreislinie unter demselben unveränderlichen Winkel. A. J. Häseler hat eine Monographie dieser Linie 1785 nach meiner Anleitung geliefert. Die Rechnung in diesem Artikel ist etwas abgeändert. Auch in den neuen Abhandlungen der Schwedischen Akademie, Bd. XV. für 1794 hat Melanderhielm eine Untersuchung darüber angestellt, welche ich nicht gesehen habe.

Digitized by Google

Orthogonius, was rechtwinklicht ist, als ein rechtwinklichtes Dreyeck, oder ein Rechteck, oder ein Körper, dessen Axe senkrecht auf die Grundfläche ist.

Orthographisch ist eine Projection der Puncte und Linien durch senkrechte auf eine gegebene Ebene.

Osculatio ist die innigste Berührung einer krummen Linie mit einer andern krummen Linie, auch einer krummen Fläche mit einer andern. S. Krümmung und Krümmungskreis. Daselbst auch die Benennungen, circulus osculator und parabola osculatrix.

Ovale ist eine durch sich beschlossene krummlinichte Figur, deren zwey Hauptdurchmesser ungleich sind. Eine Ellipse ist eine Ovale, wiewohl man in der Geometrie ihr diesen Namen nicht giebt. Die Ovalen, die man zu allerhand Einfassungen zu gebrauchen pflegt, werden aus zweyerley Kreisbogen zusammengesetzt, und sind daher keine eigentliche geometrische Linien, als in welcher alle Puncte nach einem und demselben Gesetze bestimmt seyn müssen. Diese Art empfiehlt sich inzwischen zum praktischen Gebrauche durch die Leichtigkeit, womit sie gezeichnet wird.

Es sey ABC (Fig. 130.) ein gleichschenkliges Dreyeck, worin AB die Grundlinie ist. Aus A und B beschreibe man mit den gleichen Halbmessern AD, BE Kreise, verlängere CA, CB bis an dieselben in F, G, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CF = CG den Kreisbogen FG, so ist DFGE die eine Hälfte der Ovale, welche auf der andern Seite von DE eben so gezeichnet wird. — Die Verbindung der beiden ungleichen Kreisbogen bey F und G geschieht nach einer gemeinschaftlichen berührenden, weil die Verbindungspuncte mit den Mittelpuncten in gerader Linie liegen.

Bey derselben Länge und Breite eines Ovals kann man die Halbmesser der Kreisbogen auf unzählig viele Arten abändern. Durch Versuche mag man leicht die für

Digitized by Google

jeden Fall schicklichste finden. Die Gleichung zwischen der gegebenen Länge und Breite der Ovale und den beiden Halbmessern ist leicht gefunden.

Es sey die halbe Länge $DH = a$, die halbe Breite $HK = b$; der Halbmesser $AD = x$; der Halbmesser $CF = y$, so ist $(y-x)^2 = (a-x)^2 + (y-b)^2$, also

$$2ax + 2by - 2xy = aa + bb,$$

eine unbestimmte Gleichung für beide Halbmesser.

Die schicklichste Form einer Ovale ist überhaupt die, bey welcher das Verhältniß des kleinern Halbmessers zu dem größern so groß als möglich ist, bey einer gegebenen Länge und Breite der Ovale, das ist, wenn der Quotient des größern Halbmessers dividirt durch den kleinern der Einheit möglichst nahe kommt. Alsdann nämlich unterscheiden sich die Krümmungen der beiden Kreisbogen DF, FG am wenigsten von einander.

Die gefundene Gleichung giebt

$$\frac{y}{x} = \frac{aa + bb - 2ax}{2bx - 2xx}.$$

Wenn dieser Quotient ein Kleinstes oder Größtes ist, so ist

$$2ax^2 - 2(aa + bb)x + b(aa + bb) = 0,$$

(Größtes und Kleinstes, 46.) Hieraus folgt

$$x = \frac{aa + bb \pm (a-b)\sqrt{(aa + bb)}}{2a};$$

$$y = \frac{aa + bb \mp (a-b)\sqrt{(aa + bb)}}{2b}.$$

Der Werth des Quotienten $\frac{aa + bb - 2ax}{2bx - 2xx}$ ist negativ für negative x; unendlich groß für $x = 0$; positiv für x zwischen 0 und b; wieder unendlich groß für $x = b$; negativ für x zwischen b und $\frac{aa + bb}{2a}$; Null für $x = \frac{aa + bb}{2a}$; positiv für jedes x, das größer als dieser

Digitized by Google

Werth ist, und Null für ein unendlich großes positives x, wie für ein solches negatives. Hieraus erhellt, daß der Werth des Quotienten für ein x zwischen o und b ein Kleinstes, und für ein x, das größer als $\frac{aa+bb}{2a}$ ist, ein Größtes wird. Stellt man sich die Werthe des Quotienten als Ordinaten z zu der Abscisse x vor, so hat die Curve, welche eine Linie vom dritten Grade ist, zwey Asymptoten in der Richtung der Ordinaten für $x = o$ und $x = b$, und eine in der Abscissenlinie selbst. Sie hat die in Fig. 63. abgebildete Gestalt, wo AY als die Axe der positiven Abscissen, und AX als die der Ordinaten anzusehen ist. In unserm Falle ist AX zugleich eine Asymptote, die mit CN zusammen fällt.

Da die kleinste Ordinate zwischen den beiden parallelen Asymptoten zu einem kleinern x gehört, als dasjenige zu einer größten Ordinate ist, so haben wir für einen kleinsten Werth des Quotienten das untere Vorzeichen für x und y zu nehmen. Demnach ist

$$x = \frac{aa + bb - (a-b)\sqrt{(aa+bb)}}{2a};$$

$$y = \frac{aa + bb + (a-b)\sqrt{(aa+bb)}}{2b}.$$

Auch ergiebt sich dieses daher, daß an der Ovale der Halbmesser des kleinern Kreises, x, kleiner als b ist.

Exempel. Es sey $a = 4$; $b = 3$, so ist $aa + bb = 25$, und $x = \frac{3}{2}$; $y = 5$, und $\frac{y}{x} = 2$. Nimmt man für x einen etwas kleinern oder größern Werth, so wird der Quotient $\frac{y}{x}$ größer als 2. — Die beiden kleinern Kreise schneiden sich, und die Mittelpuncte der größern fallen in die Durchschnitte jener.

Nimmt man in den Formeln für x und y die obern Vorzeichen, so ist $x = 3\frac{3}{4}$; $y = 3\frac{1}{2}$, und $\frac{y}{x} = \frac{8}{9}$.

Digitized by Google

Dieser Werth des Quotienten ist ein Größtes, wie man es bey veränderten Werthen von x und y finden wird. Bey der Ovale ist er nicht anwendbar.

Man kann auch den Verbindungsbogen für die beiden kleinern Kreise aus C durch zwey Puncte, f, g, auf der andern Seite des Durchmessers der Ovale D E beschreiben. So erhält man eine an den Seiten eingebogene Figur. Für diese ist die Gleichung zwischen den Halbmessern, der Länge und der Breite,

$$(y + x)^2 = (a - x)^2 + (b + y)^2,$$

also

$$2ax - 2by + 2xy = aa + bb.$$

Hier ist y das entgegengesetzte von y für die Ovale.

Die Ovale, an welcher die Kreise sich möglichst nahe kommen, mag als Gewölbebogen bey gedruckten Gewölben benutzt werden. Sie steht an den Endpuncten senkrecht auf die Gewölbepfeiler, welches ein einziger Kreisbogen nicht thut. Das möglichst nahe Verhältniß der Krümmungen an den Kreisbogen setzt es der wenigsten Gefahr von einem ungleichen Druck aus. Bossüt hat in seinem Cours des Mathématiques sie zu diesem Gebrauche angegeben.

An den krummen Linien vom dritten und höhern Graden kommen Ovale als zusammenhängende mit der ganzen Curve oder auch als abgesonderte Theile vor. Hier bestehen sie aber nicht aus Kreisbogen, weil alle Puncte derselben mit den übrigen Puncten der Curve nach demselben Gesetze bestimmt werden. Die Gleichung, $x^4 - ax^3 - a^2y^2 = 0$ giebt eine blattähnliche Figur mit einer Spitze. Die Gleichung,

$$y^4 - 4y^2 = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

giebt in einigen Fällen eingedruckte Ovale, in andern sonderbar verschlungene, auch mehrmals eingedruckte Figuren, nach Beschaffenheit der Wurzeln, welche die Gleichung, $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e = 0$, hat, in Absicht auf Ungleichheit oder Gleichheit, Möglichkeit oder Unmöglichkeit. Hutton hat sie in seinem mathematisch-physikalischen Wörterbuche gezeichnet.

Digitized by Google

Ovalen des Descartes sind krumme in sich selbst wiederkehrende Linien, welche die daran aus einem Puncte gezogenen geraden Linien, nach dem Gesetze für Lichtstrahlen, so brechen, daß sie nach der Brechung in demselben Puncte zusammen kommen. Descartes hat in seiner Geometrie, 2. B., vier Arten, oder vielmehr zwey Arten, jede mit zwey Unterarten angegeben. Es ist von denselben schon in dem Artikel, Diacaustica, Th. I. S. 757. Nachricht ertheilt, und die Gleichung für sie aus einer allgemeinen für alle Brennlinien durch Brechung hergeleitet. Daselbst ist bemerkt, daß diese Curven in der Optik von keinem Gebrauche sind, wie Descartes wähnte. Als ein Beyspiel, wie die Geometrie eine physische Untersuchung allgemein macht, verdient diese geometrische Speculation einige Aufmerksamkeit.

Es sey A (Fig. 131.) der Punct, von welchem die Strahlen auf die brechende Fläche fallen, von welcher CMN ein Durchschnitt ist, B der Punct, in welchem sie durch die Brechung vereinigt werden. In M sey MP die Normale. Die gerade AM werde nach Ma verlängert, so ist PMa der Einfallswinkel, PMB der Brechungswinkel in M. Die Sinus dieser Winkel haben ein gegebenes Verhältniß, welches m : n sey. Man nehme noch einen Punct N auf der Curve, an welchen die Linien AN, BN gezogen seyn. Aus A werde mit dem Halbmesser AN der Kreisbogen Nm, und aus B mit dem Halbmesser BN der Kreisbogen Nn beschrieben. Je näher die Puncte M, N sich liegen, desto näher kommen die Winkel der Chorde von MN mit Mm und Mn den Winkeln der berührenden mit eben denselben, und das Verhältniß der Mm : Nn dem Verhältnisse der Cosinus dieser Winkel, das ist, dem Verhältnisse der Sinus von PMa und PMB, oder dem Brechungsverhältnisse m : n, das ist $\partial . AM : -\partial . BM = m : n$. Folglich $n\partial . AM = -m\partial . BM$. Daher verhält sich auch die endliche Zunahme von AM zu der endlichen Abnahme von BM wie m : n. Es sey C der Punct der Curve,

Digitized by Google

wo die gerade AB sie schneidet, so ist ebenfalls AM — AC : BC — BM = m : n. Jenes ist die Zunahme von AC bis zu dem Puncte M, dieses die Abnahme von BC bis zu demselben Puncte M.

Die Brechung findet nur bis zu dem Puncte Statt wo die Curve von der geraden aus A berührt wird, und der Einfallswinkel ein rechter ist. Von da an wird dieser Winkel spitz, und die Brechung verwandelt sich in eine Zurückwerfung, bey welcher aber die Sinus des Einfalls- und Zurückwerfungswinkels dasselbe Verhältniß wie bey der Brechung behalten. Die ganze Figur wird eine Ovale, die nach A hin schmäler als jenseits B ist, wenn n kleiner als m ist, etwa so wie Tab. VII. Fig. 114. im 1. Theile gezeichnet ist. Sie ist eine höhere Art von Ellipse, nur daß an ihr der eine Brennpunct außerhalb der Curve liegt. Man kann sie leicht zeichnen, wenn man AM zwar willkürlich, doch innerhalb einer gewissen Gränze annimmt, aus der Gleichung für die Curve BM berechnet, und dann das Dreyeck AMB zeichnet, welches für so viele Puncte, als nöthig ist, wiederholt wird. Den entferntesten Punct D der Curve auf der Axe findet man leicht, weil AD — BD = AB, und AD — AC : BC — BD = m : n ist. Daraus ergiebt sich (m + n) AD = (m + n) AC + 2m . BC.

An der zweyten Ovale ist BM größer als BC, übrigens ebenfalls AM — AC : BM — BC = m : n. Man könnte diese und die dritte Gattung als eine höhere Hyperbel ansehen, wenn sie nicht in einem endlichen Raume beschränkt wären.

An der dritten und vierten Ovale liegt der Punct B mit A auf derselben Seite von C und weiter davon entfernt. An der dritten ist AM — AC : BM — BC = m : n. An der vierten ist AM — AC : BC — BM = m : n. Die letztere bildet ein Oval wie die erste Art, und kommt darin der Ellipse näher, daß beide Vereinigungspuncte der Strahlen innerhalb der Curve liegen.

Digitized by Google

Eine andere Gleichung für diese Ovale läßt sich folgendergestalt finden. Es ist

$$AP : AM = \sin AMP : \sin APM;$$
$$BM : BP = \sin BPM : \sin BMP.$$

Da $\sin BPM = \sin APM$, und $\sin AMP = \sin PMa$ ist, so ist

$$AP \times BM : BP \times AM = \sin PMa : \sin BMP.$$
$$= m : n, \text{ also}$$
$$n \cdot AP \times BM = m \cdot BP \times AM.$$

Descartes nimmt die hier zuerst gefundene Gleichung für die nach einem Puncte brechende Linie an, und zeigt hernach, daß sie auf diese zweyte führt. Er verschweigt ganz, wie er auf jene Gleichung gekommen sey, welches fast nicht anders als auf die hier angewandte Art geschehen seyn kann, so daß Descartes wirklich in diesem Falle Differentialverhältnisse gebraucht hätte.

Wenn die Strahlen parallel auffallen, so verwandelt sich die erste Ovale in eine Ellipse, deren einer Brennpunct, der entfernteste von C, ist B, halbe große Axe $= \frac{m}{m+n} BC$, und der Abstand des Mittelpunctes von $B = \frac{n}{m+n} BC$. Die zweyte Ovale verwandelt sich für diesen Fall in eine Hyperbel, deren einer Brennpunct, der nächste bey C, ist B, halbe Hauptaxe $= \frac{m}{n-m} BC$, und der Abstand des Mittelpunctes von $B = \frac{n}{n-m} BC$. Werden die Strahlen BM parallel, so wird die dritte Ovale eine Hyperbel, die vierte eine Ellipse.

Man vergleiche noch über diese Ovalen Huygens Schrift, de lumine, cap. VI. In den Mémoires de l'Acad. des Sciences, 1758. ist ein Aufsatz von d'Arcy, worin gewiesen wird, wie diese Ovalen durch eine stetige Bewegung zu beschreiben sind.

Digitized by Google

Oxygonium triangulum, ein spitzwinklichtes Dreyeck.

P.

Pantogonia curva ist eine krumme Linie, zu den trajectoriis reciprocis gehörig, welche, wenn sie um eine ihrer Ordinaten gedreht wird, bis sie wieder in ihre Ebene umgekehrt liegt, und alsdann längs dieser Ordinate hin und her geschoben wird, sich selbst in ihrer ersten Lage allenthalben unter einem und demselben Winkel schneidet. Dieser Winkel ist irgend einer, nach der Lage der Ordinate, um welche die Drehung geschieht.

Die Aufgabe, die Natur dieser Curve zu bestimmen, ward Joh. Bernoulli von einem englischen Mathematiker aufgegeben. Seine Auflösung steht in seinen Werken T. II. p. 600 ff. Die Abscisse sey ein Bogen, dessen Sinus $= x$ für den Halbmesser, a, so ist die Ordinate $= c + \int \frac{a\partial x}{x}$, das ist $= c + a \log. \frac{x}{b}$.

Die Frage ist eine bloße analytische Künsteley.

Pantograph ist der bekannte Storchschnabel zum Abzeichnen einer jeden Figur, sey es verkleinert oder vergrößert. Hutton nennt dieses Instrument in seinem Wörterbuche ganz irrig Pentagraph. Der Erfinder ist der Jesuit, Christoph Scheiner, der es in einer besondern Schrift sehr ausführlich erklärt hat. Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet cet. Romae, 1631. Er hatte im J. 1603 Bekanntschaft mit einem Mahler gemacht, der ihm eröffnete, er könne jede Zeichnung auf das genaueste nachzeichnen, dabey vergrößern oder verkleinern, ohne das Original anzusehen, auch jeden Theil, in welcher Lage er sey, unabhängig von den andern auswählen. Scheiner ward sehr begierig, das sonderbare Kunststück zu erfahren, aber jener wollte es durchaus nicht mittheilen. Unmuthig darüber erwiederte

Digitized by Google

er endlich dem Mahler, er wolle schon selbst es herausbringen. Dieser lacht und sagt, das könne selbst ein Teufel nicht entdecken. Scheiner entdeckt es aber doch nach etwas langem Nachsinnen, und schickt nun das Instrument mit Proben an den Mahler, der lange Zeit vor Erstaunen nicht zu sich kommen konnte.

Der Pantograph beruht auf folgendem sehr einfachen Grunde. Es ist ABCD (Fig. 132.) ein Theil von dem Umfange einer Figur oder irgend eine andere Verbindung von Linien in einer Figur. Nach dem Puncte P hin seyn die geraden AP, BP, CP, DP, gezogen, und an diese die mit AB, BC, CD parallelen ab, bc, cd. Nun ist die Figur ABCDPA der abcdpa ähnlich (Figur, 55 ff.). Die Linien ab, bc, cd verhalten sich wie AB, BC, CD, und machen mit einander dieselben Winkel wie diese. Die geraden, wie PA, Pa, welche von P an jene gezogen werden, und in derselben geraden Linie liegen, haben durchgehends dasselbe Verhältniß. Kann man also zwey Stifte um den festen Punct P so herumführen, daß beide nebst P immer in gerader Linie bleiben, und daß ihre Abstände von P dasselbe Verhältniß behalten, so beschreiben sie ähnliche Figuren. Nimmt man Pa, Pb u. s. w. nach entgegengesetzter Richtung über P hinaus, so geschieht dasselbe. Ist hier Pa = PA, und so auch jede der andern, so wird die eine Figur der andern völlig gleich.

Scheiner verbindet zwey Paare paralleler Lineale BF, DG und BH, CI (Fig. 133.) mit einander, durch Zapfen in den Puncten B, C, D, E, wodurch das Parallelogramm BCDE sich auf jede Art verschieben läßt. Die Puncte P, a, A, die in gerader Linie liegen, sind diejenigen, wohin der feste Punct und die beiden Stifte zur Beschreibung der Figuren gesetzt werden. Die Dreyecke PBA, PCa sind wegen des gemeinschaftlichen Winkels bey P und der gleichen bey B und C, ähnlich, also ist BP : BA = CP : Ca. Bey jedem andern Winkel des Parallelogramms sind, wegen dieser Proportion, die Dreyecke PBA, PCa ähnlich, daher PA und Pa in gerader

Digitized by Google

Linie liegen, und sich wie BP : CP verhalten, das ist, wie in der erstern Lage. Der Punct P bekommt eine Stütze (oder vielmehr eine Holzschraube), so auch der Punct B und der Punct E von gleicher Höhe mit den beschreibenden Stiften. Scheiner bemerkt es zwar nicht, doch ist es nöthig, daß die parallelen Lineale Löcher bekommen, welche genau auf einander passen, damit man das Verhältniß PA : Pa, welches dem PB : PC gleich ist, verschiedentlich annehmen könne. Der Punct a mag auch auf DE in a' genommen werden. Alsdann ist

$$PA : Pa' = BA : BD.$$

Man kann den Punct a auch auf die Diagonale BE bringen, mittelst eines fünften Lineals, das mit BC oder BD parallel in einem beliebigen Abstande befestigt wird.

Parabel ist diejenige krumme Linie, an welcher das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Rechteck von der Abscisse und einer gegebenen Linie, oder in Symbolen, deren Gleichung ist $yy = ax$. Sie macht den Übergang von den Ellipsen zu den Hyperbeln. Sie entsteht in einem Kegel, wenn der Schnitt parallel mit einer Seite des Kegels geführt wird, S. Kegelschnitt. Zum Unterschiede von andern paraboliſchen Linien wird sie auch die Apolloniſche Parabel genannt.

1. Wenn die Coordinaten rechtwinklichte sind, so ist die Abscissenlinie die Axe, welche die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt. Die gegebene Linie a heißt der Parameter zur Axe, oder schlechtweg zu der Parabel selbst. Der Anfangspunct der Abscissen ist der Scheitel der Parabel.

2. Für jedes positive x sind zwey gleiche und entgegengesetzte Ordinaten y. Diese wachsen zwar in Beziehung auf den Parameter immer fort, wenn x vergrößert wird, aber in Beziehung auf die Abscissen werden sie immer kleiner. Es ist $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a}{x}$, daher für ein unendlich großes x die Ordinate in Vergleichung mit demselben

Digitized by Google

verschwindet. Für negative x sind keine Ordinaten möglich.

3. Man nehme auf der Axe AX (Fig. 134.) die Abscisse $AF = \frac{1}{4}a$, und ziehe an irgend einen Punct der Parabel M die gerade $FM = u$, es ist $u = x + \frac{1}{4}a$.

Denn es ist $u^2 = (x - \frac{1}{4}a)^2 + y^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = (x + \frac{1}{4}a)^2$; also $u = x + \frac{1}{4}a$. Dieser Werth bleibt, wenn AF kleiner als AF ist.

4. Der Punct F heißt der Brennpunct der Parabel. Die Ordinate in demselben ist der halbe Parameter. Dieses hat die Parabel mit den andern beiden Kegelschnitten gemein.

5. Auf den Brennpunct würde man durch die Aufgabe kommen, den Punct F auf der Axe zu finden, von welchem die gerade FM an die Curve gezogen einen rationalen Werth hat. Man setze $AF = c$, so ist $FM^2 = u^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + (a - 2c)x + c^2$. Soll dieses das Quadrat einer rationalen Größe seyn, so ist $\frac{1}{2}(a - 2c) = 0$, also $a = 4c$, und $c = \frac{1}{4}a$.

6. Es sey der Winkel $AFM = \varphi$, $FM = u$, so ist $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$, oder $u \cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{2}a$.

In dem Falle der Figur, da P über F von A an hinaus fällt, ist $FP = u\cos(180° - \varphi)$, und $AP = \frac{1}{2}a + u\cos(180° - \varphi)$. Da $u = x + \frac{1}{4}a$ ist, so ist $u = \frac{1}{2}a + u\cos(180° - \varphi) = \frac{1}{2}a - u\cos\varphi$, also $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$.

Wenn P zwischen A und F fällt, so ist $AP = \frac{1}{2}a - u\cos\varphi$. Nun ist ebenfalls $u = x + \frac{1}{4}a$, also ist $u = \frac{1}{2}a - u\cos\varphi$, und $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$.

7. Es ist NAM (Fig. 135.) eine Parabel, deren Axe AX ist. In der Entfernung BD von der Axe sey durch den Punct B der Parabel eine gerade BU parallel mit AX, auf welcher die Abscissen wie BQ genommen werden. Die Ordinatenlinien, wie MQN, schneiden die BU unter dem Winkel $BQM = \omega$. Es sey $BQ = x$;

Digitized by Google

$QM = y$, man sucht die Gleichung zwischen den gegebenen und veränderlichen Größen.

Der Parameter der Parabel sey $= a$; der Abstand $BD = c$, so ist erstlich $AD = \frac{cc}{a}$. Man ziehe MP und QR senkrecht auf AX, so ist $MP + QR = y \sin \omega$, und $PR = y \cos \omega$. Also ist $MP = y \sin \omega - c$; $PD = PR - DR = y \cos \omega - x$. Daher ist $AP = AD - PD = \frac{cc}{a} - y \cos \omega + x$. Nun ist $a \times AP = MP^2$, folglich ist

$$a\left(\frac{cc}{a} - y \cos \omega + x\right) = y^2 \sin \omega^2 - 2cy \sin \omega + cc;$$

und geordnet,

$$ax = y^2 \sin \omega^2 - (2c \sin \omega - a \cos \omega) y.$$

Hier hat y zwey Werthe, QM, QN, die ungleichnamig sind, wegen des Vorzeichens von ax, wenn es auf die andere Seite gebracht wird, (Gleichung, 35.).

8. Man setze den Coefficienten von y, nämlich $2c \sin \omega - a \cos \omega = 0$, oder $\text{tang } \omega = \frac{a}{2c}$, so ist die Gleichung, $ax = \sin \omega^2 . y^2$, und die entgegengesetzten Ordinaten, QM, QN, sind sich gleich.

9. Da $\sin \omega^2 = \frac{\text{tang } \omega^2}{1 + \text{tang } \omega^2} = \frac{aa}{aa + 4cc}$ ist, so ist die Gleichung, wenn die Ordinaten sich gleich und entgegengesetzt sind, $\frac{aa + 4ce}{a} x = yy$.

10. Die der Axe parallele BU heißt ein Durchmesser (Diameter) der Parabel, in Beziehung auf die parallelen Chorden, welche sie halbirt; und $\frac{aa + 4cc}{a}$ oder $\frac{a}{\sin \omega^2}$ heißt der Parameter zu dem Durchmesser BU.

Digitized by Google

Der Endpunct B heißt der Scheitel des Durchmessers. Man setze $\frac{aa + 4cc}{a} = b$, so ist die Gleichung für die Coordinaten auf dem Durchmesser BU, $bx = yy$.

11. Jede parallele mit der Axe ist ein Durchmesser, wenn der Winkel der Coordinaten dem Abstande derselben von der Axe gemäß genommen wird. Auch giebt es für jede parallele Chorden einen Durchmesser, wenn der Abstand c dem Winkel ω gemäß bestimmt wird.

12. Eine der Axe parallele, welche eine Chorde halbirt, halbirt alle dieser Chorden parallelen. Denn da es für diese Chorden einen Durchmesser giebt, so ist es kein anderer, als jene die gegebene Chorde halbirende.

13. Auf der über den Scheitel hinaus verlängerten Axe nehme man AT = AD, und ziehe TBt, so ist diese den von BU halbirten Chorden parallel, und berührt die Parabel in B.

Denn da $AD = \frac{cc}{a}$ ist, so ist $DT = \frac{2cc}{a}$, und

$\text{tang}\, BTD = \frac{BD}{TD} = \frac{a}{2c} = \text{tang}\, \omega$; also ist

$BTD = \omega$.

Diese BT berührt die Parabel in B. Denn auf derselben fallen die zwey Durchschnittspuncte der parallelen Chorden und der Parabel in einen Punct zusammen. Oder, wenn BT die Parabel noch in einem Puncte ausser B träfe, so würde die durch die Mitte der auf TBt enthaltenen Chorde mit AX parallele auch alle dieser Chorde parallelen halbiren, welches nicht möglich ist, da BU die halbirende ist.

14. Aus dem Brennpuncte F ziehe man nach B die gerade FB, so ist der Winkel FBT = BTF.

Denn es ist BF = AD + AF (3.), oder BF = AT + AF = FT; also FBT = BTF.

15. Daher ist auch der Winkel tBU = TBF.

16. Wenn BU einen der Strahlen vorstellt, die auf die Parabel als eine zurückwerfende Linie einfallen, so wer-

Digitized by Google

den sie alle nach dem Brennpuncte hin zurückgeworfen. Daher hat dieser Punct seinen Namen bey den Neuern erhalten. Die Strahlen die F auf die Parabel fallen, werden durch die Zurückwerfung der Axe parallel.

17. Der Winkel BFX ist $= 2FBT = 2\omega$.

18. Es ist $BF = \frac{1}{4}b$, dem vierten Theile des Parameters zu dem Durchmesser BU.

Denn $BF = AF + AD = \frac{1}{4}a + \frac{cc}{a}$

$= \frac{aa + 4cc}{4a} = \frac{1}{4}b$ (10.).

19. Man ziehe in A auf die Axe die senkrechte AE, welche die berührende BT in E treffen, und verbinde FE, es ist der Winkel FET ein rechter, und FE der vierte Theil der mittlern Proportionale zwischen den Parametern der Axe und des Durchmessers BU.

Denn, weil $AD = AT$ ist, so ist $AE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}c$. Ferner ist $AT = \frac{cc}{a}$, und $AF = \frac{1}{4}a$, also $AT \times AF = AE^2$, oder $AT : AE = AE : AF$. Daher sind die Dreyecke TAE, EAF ähnliche, und der W. $AEF = T$, und $AEF + AET = R$.

Hieraus ist $EF^2 = FT \times AF = (\frac{1}{4}a + \frac{cc}{a})\frac{a}{4}$

$= \frac{aa + 4cc}{16} = \frac{1}{16}ab$, und $EF = \frac{1}{4}\sqrt{ab}$.

Auch, wenn A einen andern Punct der Parabel bedeutet, an welchem AE die berührende ist, sind die Dreyecke AEF, EBF ähnliche. S. Lamberts Insigniores orbitae Cometarum proprietates, §. 7.

20. Der Halbmesser der Krümmung in B ist $r = \frac{b}{2a}\sqrt{ab}$.

Digitized by Google

Denn es ist an der Parabel, $r = (4AF + 4AD) \times \sqrt{\frac{(4AF + 4AD)}{16AF}}$ (Krümmungskreis, 12.). Da $b = \frac{aa + 4cc}{a} = \frac{aa + 4a \times AD}{a} = a + 4AD =$ $4AF + 4AD$, so ist $r = b\sqrt{\frac{b}{4a}} = \frac{b}{2a}\sqrt{ab}$.

21. Man ziehe in B auf die berührende TBt die Normale BG, welche die Axe in G schneide; es ist DG gleich dem halben Parameter.

Denn wegen der ähnlichen Dreyecke TAE, BDG ist $AT : AE = BD : DG$, das ist $\frac{cc}{a} : \frac{1}{2}c = c : DG$, also $DG = \frac{1}{2}a$.

Die Differentialgleichung giebt für die Normale an der Parabel eben den Werth unmittelbar aus ihrer Gleichung.

22. An der Parabel NAM (Fig. 136.), deren Scheitel A, Brennpunct F ist, sey durch F die Chorde MFN gezogen. In M und N seyn die berührenden MT, NT, welche sich in T schneiden. Der Durchschnittswinkel MTN ist ein rechter, und TF ist senkrecht auf MN.

Der Winkel TMF sey $= \omega$, so ist $MFX = 2\omega$ (17.). Da $NFX = 2R - 2\omega$ ist, so ist $TNF = R - \omega$, und der Winkel der beiden berührenden $MTN = R$.

Ferner sind MF und NF der vierte Theil der Parameter zu den Durchmessern in M und N. Also $MF = \frac{a}{4\sin\omega^2}$; $NF = \frac{a}{4\cos\omega^2}$, und $MF : NF = \cos\omega^2 : \sin\omega^2$. Da $TM : TN = \cos\omega : \sin\omega$, so ist $MF : NF = TM^2 : TN^2$. Das Perpendikel von T auf MN theilt die MN nach demselben Verhältnisse ein, (Dreyeck, 11.), also ist TF senkrecht auf MN.

Digitized by Google

Die Dreyecke MFT, TFN sind sich ähnlich, ein besonderer Fall des in (19.) angeführten Satzes.

23. Es sind von einer Parabel zwey Puncte gegeben, nebst der Richtung der Durchmesser an denselben, und der Winkel der berührenden an einem der Puncte mit dem Durchmesser, es soll die Parabel bestimmt werden.

Die gesuchte Parabel sey BAH (Fig. 137.), die zwey gegebenen Puncte B und C, der Durchmesser in B sey BU, die darauf senkrechte BH, die berührende BT. Da der Punct C gegeben ist, so ziehe man durch denselben die mit BT parallele CE, so sind BE und CE gegebene Größen. Der Parameter zu BU sey $= b$, so ist $b = \frac{CE^2}{BE}$ (10.). Der Winkel der berührenden mit dem Durchmesser sey $= \omega$, und a der Parameter der Parabel oder der zu der Axe AG gehörige, so ist $b \cdot \sin\omega^2 = a$ (10.). Der Abstand BG des Punctes B von der Axe AG sey $= c$, so ist $c = \frac{a}{2 \operatorname{tang}\omega}$ (13.), oder $BG = \frac{1}{4} b \sin 2\omega$, und $AG = \frac{cc}{a} = \frac{a}{4 \operatorname{tang}\omega^2} = \frac{1}{4} b \cos\omega^2$.

24. Der Punct C kann auch durch seine Lage gegen die BH gegeben seyn, wie es der Fall beym Bombenwerfen ist, wo BH eine horizontale Linie ist. Man ziehe CK parallel mit BH, so ist $a \times AK = CK^2$, das ist $a(AG - DC) = (BG - BD)^2$, oder $a \times AG - a \times DC = BG^2 - 2BG \times BD + BD^2$. Da $BG^2 = a \times AG$, so bleibt $BD^2 - 2BG \times BD + a \times DC = 0$, oder $BD^2 - 2BG \times BD + \frac{BG^2}{AG} DC = 0$. Man verlängere AG bis an die berührende, so ist (die in der Figur nicht vollendete) $GT = BG \cdot \cot\omega$, und $GT = 2AG$, also $AG = \frac{1}{2} BG \cdot \cot\omega$. Diesen Werth von AG in jene Gleichung gesetzt, wird sie

$$BD^2 - 2BG \times BD + 2BG \times DC \cdot \operatorname{tang}\omega = 0.$$

Digitized by Google

Also ist $BG = \frac{BD^2}{2(BD - DC \cdot \tang \omega)}$,

und $AG = \frac{BD^2 \cdot \cot \omega}{4(BD - DC \cdot \tang \omega)}$.

Die mit der berührenden parallele CE schneide die BD in L, und die auf BH senkrechte CD schneide die berührende in M, so ist $BL = BD - CD \cdot \tang \omega$, und $BD \cdot \cot \omega = DM$. Also ist

$$BG = \frac{BD^2}{2BL}; \quad AG = \frac{BD \cdot DM}{4BL}.$$

25. Eine berührende BM (Fig. 137.) schneidet auf der durch einen Punct C der Parabel mit der Axe parallelen DCM ein Stück CM ab, welches sich verhält wie das Quadrat von BM zwischen dem Berührungspuncte und der DCM. — Denn es ist $BM = CE$ und $CM = BE$. Da das Rechteck von BE mit dem Parameter zu dem Durchmesser BU dem Quadrate von EC gleich ist, so verhält sich BE wie das Quadrat von EC, d. i. MC wie das Quadrat von BM.

Daher ist bey der Bewegung eines nach der Richtung BM geworfenen Körpers im leeren Raume MC der Weg durch die Wirkung der Schwerkraft, wenn BM der Weg durch die in B ertheilte Geschwindigkeit ist.

26. Es sey BA (Fig. 138.) ein Bogen einer Parabel, BM eine berührende in B, MC, NO parallel mit der Axe durch die Puncte C, O der Parabel, und NO schneide die Chorde BC in P; es ist $NO : PO = BP : CP$.

Denn es ist $MC : NO = BM^2 : BN^2 = MC^2 : NP^2$. Daher ist $MC : NP = NP : NO$, oder $BC : BP = NP : NO$, und daraus $PC : BP = PO : NO$. Archimedes gebraucht diesen Satz zu seiner Quadratur der Parabel, wovon in dem Artikel, Exhaustions-Methode, Nachricht ertheilt ist.

27. Es sey NBM (Fig. 139.) eine Parabel, in welcher Bb ein Durchmesser, MQN eine Chorde, die

Digitized by Google

von Bb in Q halbirt wird. Der Parameter zu Bb sey BC, so ist $BC \times BQ = QM^2$. Man ziehe BM, und mache den Winkel BCP = BQM; und CBP = QMB, so sind die Dreyecke BQM und PCB einander ähnlich, daher BQ : QM = CP : CB, und $BC \times BQ = QM \times CP$. Es ist also CP = QM, und PM parallel mit CB, da die Abstände der Puncte P und M von der geraden CB gleich groß sind.

Der Winkel PBM ist unveränderlich, und gleich dem Ordinatenwinkel BQM. Denn es ist das Complement desselben zu zwey Rechten die Summe der Winkel PBC, MBQ oder QMB + MBQ. Diese Summe ist auch das Complement von BQM, also ist PBM = BQM.

28. Hieraus folgt eine organische Beschreibung einer Parabel, von welcher ein Punct mit der Lage des zugehörigen Durchmessers, dem Parameter und dem Ordinatenwinkel gegeben sind. — Es sey (Fig. 139.) Bb der Durchmesser, B der Scheitel, BC der Parameter auf der verlängerten Bb. Man mache die Winkel CBD und BCP dem Ordinatenwinkel gleich, und lasse den Winkel CBD sich um den Scheitelpunct B drehen. Durch irgend einen Punct, wo der unbestimmt lange Schenkel BP in der Lage PBM jenes Winkels die CP schneidet, ziehe man PM parallel mit CB, so ist der Punct, wo diese den andern Schenkel schneidet, ein Punct der Parabel.

Ist PM ein Lineal, welches genöthigt ist, sich parallel mit BC zu bewegen, und geht der eine Schenkel des gegebenen Winkels durch den Durchschnitt des Lineals (oder dessen Schärfe) mit CP, so ist der Durchschnitt des andern Schenkels mit dem Lineal ein Punct der Parabel.

Die gerade PCp heißt die Directrix, nämlich für die Bewegung der geraden PM und des Schenkels BP.

29. Eine sehr einfache Art, die Parabel zu beschreiben, giebt der Satz (3.) an die Hand. Da FM = AF + AP (Fig. 134.) ist, so trage man AF (den vierten Theil des Parameters) auf die andere Seite von A nach G, und beschreibe aus F mit dem Halbmesser GP

Digitized by Google

einen Kreisbogen; dieser schneidet die in P auf AP senkrechte PM in einem zu der Parabel gehörigen Puncte M.

Oder man nehme ein Winkelmaß GHN, an welchem in N ein Faden von der Länge HN befestigt ist. Das andere Ende des Fadens sey in dem Brennpuncte befestigt. Indem man den Schenkel GH an der auf GAP senkrechten GHh sich hin bewegen läßt, spanne man mit einem hart an den Schenkel HN gehaltenen Stifte den Faden; so beschreibt der Stift eine Parabel.

30. Aus den beiden Sätzen (14, 19) folgt auch eine bequeme Construction der Parabel. In dem Scheitel der Parabel (Fig. 135.) errichte man eine auf die Axe senkrechte Ae, ziehe an diese aus dem Brennpuncte F irgend eine FE, setze auf diese eine senkrechte TEB, welche die Axe in T schneide, nehme EB = ET, so ist B ein Punct der Parabel, und zugleich ist EB eine berührende, wodurch die Zeichnung leichter und genauer wird.

31. Zwey gegebene Winkel, NAP, NBP, (Fig. 140.) drehen sich um ihre Scheitelpuncte so, daß der Durchschnitt zweyer ihrer Schenkel AN, BN sich auf einer gegebenen geraden CD befindet: es wird gefragt, was der Durchschnittspunct P der andern beiden Schenkel für eine Linie beschreibe.

Die gerade AB schneide die gegebene gerade in C. Von N und P ziehe man die senkrechten NO und PQ auf AB, die als Ordinaten zu den Puncten N und P gehören. Um beide Ordinaten mit einander zu verbinden, suche man sich ähnliche Dreyecke zu verschaffen. Man mache den Winkel APR = NAM, und ANM = PAM, so sind die Dreyecke PAR und ANM sich ähnlich, und die Winkel PRB, NMB sind jeder = NAP. Auf gleiche Weise mache man den W. BPS = NBL, und BNL = PBS, so sind die Dreyecke PBS und BNL sich ähnlich, und die Winkel PSA, NLA sind jeder = NBP. In diesen Dreyecken ist

AR: PR = NM: AM;
BS: PS = NL: BL.

Digitized by Google

Man setze $AQ = x$; $PQ = y$; $NO = z$, so sind durch diese und den gegebenen Winkel PRQ oder NMS die Linien QR, PR, AR, MO, NM gegeben. Durch die ähnlichen Dreyecke wird AM bestimmt, und da durch den W. BCN auch CO mittelst NO gegeben wird, so wird ein Werth von der gegebenen AC durch x, y, z erhalten. Auf gleiche Weise wird ein solcher Werth für CB durch QS, PS, BS, LO, NL erhalten. Aus den Werthen von CA und CB wird der Werth von NO oder z weggeschafft, worauf eine Gleichung zwischen x und y hervorgeht.

Es sey $AB = a$; $CB = b$; $NAP = \alpha$; $NBP = \beta$; $ACN = \gamma$; so ist $QR = y \cot \alpha$; $PR = \frac{y}{\sin \alpha}$;

$AR = x - y \cot \alpha = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\sin \alpha}$; $MO = z \cot \alpha = \frac{z \cos \alpha}{\sin \alpha}$; $NM = \frac{z}{\sin \alpha}$; und aus der ersten der obigen Proportionen, $AM = \frac{zy}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \alpha}$;

ferner $CO = z \cot \gamma = \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$. Nun ist $AC = AM + MO + OC$, das ist,

$$a + b = \frac{zy}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \alpha} + \frac{z \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$$
$$= \frac{(z \cos \alpha + y \sin \alpha)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha} + \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$$
$$= \frac{x \sin (\alpha + \gamma) - y \cos (\alpha + \gamma)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha} \cdot \frac{z}{\sin \gamma}.$$

Auf gleiche Art ist $QS = y \cot \beta$; $PS = \frac{y}{\sin \beta}$;

$BS = a - x - y \cot \beta = \frac{(a - x) \sin \beta - y \cos \beta}{\sin \beta}$;

Digitized by Google

$LO = z \cot\beta = \frac{z\cos\beta}{\sin\beta}$; $NL = \frac{z}{\sin\beta}$; und durch die zweyten der obigen Proportionen,

$BL = \frac{zy}{((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)\sin\beta}$. Nun ist $CB = CO - LO - BL$, das ist

$$b = \frac{z\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{z\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{zy}{((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)\sin\beta}$$

$$= \frac{z\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{z((a-x)\cos\beta + y\sin\beta}{(a-x)\sin\beta - y\cos\beta}.$$

$$= \frac{(a-x)\sin(\beta-\gamma) - y\cos(\beta-\gamma)}{(a-x)\sin\beta - y\cos\beta} \cdot \frac{z}{\sin\gamma}.$$

Dieser Werth von b entsteht aus dem von $a+b$, wenn $360° - \beta$ statt α, und $-(a-x)$ statt x gesetzt werden, da der Winkel PBN eine dem W. PAN entgegengesetzte Lage hat, so wie BQ in Beziehung auf AQ.

Aus den beiden Gleichungen folgt nun

$$\frac{(a+b)(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{x\sin(\alpha+\gamma) - y\cos(\alpha+\gamma)} = \frac{b((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)}{(a-x)\sin(\beta-\gamma) - y\cos(\beta-\gamma)}.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so entsteht daraus eine Gleichung vom zweyten Grade zwischen x und y. Der Ort des Punctes P ist daher ein Kegelschnitt. Sollten die Glieder, welche x^2 und y^2 enthalten, wegfallen, so ist der Ort eine gerade Linie.

32. Die Construction zur Auflösung dieser Aufgabe ist aus Maclaurins Geometria organica, Prop. 1. genommen; die Rechnung ist aber abgeändert, und die Gleichung hat eine bequemere Form durch die Zusammenziehung der Winkel erhalten. Newton hat in seiner Arithmetica universali, Probl. 57. eine andre Construction angegeben, wodurch er zu einer viel einfachern Gleichung, als die obige ist, gelangt. Eine Erläuterung mag sie bedürfen, welche man in Castillions Ausgabe, Amstel. 1761,

Digitized by Google

findet. Ich habe jene erstere hier mitgetheilt, da sie in einem seltenen Buche enthalten ist. Newton erhält seine Auflösung auch durch Einführung ähnlicher Dreyecke. Zu Coordinaten nimmt er nicht, wie hier geschehen ist, rechtwinklichte, sondern andere, die den Winkel $\beta - \gamma$ mit einander machen.

33. In der oben (19.) angeführten Schrift von Lambert sind noch manche merkwürdige Eigenschaften der Parabel entwickelt, besonders in Absicht der berührenden und des Inhalts paraboliſcher Sectoren und Segmente, von welchen die Anwendung auf paraboliſche Bahnen der Kometen gemacht wird.

Parabeln höherer Art, die einige auch Paraboloiden nennen, sind Curven, deren allgemeine Gleichung ist $a^m x^n = y^{m+n}$. Die Gestalten dieser krummen Linien sind von dreyerley Art. Erstlich, ist $m+n$ gerade, und n ungerade, so sind für jedes positive x zwey gleiche und entgegengesetzte y, wie bey der gewöhnlichen Parabel, welche selbst unter diesen Fall gehört. Zweytens, ist $m+n$ ungerade, und n auch, so ist für ein positives x auch nur ein mögliches positives y, und für ein negatives x nur ein mögliches negatives y. Drittens, sind beide $m+n$ und n gerade, z. B. $a^2 x^2 = y^4$, so sind für positive wie für negative x sowol positive als negative y möglich. In der That aber gehört die Gleichung für ein System zweyer Curven, für welche die Gleichungen sind $y^2 = +ax$ und $y^2 = -ax$, da y^2 beide Werthe haben kann. Sie gehört für zwey apolloniſche Parabeln, deren Axen sich entgegengesetzt sind, und einen gemeinschaftlichen Scheitel haben.

Die Parabeln von der Form $a^{m-1} x = y^m$ nennt man eine quadratiſche, wenn $m = 2$ ist, eine cubiſche, wenn $m = 3$; eine biquadratiſche oder surſolide, wenn $m = 4$ ist, u. s. f.

Eine merkwürdige höhere Parabel ist diejenige, deren Gleichung ist $y^3 = ax^2$. Man nennt sie Parabola

Digitized by Google

cubicalis secunda, auch Paraboloides semicubicalis. Es ist diejenige, die unter allen Curven zuerst rectificirt ist, fast zu gleicher Zeit von Neil, Heuraet und Fermat. Montucla, T II. p. 150 etc. Wallisii Operum T. I. p. 350; 551; 563. Hugenii Horol. oscill. P. III. prop. 9. Sie ist die Evolute der Parabel. S. Evolution, 6. Sie ist auch diejenige, auf welcher ein schwerer beweglicher Punct in gleichen Zeittheilen gleich tief (nach der lothrechten) fällt, oder die curva descensus aequabilis. Auch kommt sie bey einer geometrischen Frage, die Parabel und die sie berührenden Kreise betreffend, vor, s. Anwendung der Geometrie z. Th. I. S. 136. Tab. II. Fig. 24. Sie hat nur positive Ordinaten für positive, wie für negative x. Sie ist gegen die Axe der x concav. Denn aus der Gleichung $y^5 = ax^3$ folgt $3y^4 \partial y = 2ax\partial x$, und daraus $6y\partial y^2 + 3y^4\partial^2 y = 2a\partial x^2$, wenn ∂x unveränderlich ist. Die erstere Differentialgleichung giebt $9y^4\partial y^2 = 4a^2x^2dx^2$, das ist $9y\partial y^2 = 4a\partial x^2$, wodurch die zweyte wird, $3y^2\partial^2 y = -\frac{2}{3}a\partial x^2$. Dieses zeigt an, daß die Curve gegen die Abscissenlinie concav ist, s. Concav und Convex, 11. Die Curve hat daher eine Spitze in dem Anfangspuncte der Abscissen, wo die gegen einander converen beiden Zweige zusammenstoßen. S. krumme Linien der zweyten Classe, 63.

Von diesen höhern Parabeln wird bey der Vergleichung unendlich großer oder kleiner Krümmungen Gebrauch gemacht, s. Krümmungskreis, 38. ff. An der semicubischen Parabel ist der Quotient $\frac{y^2}{x}$, welchem der Halbmesser der Krümmung an der Spitze für unendlich kleine x und y proportional ist, oder $\frac{y^5}{xy} = \frac{ax}{y} = a\sqrt{\frac{y}{a}}$, also unendlich klein, oder die Krümmung ist unendlich groß.

Die Cartesische Parabel nennt Newton eine von Descartes zur Construction der bestimmten Gleichungen vom fünften und sechsten Grade gebrauchten Curve, deren Gleichung ist $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Digitized by Google

Sie hat zwey hyperboliſche und zwey convergirende paraboliſche Zweige, ſ. krumme Linien der zweyten Claſſe, 64.

Divergirende Parabeln nennt Newton die Curven, deren Gleichung iſt $yy = ax^5 + bx^4 + cx + d$. Die berührenden divergiren immer mehr, je länger der Bogen genommen wird. Die ſemicubiſche Parabel iſt eine Gattung derſelben.

Paraboliſche Curven heißen diejenigen, deren Gleichung iſt $y = a + bx + cx^2 \ldots mx^m$, wo die Anzahl der Glieder unbeſtimmt iſt. Man ſtellt dadurch irgend einen Bogen einer jeden Curve mehr oder weniger genau auf eine einfachere Art dar, wie den Werth von y aus einer Gleichung zwiſchen x und y durch eine Interpolationsformel.

Paraboliſch iſt was irgend eine Beziehung auf eine Parabel hat.

Paraboliſche Aſymptote, ſ. Aſymptote, Th. I. S. 223.

Paraboliſche Conchoide, ſ. Conchoide, Th. I. S. 541.

Paraboliſcher hufförmiger Abſchnitt iſt in einem paraboliſchen Konoid ein Abſchnitt zwiſchen einem Theile der Grundfläche, einer ſchneidenden Ebene und einem Theile der Oberfläche. Die Berechnung geſchieht auf eine ähnliche Art wie an einem ſolchen Abſchnitte eines Cylinders oder Kegels, ſ. huffömiger Abſchnitt.

Paraboliſches Konoid, ein Körper, der durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Axe entſteht, ſ. Konoid.

Paraboliſches Pyramiboid iſt eine krummflächige Pyramide, deren auf die Axe ſenkrechte Durchſchnitte ähnliche Figuren ſind, die in Abſicht auf den Flächen-Inhalt ſich wie die Längen der Axe von dem Scheitel an verhalten. Wallis hat dieſen Körper betrachtet, de sectionibus Conicis, Opp. T. I. p. 307. Der Inhalt

Digitized by Google

eines solchen Körpers ist halb so groß als eines Prisma über derselben Grundfläche mit derselben Höhe.

Parabolische Spindel oder Linse ist ein Körper, der durch die Umdrehung einer Parabel um eine auf die Axe senkrechte Chorde entsteht. Der Körper ist $\frac{8}{15}$ des Cylinders, der dieselben Dimensionen hat, s. Cubirung.

Parabolische Spirale, s. Spirale.

Parabolismus ist eines von den vielen algebraischen Kunstwörtern des Vieta, welches anzeigt, daß der gegebene Coefficient des höchsten Gliedes in einer Gleichung mittelst der Division aller Glieder durch denselben weggeschafft werden soll.

Parallelen, gerade, sind gerade in einer Ebene befindliche Linien, die nicht zusammen kommen, so weit sie auch nach beiden Gegenden hin verlängert werden. — Oder: Parallelen sind gerade in einer Ebene befindliche Linien, deren Puncte alle von der andern Linie gleichen Abstand haben, welcher entweder nach einer senkrechten, oder nach einer unter einem gegebenen Winkel gezogenen, gemessen wird. — Oder es sind gerade in derselben Ebene, welche von einer dritten unter demselben Winkel, nach derselben Gegend hin, geschnitten werden.

Man kann jeden dieser Begriffe zum Grunde legen, so werden die beiden andern Folgerungen. Es kommt darauf an, welcher von ihnen die bündigste Beweisart gewährt. S. Erklärung. Die zuerst angegebene Erklärung ist die von Euklides gewählte.

1. Die Eigenschaften der Parallelen betreffen die Winkel, welche sie mit einer sie schneidenden machen. An jeder von zwey parallelen geraden entstehen dadurch vier Winkel, welche man durch die Benennungen, äußere und innere, unterscheidet. Die auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden an der einen und an der andern parallelen liegenden innern Winkel heißen Wechselswinkel. Die beiden an einerley Seite liegenden innern Winkel zusammen sind zwey rechten gleich; die Wechselswinkel sind sich gleich.

Digitized by Google

und jeder innere Winkel ist dem ihm an derselben Seite gegenüber liegenden äußern gleich. Umgekehrt, wenn eine dieser Beschaffenheiten der Winkel angenommen wird, oder erwiesen ist, so sind die beiden geraden an der schneidenden parallel. Jede derselben hat die beiden andern zur Folge.

2. Es ist bekannt, daß die Lehre von den Parallellinien Schwierigkeit macht, welches in der That merkwürdig ist, da sie zu den ersten Elementen der Geometrie gehört. Man könnte glauben, daß die ganze Wissenschaft durch einen unsichern Grund gefährdet würde. So vielerley Versuche gemacht sind, die Begründung der Geometrie in Rücksicht der Parallelen ganz vollkommen zu machen, ist doch bey jedem noch etwas zu erinnern gewesen. Ich habe in einer zu Göttingen im J. 1763, unter des sel. Kästners Aufsicht ausgearbeiteten akademischen Schrift acht und zwanzig, mehr oder weniger verschiedene, Beweisarten angeführt und beurtheilt. Seit der Zeit sind noch viele Versuche, zum Theil von angesehenen Mathematikern, erschienen, um allen Anstoß beym Eintritt in die Geometrie wegzuschaffen. Hoffmann, Professor der Physik zu Aschaffenburg, hat den Anfang zu einer neuen Sammlung und Beurtheilung der verschiedenen Theorieen von den Parallelen gemacht. Kritik der Parallel-Theorie. Erster Theil. Jena 1807. Darin sind siebzehn Systeme dargestellt und beurtheilt. Sie hätten nur sollen, nach der Verschiedenheit der Begriffe, von welchen die Urheber ausgiengen, und in jeder Abtheilung nach der Zeitfolge geordnet werden. Sie sind zu sehr durch einander geworfen.

Es würde viel zu weitläufig und auch unnöthig seyn, die vielen Beweisarten anzuführen und zu beurtheilen. Meine Absicht bey diesem Artikel ist nur, zu zeigen, worauf es bey jeder der drey angeführten Erklärungen ankommt, oder, wie man es jetzt gern nennt, eine Kritik der Lehre von den Parallelen zu liefern. Man wird sehen, daß die Natur der Parallelen ganz unmittelbar mit der Natur der geraden Linie verbunden ist, und daß die

Digitized by Google

Sicherheit der Geometrie nicht dadurch leidet, wenn ein Satz über die Lage nicht auf solche Art, wie Sätze über die Gleichheit, erwiesen werden kann.

3. Euklides beweiset im 16ten Satze des 1. Buches vollkommen streng, daß in jedem Dreyeck, wenn eine seiner Seiten verlängert wird, der äußere Winkel größer als jeder der ihm gegenüber liegenden innern Winkel ist. Daraus folgen der 27ste und 28ste Satz: wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselswinkel gleich sind, oder daß der äußere Winkel dem ihm an derselben Seite gegenüber liegenden innern Winkel gleich ist, oder daß die beiden innern an einer Seite liegenden Winkel zwey rechte ausmachen, so sind sie parallel. Daß es also Parallelen zufolge der Erklärung giebt, ist erwiesen. — Nun ist der umgekehrte Satz zu erweisen, nämlich, wenn zwey gerade parallel sind (sich nicht schneiden), so seyn der äußere und der gegenüber liegende innere Winkel einander gleich. Hier entsteht die Frage, ist das Nichtschneiden nothwendig mit einer Gleichheit der gedachten Winkel verbunden? Oder, hat die Ungleichheit dieser Winkel nothwendig das Schneiden zur Folge? Euklides nimmt dieses als Grundsatz an. Es ist der als solcher häufig angefochtene eilfte im 1. Buche. Zwey gerade Linien AB, CD, (Fig. 141.), welche von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die beiden innern an einerley Seite liegenden Winkel, BGF, DHE, kleiner als zwey rechte sind, treffen, genugsam verlängert an eben der Seite zusammen. — Der Satz kann auch so ausgedruckt werden: wenn der äußere Winkel DHF größer ist, als der innere entgegengesetzte BGF, so schneiden sich die beiden HD, GB. Denn dadurch sind die beiden innern kleiner als zwey rechte. Ist der äußere Winkel, wie CHF kleiner als der innere AGF, so sind die beiden innern, AGF + CHG, größer als zwey rechte, und die innern auf der andern Seite sind kleiner als zwey rechte. Euklides hat jene Form für seinen Grundsatz gewählt, weil sie ihm zu seinen Beweisen bequemer seyn mochte.

Digitized by Google

4. Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundsätzen streitig machen. Doch konnte Euklides auch nicht ihn in die Reihe anderer scharf erwiesenen Sätze bringen. Er hat ihn also, um einen Ausdruck aus der Kantischen Philosophie zu borgen, als einen synthetischen Satz a priori unter die Grundsätze gestellt. Der Satz enthält eine Eigenschaft der geraden Linie, welche sie von den krummen unterscheidet, ob man gleich sie nicht aus der Natur derselben durch eine Verbindung mit andern Sätzen herleiten kann, weil sie unmittelbar in ihr liegt. Proklus setzt den Grundsatz unter die Postulata (αιτηματα).

5. Der Grundsatz ist eigentlich der umgekehrte des 16ten Satzes. Man drücke den letztern so aus: wenn zwey sich schneidende gerade von einer dritten geschnitten werden, so ist der äußere Winkel an der schneidenden Linie größer als der innere entgegengesetzte an eben dieser Seite. Dieses ist richtig für jeden Winkel der sich schneidenden Linien, und für jede Lage der dritten sie beide schneidenden, es sey in Absicht auf die Winkel oder in Absicht auf den Abstand von dem Durchschnittspuncte jener. Daher darf man den Satz auch umkehren. Wollte man ihn nicht allgemein umkehren, so brächte man Bestimmungen hinein, die in dem 16ten Satze gar nicht vorhanden sind, d. i. man machte das Schneiden der beiden Linien von der Lage der dritten abhängig. So würde der Grundsatz gleich nach dem 16ten Satze, als dessen umgekehrter, zu setzen, und nur die Form beider so zu ändern seyn, wie es hier geschehen ist.

6. Einen Beweis des Euklidischen Grundsatzes oder jenes umgekehrten möchte man auf folgende Art geben können. Durch die Puncte A, B der AE (Fig. 142.) seyn die AC, BD gezogen, so daß der W. CAE kleiner als DBE ist. Man ziehe auch noch GA unter dem W. GAE = DBE. Schneidet die AC die BD nicht, so giebt es doch gerade durch A, welche die BD treffen, so viele als man auf BD Puncte nehmen kann. Läßt man nun AC sich um A nach AB hin drehen, so muß es eine

Digitized by Google

Lage AF geben, in welcher der Übergang vom Nichtschneiden zum Schneiden geschieht, so daß AF die letzte der Nichtschneidenden und die erste der Schneidenden ist, beides also, Schneiden und Nichtschneiden, mit einander vereinigt. Wie man dieses mit den Begriffen von der Lage zweyer geraden vereinigen möge, ist durchaus nicht einzusehen, da diese sich entweder in einem Puncte schneiden, oder ganz außer einander liegen. Die beiden AF, BD müßten in einer unendlichen Entfernung über einander hin liegen. Derjenige, welcher den Grundsatz nicht zugeben wollte, müßte dieses unbegreifliche Beysammenseyn zweyer geraden begreiflich machen. Es wird ihm der Beweis zugeschoben.

7. Von der geraden AG, welche mit AE den W. GAE = DBE macht, darf man nicht sagen, daß sie die BD in einer unendlichen Entfernung schneide, oder daß sie den Übergang vom Schneiden zum Nichtschneiden mache. Dies würde auf die dabey undeutlich gedachte Vorstellung führen, daß sich zwey gerade, zwar erst in einer unendlichen Entfernung, aber doch mit einander vermischen könnten. Die gerade AG liegt ganz außer der BD. Sie muß sich, immer mit demselben Winkel GAE oder DBE, an AC fortbewegen, bis sie in B auf einmahl ganz in BD fällt. Wenn aber außer der AG noch eine AC gedacht wird, welche die BD nicht trifft, so ist man genöthigt, eine Folge von solchen nicht schneidenden anzunehmen, die sich im Unendlichen der BD immer mehr nähern, bis zu einer AF, welche zuerst sie erreicht, ohne sie doch schon zu schneiden.

8. Der Beweis oder die Erläuterung, welche Kästner in seiner Geometrie, Satz 11. Zus. 5. 6. dem Euklidischen Grundsatze voran schickt, läßt sich durch eine ähnliche Bemerkung, wie in (5.) ergänzen.

Es sey der W. GAE = DBE (Fig. 142.), und die unbestimmte AC liege, wenn es möglich ist, ganz außer der BD. Man lasse die AC auf AE immer unter demselben Winkel CAE fortrücken, so muß sie in eine Lage kommen, in welcher sie BD schneidet. Nun muß

Digitized by Google

es zwischen den Lagen, worin sie die BD nicht schneidet, und worin sie dieselbe trifft, eine geben, bey welcher der Übergang vom Schneiden zum Nichtschneiden geschieht. Hier müßte jene Linie sich mit der BD vermischen. Auf diesen Übergang und das unbegreifliche Zusammenseyn von Schneiden und Nichtschneiden kommt es bey diesem indirecten Beweise an. Denn sonst möchte man sich es als möglich gedenken, daß bey der Fortrückung von B nach A hin der Durchschnittspunct auf BD schneller fortrückte, als der Endpunct der bewegten Linie auf BA, daher jener unendlich weit gekommen seyn könnte, ehe dieser den Punct A erreicht hätte.

9. Könnte man erweisen, daß die gerade, welche bey ihrem Fortrücken auf BA von B nach A hin immer denselben Winkel CAE, der kleiner als DBE ist, mit AE macht, auch die BD immer unter einem unveränderlichen Winkel schneidet, so wäre der Euklidische Grundsatz dadurch erwiesen. Denn bey jedem Durchschnittspuncte mit BD befände sie sich in derselben Lage gegen diese Linie, wie sie in B war, und käme nie ganz auf der einen Seite derselben zu liegen, so weit sie auch von B in der Richtung BA fortrückte. Bey der Anwendung der dritten Erklärung der Parallelen wird sich dieses noch besser zeigen.

10. Da die Euklidische Geometrie zu der gewünschten Begründung der Theorie der Parallelen nicht zureicht, so ist aus der Lehre vom Unendlichen ein Beweis vorgeschlagen, von dem Hofprediger Schulz in Königsberg, in einer daselbst 1784 herausgegebenen Schrift: Entdeckte Theorie der Parallelen, nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit. Allein auch diese fand Einwendungen, weswegen der Verfasser in einem Nachtrage: Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen, Königsberg, 1786, den Beweis zu schärfen suchte. Der Beweis ist zwar nicht für die Anfangsgründe geeignet, aber doch sinnreich, und gewährt demjenigen, der mit den Begriffen vom Unendlichen bekannt ist, wenn auch keine Bestätigung, doch eine neue Ansicht der elementarischen Lehre von den Par-

Digitized by Google

allelen aus einem höhern Standpuncte. Da der Urheber dieser Theorie sie zu weitläufig vorgetragen hat, und dabey noch eine Verbesserung Statt haben mag, so werde ich sie ganz kurz hier darstellen.

11. Die unbegränzte Fläche zwischen den Schenkeln eines Winkels verhält sich zu der ganzen unbegränzten Ebene rings um den Scheitelpunct wie der Winkel zu vier rechten. Hingegen (dieses füge ich noch hinzu) ein Streifen zwischen zwey parallelen geraden Linien kann mit der unbegränzten Ebene, worin sie liegen, nicht verglichen werden, sondern verhält sich zu derselben wie Null zu einer endlichen Größe.

Nun seyn AB, CD (Fig. 141.) zwey gerade, welche von der EF unter ungleichen Winkeln BGF, DHF geschnitten werden. Man mache den W. KHF = BGF, so ist die Winkelfläche DHK, die unbegränzte, mit der unbegränzten Ebene der Figur vergleichbar, aber der unbegränzte Parallelstreifen BGHK nicht, also ist letzterer gegen jenen wie o zu 1, und die Winkelfläche DHK ist größer als der Streifen. Daher müssen sich HD und GB schneiden. Denn sonst wäre der Streifen größer als die Winkelfläche.

12. Der Verfasser hatte in seiner ersten Schrift auf den Unterschied des geometrischen und arithmetischen Verhältnisses zweyer unendlich großen Größen nicht Rücksicht genommen. Wenn diese um eine endliche Größe verschieden sind, so ist ihr geometrisches Verhältniß doch das der Gleichheit. Er sagte, die unendlichen Winkelflächen BGF, KHF sind gleich, ohne auf ihren Unterschied, den unendlichen Streifen BGHK, zu achten. Das war es auch, was Einwendungen veranlaßte, und ganz gegründete, weil bey dieser Beweisart das zu beweisende wirklich angenommen ward. Denn es ist, die unbegränzten Flächen verstanden, BGF = KHF + BGHK = DHF — DHK + BGHK. Nun muß dargethan werden, daß DHK unvergleichbar groß ist gegen den Streifen BGHK. Statt dessen will Schulz auch in seiner zweyten Schrift darthun, daß die Winkelfläche BGF der KHF gleich ist,

Digitized by Google

da sie doch offenbar um den Streifen BGHK unterschieden sind. Wer den Euklidischen Grundsatz leugnet, hält sich an diesen Unterschied, und mag behaupten, daß DHK kleiner als BGHK sey, wie es bey endlichen Flächen in der That bis zu einer gewissen Ausdehnung wahr ist.

Zweyte Theorie der Parallelen.

13. Da der von Euklides aufgestellte Grundsatz nicht augenscheinlich genug war, oder befriedigend dargethan werden konnte, so suchte man durch eine veränderte Definition zu helfen; allein man versteckte die Schwierigkeit mehr, als daß man sie umgangen wäre. Parallelen nennen mehrere solche gerade Linien, die in allen Puncten gleichen Abstand von einander haben, da nämlich der Abstand durch die senkrechte von irgend einem Puncte der einen auf die andere gemessen wird. Die Benennung, Parallelen, παραλληλαι, neben einander liegende oder laufende, bezieht sich darauf, so daß die alten Geometer bey dem Kunstworte mehr auf den gemeinen Augenschein als auf ihren damit verbundenen Begriff sahen.

14. In dieser Erklärung liegt ein Satz versteckt, der, daß die Linie, welche durch die Endpuncte aller auf eine gerade Linie gesetzten, gleich großen, Perpendikel, geht, eine gerade sey. Es sind vielleicht nur zwey Schriftsteller, welche diesen Satz zu erweisen nöthig gefunden haben, ein Italiener, Vitale Giordano da Bitonto in seinem Euclide restituto, Rom 1680, und Fr. Gottl. Hanke in einer Dissertation, Leipzig 1751. Clavius in seinem Commentar über Euklids Elemente nimmt jenen Satz als ein Axiom an, dem er nur eine Erklärung beyfügt. Wolf setzt in seinen lateinischen Elementen die Erklärung hin, ohne ihre Möglichkeit in der Folge darzuthun. Er wußte sehr wohl, daß willkürlich zusammengesetzte Begriffe erwiesen werden müssen; hier aber scheint er Grundsatz und Erklärung so mit einander vermengt zu haben, daß es ihm nicht einfiel, die Erklärung sey eines Beweises bedürftig. Das mag nicht ohne Einfluß auf

Digitized by Google

den Vortrag der Geometrie in Deutschland und auch auswärts geblieben seyn.

Euklides erweiset die Möglichkeit seiner Erklärung durch die Sätze 27. 28. B. I. und daß es keine andern als in dem Falle dieser Sätze giebt, wird in dem 11ten Grundsatz ausgesagt.

15. Das Axiom, welches mit dieser zweyten Erklärung zu verbinden ist, möchte darin vor dem Euklidischen einen Vorzug haben, daß die Vorstellungskraft nicht genöthigt wird, sich ins Unendliche zu verlieren, und daß es unmittelbar mit dem Begriffe von einer geraden Linie zusammenhängt. Denn in der geraden Linie haben alle Puncte einerley Lage gegen einander, so fern man auf ihre Abstände nicht achtet; die darauf senkrechten geraden haben einerley Lage gegen dieselbe; die Endpuncte dieser gleich groß genommenen senkrechten haben also auch einerley Lage unter einander, gleich den Puncten auf jener, und liegen daher in einer geraden Linie.

16. Man hat nach dieser Erklärung der Parallelen nun zu zeigen, 1. die auf eine derselben senkrechte ist es auch auf die andere. 2. Wenn zwey gerade senkrecht sind auf eine dritte, so sind sie parallel. 3. Wenn zwey Parallelen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Wechselswinkel gleich, und umgekehrt. Daher sind auch der äußere und innere entgegengesetzte Winkel sich gleich, und zwey innere Winkel an derselben Seite sind zusammen zwey rechten gleich.

Nachdem dieses erwiesen ist, kann man ganz nach der Euklidischen Ordnung fortgehen.

Wolfs Beweis des dritten Satzes (Elem. Geom. 233.) kann sehr abgekürzt werden, wenn man durch die Mitte der schneidenden Linie eine senkrechte auf die beiden Parallelen zieht.

Dritte Theorie der Parallelen.

17. Um die Sache von allen Seiten zu betrachten, verändere man noch einmahl die Erklärung der Parallelen, und nenne gerade Linien parallel, die von einer dritten

Digitized by Google

unter demselben Winkel nach derselben Seite hin geschnitten werden.

18. Die geraden AB, CD (Fig. 143.) werden von der EF unter den gleichen Winkeln BAF, DCF geschnitten; eine vierte GH schneide jene beiden in K, L, die EF in G; es sind die Winkel BKH, DLH einander gleich.

Denn alle Theile einer geraden Linie sind auf einerley Art neben einander vorhanden, so fern man auf die Verschiedenheit der Abstände nicht sieht (Linie, 2.). Die Theile der geraden AB haben auch dieselbe Lage gegen die EF, ohne Rücksicht auf ihren Abstand von derselben; eben so die Theile der CD. Da die Lage der beiden AB, CD gegen EF dieselbe ist, so ist die Lage aller ihrer Theile auf beiden gegen EF dieselbe. Eben so haben die Theile auf GH gegen EF einerley Lage. Bey der Vergleichung der Lage, welche die Theile auf AB und BC gegen die auf GH haben, kommt es auf die Abstände von der Linie EF nicht an. Diese Lage ist also dieselbe, d. i. die Winkel BKH, DLH sind sich gleich.

19. Es wird hier die Gleichheit oder Übereinstimmung der Lage auf eine ähnliche Art geschlossen, als bey Größen durch den Schluß, $A = B$; $C = D$, also $A + C : B + D$, oder noch ähnlicher bey Verhältnissen, $a : c = m : n$; $b : c = m : n$, also $a = b$. Wollte man auch den Beweis nur als eine Erläuterung gelten lassen, so ist der Satz doch sehr einleuchtend, weil er sich unmittelbar auf die Gleichförmigkeit der geraden Linie in ihrer ganzen Ausdehnung gründet, und in der Lage mehrerer gerader Linien gegen einander dieselbe Gleichförmigkeit bemerken läßt.

20. Das Euklidische Axiom folgt unmittelbar daraus. Es sey der Winkel HGF kleiner als der Winkel DCF, so ziehe man durch G die gerade MG der CD parallel (oder mache den W. $MGF = DCF$), so werden MG und CD unter demselben Winkel nach derselben Gegend hin geschnitten. Der Abstand GC zwischen den

Digitized by Google

Parallelen MG und CD ist hierbey ganz gleichgültig. Wenn die AB unter demselben Winkel gegen AF auf AF fortrückt, so bleibt von der schneidenden GH immer ein unendliches Stück in derselben Lage gegen jene übrig. Der Durchschnittspunct rückt nur weiter von GF ab. Man hat aber nach diesem System den Satz nicht nöthig. Die Unveränderlichkeit der Summe der drey Winkel in allen Dreyecken folgt auf die bekannte Art unmittelbar aus der gefundenen Eigenschaft der Parallelen in der hier angenommenen Bedeutung.

21. Karsten in einer Abhandlung über die Parallellinien (mathem. Abhandlungen, II.) gebraucht §. 26. in der That den hier in (18.) erwiesenen Satz, aber eigentlich als einen umgekehrten des 2. Zus. zu §. 25. Parallelen sind ihm übrigens nicht zusammenlaufende. Sein Vortrag ist zu weitläuftig, und zu der schnellen Übersicht, welche in Elementen nöthig ist, nicht geeignet.

22. Schwab in dem Tentamen novae parallelarum theoriae, Stuttgardiae, 1801. nennt Parallelen gerade Linien, welche in einer Ebene dieselbe Lage gegen einander haben. Es ist aber nicht gleich klar, wie man sich diese gleiche Lage vorzustellen habe. Der Verfasser fügt aber hernach als Axiom hinzu: Wenn zwey gerade Linien in einer Ebene dieselbe Lage gegen einander haben, so haben sie auch einerley Lage gegen eine dritte gerade Linie.

23. Die drey angegebenen Erklärungen des Parallelismus haben jede ihre besondern Schwierigkeiten. Die Euklidische erfordert zu zeigen, daß das Nichtschneiden zweyer geraden blos unter der einen von den drey gleichgültigen Bedingungen in (1.) Statt habe. Von der zweyten kann die Möglichkeit nicht vollkommen erwiesen werden. Bey der dritten ist die Möglichkeit für sich klar, und die Bedingung ist ganz bestimmt, allein es muß gezeigt werden, daß gerade Linien, welche eine andere unter gleichen Winkeln nach derselben Gegend hin schneidet, auch von jeder andern auf solche Art geschnitten werden. Von den geraden, die durch die Mitte von AC (Fig. 143.)

Digitized by Google

gezogen werden, folgt es sogleich aus Euklides I. 26. Man kann aber daraus noch nicht auf andere einen Schluß machen.

24. Auch krumme Linien können sich parallel seyn, nämlich, wenn auf den Normalen durchgehends gleich große Theile von der Curve an, nach der einen oder andern Gegend hin genommen werden, und durch die Endpuncte eine krumme Linie gezogen wird. Man muß zu dem Ende die Normalen an mehrere Puncte der Curve ziehen, mittelst der Subnormale, deren Lage durch die Formel $\frac{y\partial y}{\partial x}$ bestimmt wird. Auf dieser nimmt man dann die gegebene Länge jenseits oder diesseits der Curve. Es lassen sich die Coordinaten der neuen, parallelen Curve durch diejenigen der vorgezeichneten angeben, folgendermaßen. Die Coordinaten der vorgezeichneten seyn x, y, der zugehörige Bogen s; die Coordinaten der parallelen p, q, und der gegebene Abstand nach dem Mittelpuncte der Krümmung hin, h, so ist $p = x + \frac{h\partial y}{\partial s}$; $q = y - \frac{h\partial x}{\partial s}$. Für jedes x ist aus der Gleichung y nebst den beiden Differential-Quotienten gegeben.

Man stelle sich die Evolute einer Curve vor, durch deren Abwickelung sie gezeichnet wird. Verändert man die Länge des abgewickelten Fadens willkürlich, so wird in jedem Falle eine parallele Curve beschrieben. Diese kann nach der Größe und Lage des Abstandes sehr verschiedene Formen haben. Man sehe Kästner de curvis aequidistantibus, Commentt. Soc. Götting. T. XI, und de Prasse de ellipseos evoluta et aequidistantibus et earum evolutione. Lipsiae 1798. Leibnitz wird zuerst diese Construction einer Curve erdacht haben. Acta Erud. 1695. Nov. auch in Ioh. Bernoulli Opp. T. I. p. 154.

25. In Murhards mathematischer Bibliothek, Th. I. S. 78—82 sind die meisten Abhandlungen über die Lehre

Digitized by Google

von den Parallellinien angeführt. Ich setze noch folgende Schriften hinzu.

Proklus in seinem Commentar über das erste Buch Euklids handelt weitläufig von dieser Lehre, zugleich historisch.

In Wallis Werken, Bd. II. S. 665—678 ist eine Abhandlung über das Postulat oder Axiom des Euklides eingerückt, worin auch der von Nasar-eddin oder Nassir-eddin, einem persischen Geometer im 13ten Jahrh. versuchte Beweis enthalten ist.

Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus, sive cet. Mediolani. 1733, pag. 142. Ein Auszug in meiner Dissertation.

Demonstratio theorematis parallelarum. Hamburgi, 1799. 30 S. 8. Als Grundsatz wird angenommen, daß eine gerade und eine krumme Linie nicht aequidistantes seyn können.

Tentamen novae parallelarum theoriae, notione situs fundatae, auctore I. C. Schwab. Stuttgardiae, 1801. XXX u. 25 S. 8.

Dissertatio sistens novam theoriam linearum parallelarum, praes. Gumaelio. Lundii, 1801.

La teoria delle parallele rigorosamente dimostrata, von Franceschini, Prof. in Bologna, wird in den Götting. gel. Anz. 1801. St. 40. als einer der neuesten Versuche angeführt, der aber auch nicht für gelungen zu halten sey.

Percursio conatuum demonstrandi parallelarum theoriam de iisque judicium, auct. Voit. Göttingae 1802. 52. S. 8.

Kritik der Parallel-Theorie von Hoffmann. Erster Th. Jena 1807. 276 S. 8. Mit 10 K.

Im Aug. 1800 theilte Prof. Wildt der Götting. Soc. der Wiss. drey Beweise des Euklidischen Grundsatzes mit. Gött. gel. Anz. 1800. St. 178. Darin viel von reiner Anschauung. In der reinen Anschauung des rechten Winkels fand der Verf. Veranlassung zu der Erklärung, daß es der Winkel in einem Quadrat ist.

Digitized by Google

Parallelepipedum ist ein Körper, der zwischen sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, von welchen je zwey entgegengesetzte sich gleich sind. Es ist ein Prisma, dessen Basis ein Parallelogramm ist.

Rechtwinklichte sind, in welchen die drey Seitenlinien an jeder Ecke senkrecht auf einander stehen; senkrechte, wenn die Seitenlinien der Seitenflächen senkrecht auf die Grundflächen stehen. Diese senkrechte Seitenlinie, oder der senkrechte Abstand der zu Grundflächen genommenen Seitenflächen, ist die Höhe eines solchen Körpers.

Alle Parallelepipeda, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind einander gleich.

Sind die Grundflächen gleich, so verhalten sie sich wie die Höhen, und wenn die Höhen gleich sind, wie die Grundflächen. Sind Grundflächen und Höhen verschieden, so wird das Verhältniß dieser Körper zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundflächen und der Höhen.

Die Einheit für die Längen sey die Seitenlinie eines Würfels, so ist dieser so vielmahl in dem Parallelepipedum enthalten, als die Einheit in dem Producte der einen Seitenlinie der Grundfläche, des Abstandes dieser von der gegenüber liegenden Seitenlinie, und des Abstandes der beiden Grundflächen enthalten ist, wenn alle diese Linien durch jene Einheit ausgedrückt sind. Eines rechtwinklichten Parallelepipedum Inhalt wird durch das Product der Seitenlinien angegeben.

Wie ein Parallelepipedum in einen gleich großen Würfel durch eine geometrische Construction verwandelt wird, zeigt Wolf in den Elem. Anal. §. 628 auf dreyerley Art, durch die Durchschnitte eines Kreises mit einer Parabel, oder einer Hyperbel, oder einer Ellipse. Diese Aufgabe führt nämlich auf eine cubische Gleichung, $y^3 = abc$, wo a b die Grundfläche und c die Höhe des Parallelepipedum ist, und y die Seite des gesuchten Würfels. Man sehe auch im I Th. S. 138 ff. die Construction biquadratischer und cubischer Gleichungen. Die arithmetische

Digitized by Google

Auflösung bedarf nur des gemeinen Verfahrens eine Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen.

Der Inhalt eines Parallelepipedum läßt sich aus den drey Seitenlinien und den Winkeln derselben unter sich durch eine nette Formel berechnen. Es seyn nämlich die Seiten der Grundflächen a und b, ihr Winkel C; die dritte Seite sey c, ihr Winkel mit der Seite a sey A, mit der Seite b sey ihr Winkel B. Es ist der Inhalt des Parallelepipedum $= 2abc\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C).\sin\frac{1}{2}(A+B-C).\sin\frac{1}{2}(A-B+C).\sin\frac{1}{2}(B+C-A)]}$.

Erstlich ist der Inhalt der Grundfläche $= ab\sin C$. Der Neigungswinkel der Seitenlinie c gegen die Grundfläche sey D, so ist die Höhe des Körpers $= c\sin D$, also der Inhalt $= abc.\sin C.\sin D$. Nun werde aus dem gemeinschaftlichen Winkelpuncte der drey Seitenlinien eine Kugelfläche beschrieben, so geben die Puncte, worin die Seitenlinien sie treffen, ein sphärisches Dreyeck, dessen Seiten die Maßen der Winkel A, B, C sind. Der Bogen der auf die Seite C von dem gegenüber liegenden Winkelpuncte senkrecht gelassen wird, ist das Maß des Neigungswinkels D, und es ist $\sin D = 2\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C).\sin\frac{1}{2}(A+B-C).\sin\frac{1}{2}(A-B+C).\sin\frac{1}{2}(B+C-A)]}:\sin C$, s. Trigonometrie, sphärische. Daraus ergiebt sich die Formel für den Inhalt des Parallelepipedum.

Sie läßt sich auch aus der Rechnung in dem Artikel, Linie, 36—38. herleiten. Daselbst sind η und ϑ, was hier C und D sind. Es ist dort $\sin\vartheta$ durch ϵ, und c durch b, ferner b durch a, das ist $\tang\eta$ gegeben. Folglich läßt sich $\sin\vartheta$ durch Functionen der Winkel A, B, η ausdrücken. Man kommt dadurch auf die Formel $\sin D.\sin C = \sqrt{(\sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2 + 2\cos A.\cos B.\cos C)}$, welche sich in die obige umwandeln läßt. Denn es ist

$$2\cos A.\cos B.\cos C + \sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2 = 2\,cs.A.cs.B.cs.C - cs.C^2 - \tfrac{1}{2}cs.2A - \tfrac{1}{2}cs.2B.$$

Digitized by Google

Parallelepipedum ist ein Körper, der zwischen sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, von welchen je zwey entgegengesetzte sich gleich sind. Es ist ein Prisma, dessen Basis ein Parallelogramm ist.

Rechtwinklichte sind, in welchen die drey Seitenlinien an jeder Ecke senkrecht auf einander stehen; senkrechte, wenn die Seitenlinien der Seitenflächen senkrecht auf die Grundflächen stehen. Diese senkrechte Seitenlinie, oder der senkrechte Abstand der zu Grundflächen genommenen Seitenflächen, ist die Höhe eines solchen Körpers.

Alle Parallelepipeda, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind einander gleich.

Sind die Grundflächen gleich, so verhalten sie sich wie die Höhen, und wenn die Höhen gleich sind, wie die Grundflächen. Sind Grundflächen und Höhen verschieden, so wird das Verhältniß dieser Körper zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundflächen und der Höhen.

Die Einheit für die Längen sey die Seitenlinie eines Würfels, so ist dieser so vielmahl in dem Parallelepipedum enthalten, als die Einheit in dem Producte der einen Seitenlinie der Grundfläche, des Abstandes dieser von der gegenüber liegenden Seitenlinie, und des Abstandes der beiden Grundflächen enthalten ist, wenn alle diese Linien durch jene Einheit ausgedrückt sind. Eines rechtwinklichten Parallelepipedum Inhalt wird durch das Product der Seitenlinien angegeben.

Wie ein Parallelepipedum in einen gleich großen Würfel durch eine geometrische Construction verwandelt wird, zeigt Wolf in den Elem. Anal. §. 628 auf dreyerley Art, durch die Durchschnitte eines Kreises mit einer Parabel, oder einer Hyperbel, oder einer Ellipse. Diese Aufgabe führt nämlich auf eine cubische Gleichung, $y^3 = abc$, wo a b die Grundfläche und c die Höhe des Parallelepipedum ist, und y die Seite des gesuchten Würfels. Man sehe auch im I Th. S. 138 ff. die Construction biquadratischer und cubischer Gleichungen. Die arithmetische

Digitized by Google

Auflösung bedarf nur des gemeinen Verfahrens eine Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen.

Der Inhalt eines Parallelepipedum läßt sich aus den drey Seitenlinien und den Winkeln derselben unter sich durch eine nette Formel berechnen. Es seyn nämlich die Seiten der Grundflächen a und b, ihr Winkel C; die dritte Seite sey c, ihr Winkel mit der Seite a sey A, mit der Seite b sey ihr Winkel B. Es ist der Inhalt des Parallelepipedum $= 2abc\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C).\sin\frac{1}{2}(A+B-C).\sin\frac{1}{2}(A-B+C).\sin\frac{1}{2}(B+C-A)]}$.

Erstlich ist der Inhalt der Grundfläche $= ab\sin C$. Der Neigungswinkel der Seitenlinie c gegen die Grundfläche sey D, so ist die Höhe des Körpers $= c\sin D$, also der Inhalt $= abc.\sin C.\sin D$. Nun werde aus dem gemeinschaftlichen Winkelpuncte der drey Seitenlinien eine Kugelfläche beschrieben, so geben die Puncte, worin die Seitenlinien sie treffen, ein sphärisches Dreyeck, dessen Seiten die Maßen der Winkel A, B, C sind. Der Bogen der auf die Seite C von dem gegenüber liegenden Winkelpuncte senkrecht gelassen wird, ist das Maß des Neigungswinkels D, und es ist $\sin D = 2\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(A+B+C).\sin\frac{1}{2}(A+B-C).\sin\frac{1}{2}(A-B+C).\sin\frac{1}{2}(B+C-A)]}:\sin C$, s. Trigonometrie, sphärische. Daraus ergiebt sich die Formel für den Inhalt des Parallelepipedum.

Sie läßt sich auch aus der Rechnung in dem Artikel, Linie, 36—38. herleiten. Daselbst sind η und ϑ, was hier C und D sind. Es ist dort $\sin\vartheta$ durch c, und c durch b, ferner b durch a, das ist $\tang\eta$, gegeben. Folglich läßt sich $\sin\vartheta$ durch Functionen der Winkel A, B, η ausdrücken. Man kommt dadurch auf die Formel $\sin D.\sin C = \sqrt{(\sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2 + 2\cos A.\cos B.\cos C)}$, welche sich in die obige umwandeln läßt. Denn es ist

$2\cos A.\cos B.\cos C + \sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2 = 2\,cs.A.cs.B.cs.C - cs.C^2 - \frac{1}{2}cs.2A - \frac{1}{2}cs.2B.$

Digitized by Google

$= \cos(A+B).\cos C + \cos(A-B).\cos C$
$- \cos C^2 - \cos(A+B).\cos(A-B).$
$= [\cos C - \cos(A+B)][\cos(A-B) - \cos C]$
$= 4 \sin \frac{1}{2}(A+B+C).\sin \frac{1}{2}(A+B-C).$
$\sin \frac{1}{2}(A-B+C).\sin \frac{1}{2}(C+B-A).$

zufolge der Formeln, Goniometrie, 36, 27, 28.

Man vergleiche die analytischen Formeln für Parallelepipeden in Kästners geometrischen Abhandlungen. II. Samml. S. 201 ff.

Die Diagonalflächen theilen ein Parallelepipedum in zwey gleiche Theile. Sie gehen durch zwey parallele Diagonalen der Grundflächen. Diese und die entgegengesetzten Seitenlinien durch die Endpuncte bilden ein Parallelogramm. Es entstehen nun vier Diagonalen in dem Körper. Die Summe der Quadrate dieser Diagonalen ist so groß als die Summe der Quadrate von allen zwölf Seitenlinien.

Denn es seyn die Seitenlinien der Grundflächen a und b; die dritte Seitenlinie $= c$; die Diagonalen der Grundflächen d und e; die Diagonalen in der Ebene durch d und c seyn A, B; in der Ebene durch e und c seyn die Diagonalen C, D, so ist (s. Parallelogramm) $A^2 + B^2 = 2d^2 + 2c^2$, und $C^2 + D^2 = 2e^2 + 2c^2$. Ferner ist $d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2$, also ist $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Da jede der a, b, c viermahl als Seitenlinie vorhanden ist, so ist die letztere Summe die Summe der Quadrate aller Seitenlinien.

Parallelogramm ist eine geradlinichte, vierseitige Figur, in welcher zwey und zwey Seiten parallel sind. Euklides hat diese allgemeine Benennung nicht, sondern führt einzeln auf: Quadrat, Oblongum (rechtwinklicht), Rhombus (gleichseitig), Rhomboides (ungleichseitig).

Ein Parallelogramm wird durch die zwey an einander stoßenden Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, oder durch jene zwey Seiten und eine der Diagonalen bestimmt.

Digitized by Google

Die gegenüber liegenden Seiten, und die nach der Diagonale entgegengesetzten Winkel sind sich gleich.

Die Diagonalen theilen ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile.

Die Summe der Quadrate von den vier Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate beider Diagonalen.

Es sey ABCD (Fig. 144.) das Parallelogramm, dessen Diagonalen sind AD, BC. Von C werde auf AB, und von A auf die verlängerte DC, das Perpendikel CE und das AF gefällt. Es ist (Dreyeck, 19. 20.) $BC^2 + 2AB \times AE = AB^2 + AC^2$, und $AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2CD \times CF$. Da $AE = CF$ und $AC = BD$ ist, so ist durch Addition,
$BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2$.

Parallelogramme, die gleiche Grundlinien und Höhen (Abstand der Grundlinie von der gegenüber liegenden Seite) haben, sind einander gleich. Bey einerley Grundlinien verhalten sie sich wie die Höhen; bey einerley Höhe wie die Grundlinien. Sind Grundlinie und Höhe in zwey Parallelogrammen verschieden, so wird ihr Verhältniß aus dem der Grundlinien und der Höhen zusammengesetzt. Nimmt man das Quadrat, dessen Seite zur Einheit für die Längen dient, zur Einheit für die Flächen, so ist dieses so oft in einem Parallelogramm enthalten, als die Einheit in dem Producte der Zahlen, wodurch die Grundlinie und Höhe mittelst jener Einheit ausgedruckt werden.

Ein Parallelogramm in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln, suche man die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Grundlinie und Höhe (Kreis 30.), so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Denn die Grundlinie sey $= a$, die Höhe $= b$, die mittlere proportionale $= c$, so ist $cc = ab$, folglich das Quadrat dem Parallelogramm gleich. — Oder das Verhältniß des Quadrats und Pgrms wird zusammengesetzt aus den Verhältnissen $a : c$ und $b : c$, oder aus $a : c$ und $c : a$, welches das Verhältniß der Gleichheit giebt.

Digitized by Google

Von der Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes mit einer gegebenen Seite oder in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, oder zweyer in ein einziges mit einer gegebenen Seite, s. Figur, 9, 13. 28. 31.

Parallelogramm der Hyperbel ist dasjenige, welches von den beiden Asymptoten einer Hyperbel und den ihnen parallelen Coordinaten an einem Puncte der krummen Linie gebildet wird. Es ist von unveränderlichem Inhalte. (Hyperbel, 8.).

Parallelogramm, newtonisches, s. Newtonisches Parallelogramm.

Parallelogrammische Zahlen sind Producte, deren Factoren um 2 oder eine größere Zahl verschieden sind. Theon Smyrnaeus, Cap. 14.

Parameter ist in jedem der drey Kegelschnitte eine beständige gerade Linie, die sich auf einen Durchmesser bezieht. In der Ellipse und Hyperbel ist es die dritte Proportionale zu einem Durchmesser und dessen conjugirten; in der Parabel die dritte Proportionale zu der Abscisse auf einem Durchmesser, vom Scheitel an genommen, und der Ordinate, die auf beiden Seiten dieselbe ist. Der Parameter zu der großen Axe in der Ellipse, zu der Hauptaxe in der Hyperbel, und zu der Axe in der Parabel heißt schlechthin der **Parameter des Kegelschnitts**.

Apollonius gebraucht die Benennung, Parameter, nicht, sondern nennt die beständige Linie diejenige, in Beziehung auf welche (παρ' ἣν) die Ordinaten zu einem Durchmesser potenziren, auch die senkrechte Seite, latus rectum. L. 1. prop. 11. 12. 13. 21. Der erstere Ausdruck erklärt sich aus den Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel, wenn Abscissen auf einem Durchmesser vom Scheitel an genommen werden, $yy = \frac{px}{2a}(2a \mp x)$, und $yy = px$ für die Parabel. Wegen des zweyten s. Ellipse, 7.

Das Wort Parameter scheint eine **Nebenlinie**, die zur Vergleichung des Quadrats der Ordinate mit einem

Digitized by Google

gewissen Rechteck gebraucht wird, zu bedeuten. Hutton erklärt es durch eine gleich verhaltende (equal measurer), weil die Verhältnisse der großen Axe zur kleinen und dieser zum Parameter gleich groß sind.

Allgemein heißt Parameter die Constante, die sich in einer Gleichung findet, als a in der Gleichung, $y^3 = axy + 4x^5$. Alle Curven, die durch diese Gleichung bestimmt werden, sind nur in der Größe von a verschieden. Hermann nannte diese a den Modulus der Curve, welche Benennung auch Euler in den Betrachtungen über die Curven einerley Art mit einem veränderlichen Parameter oder Modulus angenommen hat. Comm. Petrop. vet. T. VII. p. 174.

Partielle Differentialgleichungen sind solche, in welchen partielle Differentialquotienten vorkommen. Partielle Differentialquotienten sind die Quotienten der Differentiale von zwey veränderlichen Größen unter drey oder mehrern mit einander verbundenen, wenn diese beiden allein als veränderliche betrachtet werden. Zwischen zwey veränderlichen Größen giebt es keine partielle Differentialgleichung, da hier keine Auswahl der Differentiale Statt hat.

Die Theorie dieser Gleichungen ist eine sehr wichtige Erweiterung der Integralrechnung, welche um die Mitte des vorigen Jahrhunderts gemacht ist. Alle Aufgaben der Geometrie die Flächen betreffend, alle Untersuchungen der Mechanik über flüssige und biegsame Körper hängen von dieser Theorie ab. Die Auflösungen, welche man unabhängig von derselben finden mag, sind eingeschränkte, mit welchen man sich nur begnügt, wenn die Differentialgleichungen, welche die allgemeinen Auflösungen geben würden, sich nicht integriren lassen. Daher haben sich die neuern Analysten vorzüglich mit der Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen beschäftigt, und sie sehr häufig angewandt.

1. Drey oder mehrere veränderliche Größen z, y, x, u, t, etc. seyn durch eine Gleichung verbunden, die

Digitized by Google

gegeben oder gesucht seyn mag. Man kann hier die Differentiale zweyer derselben mit einander vergleichen, ohne den Einfluß zu betrachten, welchen die Veränderlichkeit der übrigen auf ihr Verhältniß hat, und sieht zu dieser Absicht diese übrigen als unveränderlich an, wie es erlaubt ist, wenn nur eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen vorhanden ist, in welcher man also jede derselben bis auf eine willkürlich bestimmen kann. Zur Erläuterung stelle man sich x, y, z als Coordinaten an eine krumme Fläche vor. Schneidet man diese durch eine Ebene parallel mit der Ebene durch die Axen der x, z, so sind die zu den Puncten in der Durchschnittslinie gehörigen y alle sich gleich, und die x, z sind Coordinaten einer ebenen Curve, welche die Projection einer auf der krummen Fläche befindlichen Curve ist, die von der Ebene der x, z einen gegebenen Abstand y hat. Der Differentialquotient $\frac{\partial z}{\partial x}$ ist ein partieller in Beziehung auf den Werth, den derselbe haben würde, wenn y sich zugleich mit x und z veränderte. Auf ähnliche Art verhält es sich mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$. Jener gehört für eine Curve auf der krummen Fläche, deren Ebene parallel mit der Ebene der y, z ist, dieser für eine Curve in einer Ebene, die der Ebene der x, y parallel ist.

2. Den partiellen Differentialgleichungen stehen die totalen entgegen. Es sey $P\partial x + Q\partial y = R\partial z$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z, oder von zwey oder einer derselben sind. Hier ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{P}{R} + \frac{Q}{R} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Q}{R} + \frac{P}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$. Dieses sind vollständige Differentialquotienten, dagegen die partiellen nur den ersten Theil ihrer Werthe enthalten.

3. Es sey z eine Function von y, x, u etc. das ist, eine aus diesen und aus unveränderlichen Größen zu-

Digitized by Google

sammengesetzte Größe, welche in Absicht auf eine der Functionalgrößen differentiirt wird, so werden die partiellen Differentialquotienten bezeichnet durch

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, etc. oder bequemer nur durch

$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, etc. und die partiellen Differentiale der Function z durch $\frac{\partial z}{\partial y}\partial y$, $\frac{\partial z}{\partial x}\partial x$, $\frac{\partial z}{\partial u}\partial u$, etc.

Die Quotienten bedeuten Functionen von y, x, u, etc. Das Differential, welches als Factor beygefügt ist, hebt sich also nicht gegen den Divisor. Differentialgleichung, 14. 15.

4. Das vollständige Differential einer Function z der Größen y, x, u, etc. wird nun ausgedrückt durch

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \text{etc.}$$

eine allgemeine, von der Beschaffenheit der Function z ganz unabhängige, Bezeichnungsart, die bey dieser Rechnung von Wichtigkeit ist.

5. Statt der Bruchform für die Differentialquotienten gebraucht man häufig die einfachen Buchstabenzeichen,

$\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$; $\frac{\partial z}{\partial u} = r$; u. s. f.

Diese Quotienten heißen auch Differential-Coefficienten, auch wohl Formules différentielles, welcher letztere Ausdruck aber nach Euler eine andere Bedeutung hat, s. Differentialformeln. Gewöhnlich heißen die Gleichungen mit diesen Quotienten bey den französischen Analysten équations aux différences partielles, und die Analysis derselben Calcul intégral aux différences partielles. Allein der Ausdruck ist zweydeutig, da hier nicht endliche Differenzen, sondern unendlich kleine in einer stetigen Reihe veränderlicher Größen verstanden werden. Dieses

Digitized by Google

bemerkt auch la Croix in seinem Werke über die Differential- und Integralrechnung. Nr. 716.

6. Eine Function einer einzigen veränderlichen Größe werde durch $\varphi(x)$, oder $\psi(x)$, oder $F(x)$ bezeichnet, wiewol sie auch häufig, ohne die Klammern, durch φx, ψx, Fx bezeichnet wird. Die Klammern dienen, um den Ausdruck noch augenfälliger von einem Producte zu unterscheiden. La Croix gebraucht diese Bezeichnungsart. Eulers Bezeichnungsart, $F:x$ möchte zu viele Ähnlichkeit mit einem Quotienten haben. Eine Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen wird durch die Bezeichnungen, $\varphi(x, y)$; $\varphi(x, y, u)$, angedeutet. Das Differential einer Function $\varphi(x)$ werde immer durch $\partial x \varphi' x$ bezeichnet, wo $\varphi' x$ der Differentialquotient ist, welchen die Differentiation der Function φx ergiebt. Die partiellen Differentiale einer Function $\varphi(x, y)$ werden durch $\frac{\varphi'(x, y)}{\partial x} \partial x$ und $\frac{\varphi'(x, y)}{\partial y} \partial y$ angezeigt. Man muß wohl bemerken, daß die ganze unter dem Functionszeichen enthaltene Größe als eine einzige, untrennbare Größe betrachtet und behandelt werden muß. S. Function.

7. Es sey Z eine Function zweyer veränderlichen Größen, x, y; das partielle Differential nach x sey $P\partial x$, und $Q\partial y$ nach y, es soll aus dem gegebenen Differential $P\partial x$ das $Q\partial y$ gefunden werden, um das vollständige Differential von Z zu erhalten.

Da $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$ ist, so muß, wenn Z eine wahre mögliche Größe ist, seyn, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, s. Differentialgleichung 12 — 14. Daher ist $\frac{\partial P}{\partial y} \partial x = \frac{\partial Q}{\partial x} \partial x$. Es ist aber $\frac{\partial Q}{\partial x} \partial x$ das partielle Differential von Q nach x, bey einem als unveränderlich betrachteten y; also ist Q das Integral von $\frac{\partial P}{\partial y} \partial x$, wenn in dieser Differential-

Digitized by Google

formel blos x als veränderlich angesehen wird. Oder es ist $Q = \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x$, bey einem unveränderten y. Daher ist

$$\partial Z = P \partial x + \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x.$$

Da P eine Function von x und y ist, so sey $\partial P = R \partial x + S \partial y$, und es ist $S = \frac{\partial P}{\partial y}$, daher ist

$$\partial Z = P \partial x + \partial y \int S \partial x.$$

8. Exempel. Es sey $\frac{\partial Z}{\partial x}$ oder $P = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2+2xy)}}$, so ist $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{3:2}}$, und $\int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = \int \frac{xy \partial x}{(x^2+2xy)^{3:2}}$ $= \frac{x}{\sqrt{(x^2+2xy)}}$. Daher $\partial Z = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2+2xy)}} \partial x$ $+ \frac{x}{\sqrt{(x^2+2xy)}} \partial y$. Hieraus ist $Z = \sqrt{(x^2+2xy)}$. S. Differentialgleichung, 19—24.

9. Die höhern partiellen Differentialquotienten werden auf eine ähnliche Art bezeichnet, wie die vom ersten Grade. Es sey $\partial z = p \partial x + q \partial y$, und $\partial p = p' \partial y + p'' \partial x$; auch $\partial q = q' \partial x + q'' \partial y$, so ist $q' = p'$ (Differentialgleichung, 12). Nun giebt es dreyerley partielle Differentiale. Entweder wird zweymahl nach x, oder zweymahl nach y, oder zuerst nach x und dann nach y, oder, (welches auf dasselbe hinauskommt) zuerst nach y und dann nach y differentiiret. Daraus entstehen folgende Differentialquotienten: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p''$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = q''$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = p'$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = q'$.

Auf ähnliche Art werden die Bezeichnungen für höhere Differentialquotienten gefunden.

Digitized by Google

10. Das vollständige Differential des zweyten Grades ist

$$\partial^2 z = p''\partial x^2 + 2p'\partial x\partial y + q''\partial y^2 + p\partial^2 x + q\partial^2 y,$$

wo kein Differential unveränderlich genommen ist.

11. Die partiellen Differentialgleichungen sind vom ersten, zweyten, dritten oder einem noch höhern Grade nach dem Grade der Differentiale und Differentialquotienten, die darin enthalten sind.

12. Die Gleichungen, worin die Quotienten $p, q \ldots p', q', p'', q'' \ldots$ blos einfach enthalten sind, das ist, weder in der zweyten oder einer höhern Potenz, noch in einander multiplicirt vorkommen, heißen linearische Gleichungen, s. Linearisch.

13. Die Gleichungen mit partiellen Differentialen führen auf Integrale, welche eine unbestimmte Function der veränderlichen Größen, einer oder mehrerer aus denselben, enthalten. Zur bessern Einsicht in die ganze Rechnung ist es sehr dienlich, endliche Gleichungen, die unbestimmte Functionen enthalten, zu differentiiren, um einzusehen, wie die Beschaffenheit der Functionen dadurch beseitigt werden kann, indem statt der Functionen die partiellen Differentialquotienten eingeführt werden. Dieses ist eben so nöthig, als es nöthig ist, vor der Integralrechnung die Differentialrechnung voran gehen zu lassen. Durch die Vernachlässigung dieser Einleitung haben die Schriftsteller über die Rechnung mit partiellen Differentialen dem Anfänger in dieser Materie Dunkelheit verursacht.

14. Aufgabe. Es sey $z = \varphi(x, y)$, oder $z = \varphi(t)$, wo t die aus x und y nebst Constanten verbundene Größe bedeutet. Auch sey $\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, wie es in der Folge immer angenommen wird. Es soll aus der endlichen Gleichung eine Gleichung mit partiellen Differentialen hergeleitet werden.

Digitized by Google

Es ist (4.) allgemein

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y,$$

$$\partial t = \frac{\partial t}{\partial x}\partial x + \frac{\partial t}{\partial y}\partial y.$$

Ferner ist $\partial\varphi(t) = \varphi'(t).\partial t$ (6.); also ist

$$\partial\varphi(t) = \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial x}\partial x + \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial y}\partial y.$$

Da $\partial z = \partial\varphi(t)$ ist, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial y},$$

oder $p = \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial x}; \quad q = \varphi'(t).\frac{\partial t}{\partial y}.$

Hier läßt sich die Function $\varphi'(t)$ wegschaffen, wodurch wird

$$\frac{\partial t}{\partial y}p = \frac{\partial t}{\partial x}q,$$

wo die partiellen Differentialquotienten durch die Function t gegeben werden.

15. Exempel. Es sey $z = \varphi(ax + by)$, so ist die partielle Differentialgleichung, $bp = aq$.

Da die Function φ eine unbestimmte seyn soll, so sind es auch p und q, doch so, daß eins derselben durch das andere bestimmt wird.

16. Aufgabe. Es sey $Z = V + \varphi(t)$, und V eine Function von x und y, daher $\partial V = \frac{\partial V}{\partial x}\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$, so ist auf gleichem Wege

$$\left(p - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = \left(q - \frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Man setze $\frac{\partial t}{\partial x} = P$, $\frac{\partial t}{\partial y} = Q$, so ist

$$Qp - Pq = Q.\frac{\partial V}{\partial x} - P.\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Digitized by Google

17. Aufgabe. Es sey t eine aus x, y, z und Constanten zusammengesetzte Größe, und $u = \varphi(t)$, wo u gleichfalls aus x, y, z und Constanten zusammengesetzt ist. Nun sey

$$\partial u = \mathfrak{P}\partial x + \Omega\partial y + \mathfrak{R}\partial z,$$
$$\partial t = p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z,$$

und $\partial\varphi(t) = (p\partial x + q\partial y + r\partial z)\,\varphi' t$.
Es ist $\partial z = p\partial x + q\partial y$, daher ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{P} + \mathfrak{R}p; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega + \mathfrak{R}q;$$
$$\frac{\partial t}{\partial x} = p + rp; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q + rq.$$

Hier ist $\mathfrak{R}p$ der Theil des Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, der mittelbar durch die Veränderung von z bey der Veränderung von x entsteht. So verhält es sich auch mit $\mathfrak{R}q$ in Absicht auf ∂y, und auf ähnliche Art mit rp und rq.
Da $\partial u = \partial\varphi(t)$ ist, so ist

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{R}p = (p + rp)\,\varphi' t,$$
$$\Omega + \mathfrak{R}q = (q + rq)\,\varphi' t.$$

Daraus

$$(\mathfrak{P} + \mathfrak{R}p)(q + rq) = (\Omega + \mathfrak{R}q)(p + rp),$$

oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}q\right) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z}p\right).$$

Diese Gleichung entwickelt enthält p, q, und einen Terminus ohne p und q, da der Terminus, der pq auf einer Seite enthält, sich gegen denselben auf der andern aufhebt. Eines dieser p oder q ist unbestimmt, so wie die Function φt unbestimmt ist.

18. Exempel. Es sey die gegebene Gleichung diese,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi[(x-a)\alpha + (y-b)\beta + z],$$

Digitized by Google

welche für alle krumme Oberflächen gilt, die durch Umdrehung einer Linie um eine gegebene Axe entstehen. Es sind x, y, z die Coordinaten an die Fläche, und a, b, α, β bestimmen die Lage der Axe. Hier ist $u = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2$, und $t = (x-a)\alpha + (y-b)\beta + z$, daher ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-a)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2(y-b)$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$; $\frac{\partial t}{\partial x} = \alpha$; $\frac{\partial t}{\partial y} = \beta$; $\frac{\partial t}{\partial z} = 1$.

Folglich ist

$(x-a+pz)(\beta+q) = (y-b+qz)(\alpha+p)$,

oder

$(x-a)(\beta+q) - (y-b)(\alpha+p) = (\alpha q - \beta p)z$,

oder

$(y-b-\beta z)p - (x-a-\alpha z)q - (x-a)\beta + (y-b)\alpha = 0$. S. unten einen Zusatz.

19. Exempel. Es ist $\frac{x-a}{z-c} = \varphi\frac{y-b}{z-c}$ die Gleichung für alle koniſche Flächen, die Grundfläche ſey welche man wolle (krumme Fläche, 31.). Hier iſt

$$u = \frac{x-a}{z-c}; \quad t = \frac{y-b}{z-c};$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x-a}{(z-c)^2}$;

$\frac{\partial t}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{y-b}{(z-c)^2}$.

Setzt man dieſe Werthe in die allgemeine Gleichung, ſo wird die Gleichung mit partiellen Differentialen,

$$(x-a)p + (y-b)q = z-c,$$

erhalten.

20. Nach dieſer Vorbereitung wird die Integrirung der partiellen Differentialgleichungen einleuchtender werden. Einige leichtere Fälle ſollen den Anfang machen.

21. Aufgabe. Es ſey $p = X$, einer Function von x, die endliche Gleichung daraus herzuleiten.

Digitized by Google

Da $\partial z = p\partial x + q\partial y$ ist, so ist $\partial z = X\partial x + q\partial y$. Weil für q keine Bestimmung gegeben ist, und, da p durch X schon bestimmt ist, nicht gegeben werden konnte (17.), so ist q eine willkürliche Function von y, und es ist $z = \int X\partial x + \Phi(y)$.

22. Die Integration jeder Differentialformel mit einer oder mehrern veränderlichen Größen wird in der hier behandelten Rechnung gefordert, da in dieser nicht die Frage ist, was die Integralrechnung bey Formeln und Gleichungen mit bestimmten Functionen für die Differentialfactoren mag leisten können oder nicht. Denn hier ist nur die Absicht, die Integrirung der Gleichungen mit partiellen Differentialen auf die mit vollständigen zu bringen.

23. Aufgabe. Es sey $p = \Phi(x, y)$ oder einer Function V von x und y, die Function z zu finden.

Wie vorher ist $z = \int V\partial x + \Phi(y)$, wo das $\int V\partial x$ blos in Beziehung auf x genommen wird. In dem Differential $\partial z = p\partial x + q\partial y$ bleibt q unbestimmt, daher eine unbestimmte Function von y in den Werth von z kommt. Den Werth von q findet man durch die Differentiation der Function z. Nämlich (7.)

$$\partial z = V\partial x + \partial y \int \frac{\partial V}{\partial y}\partial x + \partial y\,\Phi'(y),$$

wo der Factor zu ∂y der Werth von q ist.

24. Aufgabe. Es sey $ap + bq = c$, die Function z zu finden.

Da $q = \frac{c - ap}{b}$, so ist

$$b\partial z = p(b\partial x - a\partial y) + c\partial y.$$

Man setze $b\partial x - a\partial y = \partial t$, und nehme für p irgend eine Function von t, welche sey $\Phi'(t)$, so ist $b\partial z = \partial t\Phi'(t) + c\partial y$, und $bz = \Phi(t) + cy$, das ist

$$bz = \Phi(bx - ay) + cy.$$

25. Aufgabe. Es sey $Pp + Qq = R$, wo P, Q, R Functionen von x und y sind, die Function z zu bestimmen.

Digitized by Google

Da $\partial z = p\partial x + q\partial y$ ist, so ist durch Elimination des einen Differentialquotienten, als q,

$$\partial z = \frac{P}{Q}(Q\partial x - P\partial y) + \frac{R}{Q}\partial y.$$

Ist $Q\partial x - P\partial y$ unmittelbar das Differential einer Function von x und y, so setze man $Q\partial x - P\partial y = \partial t$; ist dieses aber nicht, so setze man den Factor M hinzu, wodurch die Formel integrirbar wird, und es sey nun $M(Q\partial x - P\partial y) = \partial t$, welche Formel zugleich jene in sich begreift, wenn $M = 1$ genommen werden kann. Es ist nun $\partial z = \frac{P}{MQ}\partial t + \frac{R}{Q}\partial y$. Hier ist z eine Function von t und y geworden. Deswegen muß x aus den Functionen M, Q, R weggeschafft werden, mittelst der gefundenen Function t von x und y. Derjenige Theil der Function z, woraus das partielle Differential $\frac{R}{Q}\partial y$ entstanden ist, sey $= V$, eine Function von t und y. Da $\partial V = \frac{\partial V}{\partial t}\partial t + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$ ist, so ist $\frac{R}{Q}\partial y = \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$, und der andere Theil $\frac{\partial V}{\partial t}\partial t$ ist in dem ersten Theile von ∂z, nämlich in $\frac{P}{MQ}\partial t$, enthalten. Zu diesem gehört auch noch ein von y ganz unabhängiges Differential nach t, das ist, $\varphi'(t).\partial t$, so daß

$$\partial z = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \varphi'(t)\right)\partial t + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y.$$

Daraus ist

$$z = \varphi(t) + V = \varphi(t) + \int \frac{R}{Q}\partial y,$$

wo V durch die partielle Integration von $\frac{R}{Q}\partial y$ nach y gefunden wird, nachdem R und Q durch t und y ausgedruckt sind.

Digitized by Google

26. Exempel. Es sey $px + qy = n\sqrt{(x^2+y^2)}$, so ist $P = x$; $Q = y$; $R = n\sqrt{(x^2+y^2)}$;

$$Q\partial x - P\partial y = y\partial x - x\partial y; \quad M = \frac{1}{yy};$$

$$\partial t = \frac{y\partial x - x\partial y}{yy}; \quad t = \frac{x}{y};$$

$$x = ty; \quad \sqrt{(x^2+y^2)} = y\sqrt{(1+t^2)};$$

$$\frac{R}{Q}\partial y = n\partial y\sqrt{(1+t^2)}; \quad V = ny\sqrt{(1+t^2)};$$

also $z = \varphi(t) + ny\sqrt{(1+t^2)}$, und für t wieder x eingeführt,

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + n\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

27. Umgekehrt wird hieraus durch die Differentiation erhalten,

$$\partial z = \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{\partial x}{y} - \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x\partial y}{yy}$$

$$+ \frac{nx\partial x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{ny\partial y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

$$\text{Also } px = \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y} + \frac{nx^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

$$qy = -\varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y} + \frac{ny^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Folglich ist $px + qy = n\sqrt{(x^2+y^2)}$.

28. Exempel. Es sey $pxx + qyy = nxy$, so ist $Q\partial x - P\partial y = yy\partial x - xx\partial y$;

$$M = \frac{1}{xxyy}; \quad \partial t = \frac{x}{xx} - \frac{\partial y}{yy};$$

$$t = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}; \quad x = \frac{y}{1-ty};$$

Digitized by Google

$$\frac{R}{Q}\partial y = \frac{n\partial y}{1-ty}, \text{ und } V = -\frac{n}{t}\log.\,\text{nat}\,(1-ty)$$
$$= -\frac{nxy}{x-y}\log.\frac{y}{x},$$

als das partielle Integral nach y allein. Folglich

$$z = \varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right) - \frac{nxy}{x-y}\log.\frac{y}{x}.$$

29. Aufgabe. Es sey die gegebene Gleichung, $Pp + Qq = Rz$, wo P, Q, R Functionen von x und y sind, die Function z zu finden. Diese Gleichung verbunden mit der, $\partial z = p\partial x + q\partial y$, giebt

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{p}{Qz}(Q\partial x - P\partial y) + \frac{R}{Q}\partial y.$$

Um $Q\partial x - P\partial y$ integrirbar zu machen, werde der Factor M zugesetzt, und es sey $M(Q\partial x - P\partial y) = \partial t$, so daß sey

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{p}{MQz}\partial t + \frac{R}{Q}\partial y.$$

Wir haben nun eine partielle Differentialgleichung zwischen z, t, y. Das erste Glied des zweyten Theils der Gleichung wäre in so fern nicht integrirbar, weil z in dem Differentialfactor vorkommt. Allein, da dieser Factor unbestimmt bleibt, also nicht braucht bekannt zu seyn, so muß man sich gedenken, daß z durch x und y ausgedruckt sey, und daß ferner auch für x sein Werth durch t und y gesetzt werde. Es ist nun, wie in (25.), da hier $\frac{\partial z}{z}$ statt des dortigen ∂z gekommen ist,

$$\log.\,\text{nat.}\,z = \varphi(t) + \int\frac{R}{Q}\partial y,$$

wo die Functionen R und Q durch t und y auszudrucken sind, und t als eine beständige Größe bey der Integration von $\frac{R}{Q}\partial y$ behandelt wird.

Digitized by Google

Nimmt man statt des Logarithmen die Zahl z selbst, so ist

$$z = e^{\Phi(t)+\int(R:Q)dy},$$

$$\text{oder } z = e^{\Phi(t)} \cdot e^{\int(R:Q)dy},$$

$$\text{oder } z = e^{\int(R:Q)dy} \cdot \psi(t),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Es ist nämlich, wenn $\log. z = u$ ist, $z = e^u$, (Logarithme 3, 30.). Auch ist $e^{\Phi(t)}$ selbst eine Function von t, daher dafür die Bezeichnung $\psi(t)$ gebraucht werden kann.

30. Exempel. Es sey $py + qx = nz$, so ist $P = y$; $Q = x$; $R = n$. Ferner ist $Q\partial x - P\partial y = x\partial x - y\partial y$. Da diese Formel integrirbar ist, so ist $M = 1$, und $x\partial x - y\partial y = \partial t$, daher $x^2 - y^2 = 2t$. Nun ist $Q = x = V(2t + y^2)$, und $\frac{R}{Q} = \frac{n}{V(2t+yy)}$; ferner $\int\frac{R}{Q}\partial y = \int\frac{n\partial y}{V(2t+yy)} = n\log.(y + V(2t+yy))$ $= n\log(y+x) = \log(x+y)^n$. Demnach ist $e^{\int(R:Q)dy} = e^{\log(x+y)^n}$. Diese Zahl sey u, so ist $\log u = \log(x+y)^n$, und $u = (x+y)^n$. Es ist also $z = (x+y)^n \cdot \psi(xx - yy)$.
Es ist nämlich eine Function von 2t auch eine Function von t.

31. Euler findet bey der Integrirung der Gleichung, $z = py + qx$ eine Schwierigkeit, Calculus integr. T. III. 187. 188. Er giebt der Gleichung, welche aus dieser, und der allgemeinen, $\partial z = p\partial x + q\partial y$, hergeleitet wird, die Form, $\partial z - \frac{z\partial y}{x} = p(\partial x - \frac{y\partial y}{x})$, und bemerke, daß der Theil linker Hand nicht integrirbar ist. Weiterhin §. 192. integrirt Euler die Gleichung $z = Mp + Nq$, wo M und N Functionen von x und y sind, nicht auf die Art, wie es hier geschehen ist, sondern setzt, daß in einem besondern Falle der Werth von z bekannt sey, und leitet daraus den allgemeinen Werth

Digitized by Google

von z her. Daraus findet er, §. 195. für die Gleichung, $z = py + qx$, daß $z = (x+y)\psi(xx-yy)$.

32. Aus der Gleichung, $px + qy = nz$, folgt nach der vorigen Methode, $z = y^n \cdot \psi\left(\frac{x}{y}\right)$, oder auch $z = x^n \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

33. Aufg. Die gegebene Gleichung sey $(\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q = z$, es wird die Function z gesucht.

Hier ist $P = \alpha x + \beta y$; $Q = \gamma x + \delta y$; $R = 1$. Daher $Q\partial x - P\partial y = (\gamma x + \delta y)\partial x - (\alpha x + \beta y)\partial y$. Da diese Formel eine gleichartige ist, so läßt sich ein Factor dazu angeben, der sie integrirbar macht (Integralgleichung, 31.). Dieser ist $\frac{1}{Qx - Py}$. Setzt man $y = ux$, wie am a. O. so wird

$$\frac{Q\partial x - P\partial y}{Qx - Py} = \frac{\partial x}{x} - \frac{V\partial u}{U - Vu},$$

wo $V = \alpha + \beta u$; $U = \gamma + \delta u$ ist. Demnach ist

$$\partial t = \frac{\partial x}{x} - \frac{(\alpha + \beta u)\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}.$$

Das Integral des ersten Gliedes in dem zweyten Theile ist log x. Das Integral des zweyten Gliedes wird aus den Formeln 25—29. des Artik. Integralformel gefunden. Oder kürzer, indem man das Differential in zwey Theile zerlegt, so daß

$$\partial t = \frac{\partial x}{x} - \frac{(\beta u - \frac{1}{2}(\delta - \alpha))\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2} - \frac{\frac{1}{2}(\delta + \alpha)\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}.$$

Das Integral des zweyten Gliedes ist $= +\frac{1}{2}\log(\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2)$. Das Integral des dritten ist entweder ein Logarithme oder ein Kreisbogen (a. a. O.

Digitized by Google

25—27.). Ist das erstere, so sey $\int \frac{\partial u}{\gamma+(\delta-\alpha)u-\beta u^2} = x$ log V, und es ist

$$t = \log. x + \tfrac{1}{2} \log. (\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2) - \tfrac{1}{2} (\alpha + \delta) \log V,$$

$$\text{oder } t = \tfrac{1}{2} \log. \frac{x^2 (\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2)}{V^{\alpha+\delta}}.$$

Stellt man für u dessen Werth her, so ist

$$t = \tfrac{1}{2} \log \frac{x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha+\delta}}.$$

Nun sollte in dem Factor des Differentials $\frac{R\partial y}{Q}$, oder $\frac{\partial y}{\gamma x + \delta y}$, die veränderliche x durch t und y ausgedruckt werden, damit die Formel integrirbar werde, indem t als eine Constante behandelt wird. Da t durch x und y gegeben wird, so findet eine gewisse Relation zwischen den Differentialen von x und y statt, wenn t als unveränderlich behandelt wird, daher auch eine Relation der zugleich veränderlichen x, y, für ein zwar willkürliches, aber beständiges t. Es ist $\partial t = \frac{Q\partial x - P\partial y}{Qx - Py}$, daher $Q\partial x = P\partial y$, wenn t beständig genommen wird, das ist $\frac{\partial x}{\alpha x + \beta y} = \frac{\partial y}{\gamma x + \delta y}$. Aus dem gefundenen Werthe von ∂t ist, wenn $\partial t = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(\alpha + \beta u)\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2},$$

oder, weil $\alpha x + \beta u x = \alpha x + \beta y$ ist,

$$\frac{\partial x}{\alpha x + \beta y} = \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2},$$

$$\text{oder } \frac{\partial y}{\gamma x + \delta y} = \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2}.$$

Digitized by Google

Das Integral dieser Formel ist log. V, wie vorher angenommen ist. Folglich ist $\frac{R\partial y}{Q} = \log. V$, und demnach

$$z = \psi(t) . e^{\log V} = V . \psi(t).$$

Hier kann t auch die Function $\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha+\delta}}$ bedeuten, weil die Function eines Logarithmen auch eine Function der Zahl zu dem Logarithmen ist. Der Logarithme wird aus dieser auf eine bestimmte Art zusammengesetzt. In dem Falle, daß $\int \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2}$ ein Kreisbogen ist, wird V eine unmögliche Größe, (Differentialformeln 47 ff. Goniometrie 149. ff.). Da t auch die Function V enthält, so hebt sich das unmögliche in den beiden Factoren des Werthes von z, indem die Logarithmen sich in Kreisbogen verwandeln.

Euler hat sich bey dieser Aufgabe der vorher erwähnten Methode bedient, aus einem besondern Falle für die Function z den allgemeinen Werth derselben herzuleiten, l. c. §. 199—202.

34. In dem Exempel (30.) ist $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$, $\delta = 0$. Setzt man daselbst $n = 1$, so ist $\log. V = \int \frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{1}{2} \log. \frac{1+u}{1-u}$ (Integralformel, 12.), das ist $V^2 = \frac{1+u}{1-u} = \frac{x+y}{x-y}$, und $V = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$. Ferner $t = \frac{1}{2} \log (x^2 - y^2)$, also $z = \psi(x^2 - y^2) . \frac{x+y}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$, das ist, $z = (x+y)\psi(x^2 - y^2)$, weil $\frac{\psi(x^2 - y^2)}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$ auch eine Function von $(xx - yy)$ ist. Denn eine Function dieser Größe wird daraus, als aus einer einzigen untrenn-

Digitized by Google

baren, und aus Constanten zusammengesetzt, welches auch geschieht, wenn noch der Divisor $\sqrt{(x^2 - y^2)}$ hinzugefügt wird.

35. Aufgabe. Die vorgegebene Gleichung sey $Pp + Qq = R$, und P, Q, R seyn Functionen von einer, zweyen oder allen der drey Größen, x, y, z. Die Verbindung mit der allgemeinen Gleichung, $\partial z = p\partial x + q\partial y$, giebt

$$P\partial z - R\partial x = q(P\partial y - Q\partial x),$$

oder

$$Q\partial z - R\partial y = p(Q\partial x - P\partial y),$$

oder auch

$$p(P\partial z - R\partial x) = q(R\partial y - Q\partial z).$$

Wenn auf jeder Seite einer unter diesen Gleichungen keine andern veränderlichen vorkommen, als diejenigen, deren Differentiale darin enthalten sind, so wird die Gleichung für integrirbar angenommen, und die vorgegebene Gleichung wird als aufgelöset angesehen.

36. La Grange hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1774, pag. 253; a. 1779. pag. 152; und a. 1785, pag. 174, eine Methode angegeben, Gleichungen von der Form, $Pp + Qq = R$, zu integriren. Das Verfahren, wie er solches am letzten Orte, pag. 179, beschreibt, ist folgendes. Man integrire nach den bekannten Regeln die Differentialgleichungen, $P\partial z - R\partial x = 0$, und $Q\partial z - R\partial y = 0$, und bringe die beiden Integrale auf die Form, $A = \alpha$; $B = \beta$, wo A und B Functionen von x, y, z sind, und α, β die beiden willkürlichen Constanten, die durch die Integration eingeführt werden. Darauf ordne man irgend eine Gleichung zwischen den Größen A, B an, welche man durch $F(A, B) = 0$, oder durch $A = \varphi(B)$ bezeichne, und diese Gleichung ist das vollständige Integral der vorgegebenen Gleichung.

Die Methode läßt sich auch auf vier und noch mehrere veränderliche Größen anwenden, wenn die Differentiale linearisch bleiben.

Digitized by Google

Die für diesen Artikel zu ausführliche Rechnung findet man auch in Bossuts Integralrechnung, §. 1005, und in der Integralrechnung von la Croix, §. 721; auch in dessen Traité élémentaire du Calcul intégral, §. 316. Doch ist der Geist des Beweises geändert. La Croix nimmt das Resultat als richtig an; und zeigt, daß diese Annahme auf etwas mögliches führet.

La Grange selbst hat diese Untersuchung noch einmahl vorgenommen, in der Théorie des fonctions analytiques, nr. 101. ff. und in den Leçons sur le calcul des fonctions, à Paris, 1806, leçon 20.

Zur Erläuterung werden folgende Bemerkungen mit ein paar Beyspielen dienen.

37. Die drey Formeln in (35.) sind von derselben Art wie diejenigen, welche entstehen, wenn eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen so differentiirt wird, daß eine derselben als unveränderlich betrachtet wird. Sie stellen die Curven dar, welche durch den Schnitt einer krummen Fläche mit einer Ebene, die zweyen Axen der Coordinaten parallel ist, entstehen, mittelst der Differentialverhältnisse zweyer Coordinaten. Nur sind an der krummen Fläche die Formeln, als Gleichungen, jede $= 0$; hier sind sie mit einander, wiewohl auf eine willkürliche Art, verbunden. Da p, q, $\frac{p}{q}$ willkürliche Functionen von x, y, z sind, so können sie immer als der Differentialfactor in dem Differential einer Function jener Größen angenommen werden, ohne daß man sie zu kennen oder zu bestimmen nöthig hat. Daher sind die Integrale der Formeln in den drey Gleichungen (35.) jede eine Function der andern. Es sey nämlich $P\partial z - R\partial x = \partial u$; $P\partial y - Q\partial x = \partial t$, so ist $\partial u = \partial t . \varphi'(t)$, also $u = \varphi(t)$, oder $\int(P\partial z - R\partial x) = \int\varphi(P\partial y - Q\partial x)$. Eben so verhält es sich mit den andern beiden Gleichungen.

38. Es kommt nun darauf an, die Function u und t zu finden. Wir wollen von den drey Gleichungen in

Digitized by Google

(35.) nur die erste in Betrachtung nehmen, weil dasselbe auf die beiden andern angewandt werden kann.

Enthält ∂u nur x und z, so wie ∂t nur x und y, so kommt es nur darauf an, eine Formel für zwey veränderliche Größen zu integriren; die Integrale sind dann jedes eine Function des andern. Das Integral wird gefunden, wenn man die Formel $= o$ setzt, und in der Integralgleichung eine willkürliche, von x, y, z unabhängige, Constante beyfügt.

Enthält $P\partial y - Q\partial x$ nur x und y, indem $P\partial z - R\partial x$ nebst x und z auch y enthält, so suche man aus dem Integral von $P\partial y - Q\partial x$ nebst dessen Constante, den Werth von y durch x und die unbestimmte Constante a, und setze diesen in die Gleichung $P\partial z - R\partial x$, um eine Gleichung zwischen z und x allein zu erhalten. Das Integral derselben, gleichfalls eine willkürliche Constante, b, ist eine Function von a. Setzt man nun für a den unbestimmten Werth durch x und y, so ergiebt sich die allgemeine Integralgleichung zwischen x, y und z. Die Substitution für y kann inzwischen Schwierigkeit machen.

Sind alle drey Formeln (35.) mit den drey veränderlichen Größen behaftet, so versuche man, ob aus den drey Gleichungen daselbst sich eine herleiten lasse, die einen der beiden vorigen Fälle giebt.

Ist dieses nicht möglich, so möchte es am besten seyn, die Form für die endliche Gleichung zu suchen, diese zu differentiiren, und die Differentialgleichung mit der gegebenen zu vergleichen, um daraus die endliche Gleichung zu bestimmen.

Den Differentialformeln kann man jeden Factor oder Divisor beyfügen, weil dadurch nur p oder q verändert werden, deren Werth ganz unbestimmt gelassen wird.

39. Exempel I. Die vorgegebene Gleichung sey $px + qz + y = o$, so ist $P = x$; $Q = z$; $R = -y$. Dadurch ist $p(x\partial z + y\partial x) = q(-y\partial y - z\partial z)$,

Digitized by Google

oder $x\partial z + y\partial x = \frac{q}{p}(-y\partial y - z\partial z)$. Die Gleichung, $y\partial y + z\partial z = o$, giebt $yy + zz = aa$. In der Gleichung, $x\partial z - y\partial x = o$, setze man für y den Werth durch a, nämlich $y = \sqrt{(aa - zz)}$, so ist $x\partial z + \partial x\sqrt{(aa - zz)} = o$, oder $\frac{\partial z}{\sqrt{(aa - zz)}} + \frac{\partial x}{x} = o$. Daraus ist Ang. $\sin\frac{z}{a} + \log\frac{x}{b} = o$, oder Ang. $\sin\frac{z}{a} = \log\frac{b}{x}$, das ist, $e^{\text{ang. sin}(z:a)} = \frac{b}{x}$, und $b = x\,e^{\text{ang. sin}(z:a)}$. Da b eine Function von aa ist, so ist

$$x e^{\text{ang. sin}(z:a)} = \varphi(aa).$$

Dieses ist die Form der gesuchten Gleichung, bey dem Werthe aa für $zz + yy$. Da aa ganz unbestimmt bleibt, so kann man eben diese unbestimmte Größe dafür setzen, und es ist allgemein

$$x e^{\text{ang. sin}(z:\sqrt{(yy+zz)})} = \varphi(yy + zz).$$

Nimmt man die zweyte Gleichung aus (35.), so ist, auf gleiche Art,

$$x e^{-\text{ang. sin}.(y:\sqrt{(zz+yy)})} = \varphi(z^2 + y^2),$$

wo der Winkel das Complement jenes Winkels zum rechten ist.

40. Um rückwärts hieraus durch Differentiirung die Gleichung, $px + qz + y = o$, herzuleiten, bemerke man, daß $\log\varphi(yy + zz)$ durch $\psi(yy + zz)$ dargestellt werden kann. Das Differential derselben ist $(2y\partial y + 2z\partial z)\psi'(yy + zz)$. Hier kann man die Function $\psi'(yy + zz)$ durch $\frac{\chi(yy+zz)}{yy+zz}$ ausdrucken. Man nehme nun die Werthe, welche p und

Digitized by Google

q bey der Differentiirung der beiden gefundenen Gleichungen bekommen, so ergiebt sich, daß $px + qz = -y$ ist, wie in der vorgegebenen Gleichung.

41. Exempel II. Die gegebene Gleichung mit partiellen Differentialen sey

$$(y - \beta z)p - (x - \alpha z)q = \beta x - \alpha y.$$

Hier ist $P = y - \beta x$; $Q = -(x - \alpha z)$; $R = \beta x - \alpha y$. Die Differentialformeln in (35.) sind:

$$P\partial z - R\partial x = (y - \beta z)\partial z - (\beta x - \alpha y)\partial x.$$
$$P\partial y - Q\partial x = (y - \beta z)\partial y + (x - \alpha z)\partial x.$$
$$R\partial y - Q\partial z = (\beta x - \alpha y)\partial y + (x - \alpha z)\partial z.$$

Keine dieser Differentialformeln ist für sich integrirbar. Allein es ist zu versuchen, ob durch Verbindungen von ihnen integrirbare Formeln entstehen mögen. Wenn die erste durch α, die dritte durch β multiplicirt, und letztere von jener abgezogen wird, so wird erhalten,

$$(\alpha y - \beta x)(\partial z + \alpha\partial x + \beta\partial y).$$

Multiplicirt man die erste durch x, die dritte durch y, und zieht die letztere von jener ab, so wird erhalten,

$$(\alpha y - \beta x)(z\partial z + x\partial x + y\partial y).$$

Da die Integrale der Formeln, $P\partial z - R\partial x$; $P\partial y - Q\partial x$; $R\partial y - Q\partial z$, jedes eine unbestimmte Function der andern sind, so sind auch die daraus zusammengesetzten, und mit gegebenen Functionen von x, y, z verbundenen Formeln jede eine Function der andern. So ist das Integral von $\alpha(P\partial z - R\partial x) - \beta(R\partial y - Q\partial z)$ eine Function des Integrals von $x(P\partial z - R\partial x) - y(R\partial y - Q\partial z)$. Auch die Integrale dieser durch $(\alpha y - \beta x)$ dividirten Differentialen sind Functionen von einander. Demnach ist $f(\partial z + \alpha\partial x + \beta\partial y)$ eine Function von $\int(z\partial z + x\partial x + y\partial y)$, das ist,

$$z + \alpha x + \beta y = \Phi(zz + xx + yy).$$

Die hier vorgegebene Differentialgleichung ist die in (16.) gefundene, nur daß die dort gegebenen a, b, c hier $= 0$ genommen sind.

Digitized by Google

Partielle Differentialgleichungen vom zweyten Grade.

42. In den Gleichungen mit partiellen Differentialen vom zweyten Grade kommen die Quotienten $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}$; $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$ vor, deren Bedeutung (9) erklärt ist, einer, oder zwey, oder alle drey. Manche Fälle der Verbindungen sind nicht auflösbar. Hier können nur einige merkwürdige Beyspiele angeführt werden.

43. Aufgabe. Es sey $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P$, einer Function von x und y. Da $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ das Differential von $\frac{\partial z}{\partial x}$ in Beziehung auf ∂x, durch ∂x dividirt ist, so ist $\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = P\partial x$, also $\frac{\partial z}{\partial x} = \int P\partial x + \text{Const.}$ Die Constante ist eine willkürliche Function von y, welche bey der Integration, so wie in dem zweyten Differential als eine beständige Größe angesehen ist. Also ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int P\partial x + f(y).$$

In dem Differentialquotienten ist y als unveränderlich angesehen, daher ist es auch so bey der Integration zu behandeln, so daß

$$z = \int \partial x \int P\,\partial x + xf(y) + F(y),$$

wo $f(y)$ eine zweyte willkürliche Function von y ist. Die zwey Integrationen erfordern zwey Constanten, wenn das Integral vollständig seyn soll, s. Integral, Th. II. S. 747.

44. Exempel. Es sey $P = \frac{xy}{a}$, so ist

$$z = \frac{x^3 y}{6a} + xf(y) + F(y).$$

Digitized by Google

45. Aufg. Die gegebene Gleichung sey $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = P$, die Function z zu finden.

Der Ausdruck bedeutet, daß z zuerst in Absicht auf x, und das Differential in Absicht auf y differentiirt werden soll. Auf gleiche Art ist die Formel rückwärts zu integriren. Nimmt man zuerst blos y veränderlich, so ist $\frac{\partial^2 z}{\partial x} = P \partial y$, und $\int \frac{\partial^2 z}{\partial x} = \int P \partial y + f'(x)$, oder $\frac{\partial z}{\partial x} = \int P \partial y + f'(x)$. Nun ist x allein als veränderlich zu nehmen, wodurch ist

$$\partial z = \partial x \int P \partial y + \partial x f'(x), \text{ und daraus}$$
$$z = \int \partial x \int P \partial y + f(x) + F(y).$$

Es ist hier, zufolge (6.), der Differentialfactor zu ∂x durch $f'(x)$ bezeichnet, um das Integral durch $f(x)$ anzudeuten.

46. Aufgabe. Die gegebene Gleichung sey $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = aa \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, die Function z daraus herzuleiten.

Die allgemeine Gleichung, $\partial z = p \partial x + q \partial y$, giebt $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Es ist also $\frac{\partial q}{\partial y} = aa \frac{\partial p}{\partial x}$. Nun sey $\partial p = r \partial x + s \partial y$, und $\partial q = s \partial x + t \partial y$, (Differentialgleichung, 12.), so ist $\frac{\partial p}{\partial x} = r$; $\frac{\partial q}{\partial y} = t$, also $t = aar$, und $\partial q = s \partial x + aar \partial y$. Die Verbindung dieser Gleichung mit der ersten, $\partial p = r \partial x + s \partial y$, giebt

$$a \partial p + \partial q = (ar + s)(\partial x + a \partial y),$$
$$a \partial p - \partial q = (ar - s)(\partial x - a \partial y).$$

Damit der zweyte Theil jeder dieser beiden Gleichungen integrirbar sey, muß $ar + s$ eine Function von $x + ay$, so wie $ar - s$ von $x - ay$ seyn, daher auch die

Digitized by Google

Integrale dieser Theile Functionen von $x + ay$ und $x - ay$ sind, oder $ap + q = f'(x + ay)$; und $ap - q = F'(x - ay)$ ist. Daraus ist

$$2ap = f'(x + ay) + F'(x - ay),$$
$$2q = f'(x + ay) - F'(x - ay).$$

Da $\partial z = p\partial x + q\partial y$ ist, so ergiebt sich der Werth von z leicht. Man muß nämlich den Werth von $p\partial x$ in Absicht auf x allein, und den Werth von $q\partial y$ in Absicht auf y allein integriren. So ist

$$z = \frac{1}{a} f(x + ay) + \frac{1}{a} F(x - ay),$$

wo f und F die Functionszeichen für die Integrale sind, im Gegensatze gegen f' und F', als Functionszeichen für die Differentiale. Der zweyte Theil von z mag auch subtractiv genommen werden. Denn es ist $\partial q - a\partial p = (s - ar)(\partial x - a\partial y)$, also $q - ap = F'(x - ay)$. Dadurch werden die Vorzeichen von $F'(x - ay)$ vertauscht.

47. Wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ist, so ist

$$z = f(x + y) \pm F(x - y).$$

48. Diese Integration ist merkwürdig, weil durch sie die Rechnung mit partiellen Differentialen aufs neue in Anregung gekommen, und seit der Zeit sehr eifrig bearbeitet ist. Sie dient zur Bestimmung der Figur schwingender Saiten, so fern diese zugleich von der Zeit abhängt, da sie sich mit jedem Zeitmomente ändert. Die eine der veränderlichen Größen, x, ist die Zeit, die andere, y, ein Bogen oder die zugehörige Abscisse, und z ist die Ordinate.

49. Wenn anstatt der veränderlichen x, y zwey andere t, u eingeführt werden, deren jede durch x und y gegeben ist, so ist es nöthig, die partiellen Differentialquotienten in Absicht auf x und y in solche zu verwandeln, die sich auf t und u beziehen. Dieses dient

Digitized by Google

zugleich zur Erläuterung der Rechnung mit diesen Diff
ferentialquotienten. Ein Beyspiel wird hier genügen,
da das Verfahren selbst dasselbe bleibt.

50. Es sey $t = \alpha x + \beta y$, und $u = \gamma x + \delta y$.
Wie bisher, sey $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, und auf gleich
Art $\partial z = P\,\partial t + Q\,\partial u$. Für ∂t und ∂u setze man
ihre Werthe durch ∂x und ∂y, so ist
$\partial z = (P\alpha + Q\gamma)\,\partial x + (P\beta + Q\delta)\,\partial y$, also
$$p = P\alpha + Q\gamma \;;\; q = P\beta + Q\delta,$$
das ist
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma\frac{\partial z}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta\frac{\partial z}{\partial t} + \delta\frac{\partial z}{\partial u}.$$
Ferner ist (4.) $\partial P = \frac{\partial P}{\partial t}\,\partial t + \frac{\partial P}{\partial u}\,\partial u$,
$$= \left(\alpha\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma\frac{\partial P}{\partial u}\right)\partial x + \left(\beta\frac{\partial P}{\partial t} + \delta\frac{\partial P}{\partial u}\right)\partial y$$
und eben so
$$\partial Q = \left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial t} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\partial x + \left(\beta\frac{\partial Q}{\partial t} + \delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\partial y.$$
Man bemerke, daß $\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ ist, (Differentialgleichung
12). Es ist daher
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\alpha\alpha\frac{\partial P}{\partial t} + 2\alpha\gamma\frac{\partial P}{\partial u} + \gamma\gamma\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$
$$\frac{\partial q}{\partial y} = \left(\beta\beta\frac{\partial P}{\partial t} + 2\beta\delta\frac{\partial P}{\partial u} + \delta\delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \left(\alpha\beta\frac{\partial P}{\partial t} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\frac{\partial P}{\partial u} + \gamma\delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right),$$
das ist
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\alpha\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \gamma\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\beta\beta\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \delta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\alpha\delta+\beta\gamma)\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \gamma\delta\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Erweis einer Bedingungsgleichung für Differentialgleichungen mit mehr als zwey veränderlichen Größen.

51. Es seyn x und y zwey veränderliche Größen, und $\partial y = p\,\partial x$; $\partial p = q\,\partial x$; $\partial q = r\,\partial x$; $\partial r = s\,\partial x$, u. s. f. Ferner sey z irgend eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc. das ist, eine Zusammensetzung aus diesen veränderlichen Größen, auch sey das partielle Differential $\partial z = V\,\partial x$, wo V ebenfalls eine Function von x, y, p, q, r, etc. ist. In dieser Function ist ein Differentialquotient mehr als in z. Nun sey das aus allen partiellen Differentialen zusammengesetzte vollständige,

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \text{etc.} = o.$$

Es ist

$$M = \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial x}\quad;\quad N = \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$P = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial p};\quad Q = \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial q}.$$

$$R = \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial r};\quad S = \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial z}{\partial s}.$$

u. s. f.

Erstlich ist der allgemeine Ausdruck für das Differential von z,

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial z}{\partial p}\partial p + \frac{\partial z}{\partial q}\partial q + \text{etc.}$$

und durch die Einführung der Bezeichnungen p, q, r, s, etc.

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial z}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}p\,\partial x + \frac{\partial z}{\partial p}q\partial x + \frac{\partial z}{\partial q}r\partial x + \text{etc.}$$

Da $\partial z = V\partial x$ gesetzt ist, so ist

$$V = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}p + \frac{\partial z}{\partial p}q + \frac{\partial z}{\partial q}r + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Das Differential von V ist allgemein ausgedruckt,

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial x}\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y + \frac{\partial V}{\partial p}\partial p + \text{etc.}$$

Aus dem Werthe von V ist aber

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x}q + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial x}r + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y}q + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial y}r + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial p}p + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}q + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial p}r + \text{etc.} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial p}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial q} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial q}p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}q + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\cdot r + \text{etc.}$$

u. s. f.

$$+ \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial q}$$

Man bemerke, daß

$$\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p}\partial p + \text{etc.}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}p\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p}q\partial x + \text{etc.}$$

und auf gleiche Art,

$$\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}p\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial p}q\partial x + \text{etc.}$$

$$\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y}p\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}q\partial x + \text{etc.}$$

u. s. f.

Folglich ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\partial x}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\partial x}\partial\frac{\partial z}{\partial y};$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{dx} d\frac{dz}{dp} + \frac{dz}{dy}; \quad \frac{dV}{dq} = \frac{1}{\partial x} \partial\frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p};$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{dx} d\frac{dz}{dr} + \frac{dz}{dq}; \quad \text{u. s. f.}$$

Dieses sind die Werthe der in dem Satze durch M, N, P, Q, etc. bezeichneten Differentialfactoren.

52. Man muß nicht etwa in den partiellen Differentialquotienten eines der in dem Nenner befindlichen Differentiale gegen dasselbe, so ferne es zugleich Factor jenes Quotienten ist, aufheben wollen, weil jene Ausdrücke ein Ganzes ausmachen, und zusammen eine gewisse Function von x, y, p, q, etc. anzeigen.

53. Es ist, wenn die Coefficienten P, Q, R, S, etc. vollständig differentiirt werden, bey einem beständigen ∂x,

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

Denn es ist $\frac{\partial P}{\partial x} = N + \frac{1}{\partial x^1} \partial^1 \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)$;

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{1}{\partial x^2} \partial^2 \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^3} \partial^3 \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right);$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = \frac{1}{\partial x^3} \partial^3 \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \frac{1}{\partial x^4} \partial^4 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right);$$

u. s. f.

Die Verbindung dieser Gleichungen durch abwechselndes Addiren und Subtrahiren giebt

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \text{etc.} = N.$$

54. Dieses ist der Satz, der in dem Artikel, Differentio - Differentialrechnung, 28. angeführt ist, und den Euler nicht anders als durch Hülfe der Variationsrechnung erweisen konnte. Der hier gegebene ist für den

Digitized by Google

Gegenstand leicht genug. Hier ist z als eine reale Function von x, y, p, q, r, etc. angenommen. Daher ist $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder V auch eine reale Function dieser Grösen. Darum muß, wenn V eine reale Function derselben seyn soll, auch die Relation, welche der Satz angiebt, Statt haben.

55. Exempel. Es sey $\partial z = v\partial x + u\partial y$, wo v und u Functionen von x und y sind, so ist $V = v + \frac{u\partial y}{\partial x} = v + up$. Daher ist $M = \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x}$; $N = \frac{\partial v}{\partial y} + p\frac{\partial u}{\partial y}$; $P = u$; $\partial P = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y$, und $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y}$. Da in der Gleichung für V nur die drey Grösen x, y, p vorhanden sind, so fallen die Coefficienten Q, R, etc. weg, und es ist $N = \frac{\partial P}{\partial x}$, also sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, wie es nach Differentialgleichung, 12, seyn muß.
Ein umständlicheres Exempel a. a. O. 30.

Verwandlung einer Function durch Hülfe der partiellen Differentials.

56. Es sey $y = x - e\varphi(x)$; und $\psi(x)$ eine andere Function von x von gegebener Beschaffenheit, wie es auch die Function $\varphi(x)$ ist; es soll $\psi(x)$ in eine Function von y verwandelt, oder aus Functionen von y zusammengesetzt werden.

I. Man setze zur Abkürzung $\psi(x) = u$, und nehme für u eine Reihe an,

$u = A + Be + Ce^2 + De^3 + Ee^4 + \text{etc.}$

worin A, B, C, D, E, etc. Functionen von y allein seyn. Da u auf eine bestimmte Art von e und y ab-

Digitized by Google

hängt, so bleibt die Form jener Coefficienten dieselbe, was auch e seyn mag. Man betrachte nun u und e als die zusammengehörigen veränderlichen Größen, y aber als unveränderlich, so wird durch die successiven Differentiirungen der u in Absicht auf e, wenn ∂e constant genommen wird, erhalten,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = B + 2Ce + 3De^2 + 4Ee^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = 2C + 6De + 12Ee^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = 6D + 24Ee + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial e^4} = 24E + \text{etc.}$$

u. s. f.

II. Damit die Coefficienten A, B, C, etc. Functionen von y allein, ohne e, seyn, muß in den Werthen der partiellen Differentialquotienten $e = o$ gesetzt werden. Dadurch werden diese Quotienten nach der Reihe, B, 2C, 6D, 24E, etc. Da bey dieser Annahme $x = y$ ist, so ist $A = \psi(y)$, und es ist

$$u = \psi(y) + \frac{\partial u}{\partial e} e + \frac{\partial^2 u}{1.2\,\partial e^2} \cdot e^2 + \frac{\partial^3 u}{1.2.3\,\partial e^3} \cdot e^3 + \frac{\partial^4 u}{1.2.3.4\,\partial e^4} \cdot e^4 + \text{etc.}$$

Diese Differentialquotienten, die sich auf ein veränderliches e beziehen, müssen nun in solche verwandelt werden, die zwischen x und y statt haben, damit e als unveränderlich beybehalten werden könne.

III. Wenn mit den veränderlichen x, y, z auch e als veränderlich betrachtet wird, so ist, wenn $\varphi x = t$ gesetzt, also $y = x - et$ ist,

$$\partial y = \partial x - e\partial t - t\partial e.$$

Daraus entstehen die partiellen Differentialgleichungen,

Digitized by Google

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y} - e\frac{\partial t}{\partial y};$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial e} - e\frac{\partial t}{\partial e} - t.$$

Aus beiden ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial e} - t\frac{\partial x}{\partial y} = e\frac{\partial t}{\partial e} - et\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Da e jeden Werth haben kann, so ist jeder Theil dieser Gleichung für sich Null, und es ist

$$\frac{\partial x}{\partial e} = t\frac{\partial x}{\partial y}; \qquad \frac{\partial t}{\partial e} = t\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Aus beiden folgt

$$\frac{\partial x}{\partial e}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial e}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}.$$

IV. Die erste dieser drey Gleichungen gilt auch, wenn statt x eine Function von x, ohne y oder e zu enthalten, wie u oder $\psi(x)$ genommen wird, oder es ist $\frac{\partial u}{\partial e} = t\frac{\partial u}{\partial y}$. Denn wenn $\partial u = v\partial x$ ist, so multiplicire man die erstere Gleichung in beiden Theilen mit v, so ist $\frac{v\partial x}{\partial e} = t\frac{v\partial x}{\partial y}$, das ist $\frac{\partial u}{\partial e} = t\frac{\partial u}{\partial y}$.

Auch ist $\frac{\partial u}{\partial e} = vt\frac{\partial x}{\partial y}$.

V. Da u jede Function von x bedeutet, so ist auch $\frac{\partial v}{\partial e} = t\frac{\partial v}{\partial y}$. Diese Gleichung verbunden mit der $\frac{\partial x}{\partial e} = t\frac{\partial x}{\partial y}$, giebt $\frac{\partial x}{\partial e}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial e}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}$.

VI. Durch Hülfe dieser Formeln lassen sich die Differentialquotienten in Beziehung auf u und e in Quotienten zwischen x und y verwandeln.

Digitized by Google

Zuerst ist $\frac{\partial u}{\partial e} = vt \frac{\partial x}{\partial y}$.

VII. Aus diesem Quotienten wird durch die Differentiirung in Absicht auf e in beiden Theilen die Gleichung erhalten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = t \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial e} + v \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial t}{\partial e} + vt \frac{\partial^2 x}{\partial y . \partial e}.$$

Durch die Vertauschungen (V.) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = t \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + vt \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial e}.$$

Der Theil rechter Hand ist der partielle Differentialquotient, wenn $vt \frac{\partial x}{\partial e}$ in Absicht auf y differentiirt wird. Der Quotient $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial e}$ zeigt zwey Differentiirungen an, es sey zuerst nach e und dann nach y, oder zuerst nach y und dann nach e. Statt $\frac{\partial x}{\partial e}$ setze man dessen Werth $t \frac{\partial x}{\partial y}$, so ist $\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$ der partielle Differentialquotient aus $vt^2 \frac{\partial x}{\partial y}$ in Absicht auf y, oder es ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = \frac{\partial . vt^2 (\partial x : \partial y)}{\partial y}.$$

VIII. Auf gleiche Art wird der Quotient $\frac{\partial^3 u}{\partial e^3}$ gefunden, da anstatt t kommt t^2, welches wie eine einfache Größe beym Differentiiren behandelt werde. So ist

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = \frac{\partial^2 . vt^3 (\partial x : \partial y)}{\partial y^2}.$$

Hieraus ergiebt sich

Digitized by Google

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \varepsilon^4} = \frac{\partial^3 . v t^4 (\partial x : \partial y)}{\partial y^3},$$

und allgemein

$$\frac{\partial^n u}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1} . v t^n (\partial x : \partial y)}{\partial y^{n-1}}.$$

IX. In allen diesen Quotienten, so fern sie die Coefficienten in der Reihe für $u = \psi x$ angeben sollen, ist $x = y$, also ψy für ψx, und φy für φx zu setzen. Folglich ist

$$\psi x = \psi y + \varepsilon . v \varphi y + \varepsilon^2 . \frac{\partial . v (\varphi y)^2}{1 . 2 \partial y^2}$$

$$+ \varepsilon^3 . \frac{\partial . v (\varphi y)^3}{1 . 2 . 3 \partial y^3} + \varepsilon^4 . \frac{\partial . v (\varphi y)^4}{1 . 2 . 3 . 4 \partial y^4} + \text{etc.}$$

wie in dem Artikel, la Grange's Lehrsatz, 11, wo p und z hier v und ε sind.

Exempel aus der Astronomie, die drey Anomalien, (die mittlere, excentrische und wahre) nebst dem Radius Vector in einer Ellipse betreffend, kommen daselbst 15—19 vor.

X. Die hier vorgetragene Methode hat la Place in der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes, X. angewandt. Die Beweise der einzelnen Sätze sind aber von mir ganz abgeändert, um sie einleuchtender zu machen. Man vergleiche auch die Theorie der analytischen Functionen von la Grange, Nr. 97—99.

Integration einer totalen Differentialgleichung des ersten Grades zwischen drey veränderlichen Größen.

57. Die totalen Differentialgleichungen zwischen drey veränderlichen Größen enthalten jedes der Differentiale derselben. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist $P \partial x + Q \partial y + R \partial z = 0$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z oder zweyer, oder einer derselben, oder eine gegebene Größe sind. Diese Functionen müssen aber so beschaffen seyn, daß die Bedingungsgleichung, welche in

Digitized by Google

dem Artikel, Differentialgleichung, 17. gefunden ist, dabey Statt habe. Da nur eine Gleichung zwischen den drey veränderlichen vorhanden ist, so kann man eine derselben als unveränderlich betrachten, und es bleibt noch eine unbestimmte Gleichung zwischen den beiden andern übrig. Man nehme z als unveränderlich an, und setze demnach $P\partial x + Q\partial y = o$. Die hieraus hergeleitete Integralgleichung muß nun aber, damit sie die gesuchte zwischen den dreyen, x, y, z sey, noch eine Function von z als Constante enthalten. Das Differential dieser Function nebst dem partiellen Differential nach z aus dem andern Theile der Integralgleichung muß das Differential $R\partial z$ geben. Differentiirt man nun die gefundene Integralgleichung nebst der beygefügten Function von z vollständig, in Absicht auf alle drey veränderlichen Größen, so erhält man in dem Differentialfactor zu ∂z eine Function, welche der R gleich ist. Daraus wird denn auch die unbekannte Function von z gefunden.

58. Exempel. Die aufgegebene Gleichung sey $(ay - bz)\partial x + (cz - ax)\partial y + (bx - cy)\partial z = o$. Hier ist $P = ay - bz$; $Q = cz - ax$;

$R = bx - cy$. Ferner ist $\frac{\partial P}{\partial y} = a$; $\frac{\partial P}{\partial z} = -b$;

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -a$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = c$; $\frac{\partial R}{\partial x} = b$; $\frac{\partial R}{\partial y} = -c$.

Diese Werthe in die Bedingungsgleichung, a. a. O. gesetzt, thun ihr Genüge, obgleich die einzelnen Bedingungen, daf. 16. nicht erfüllt werden, welches anzeigt, daß hier noch ein Multiplicator hinzukommen muß. Inzwischen brauchen wir diesen nicht zu kennen.

Setzt man z constant, so ist

$$(ay - bz)\partial x + (cz - ax)\partial y = o,$$

oder $\frac{\partial x}{cz - ax} + \frac{\partial y}{ay - bz} = o$. Davon ist die Integrale, so fern z unveränderlich ist,

Digitized by Google

$$-\frac{1}{a}\log(cz-ax)+\frac{1}{a}\log(ay-bz)=\varphi(z),$$

$$\text{oder } \frac{1}{a}\log.\frac{ay-bz}{cz-ax}=\varphi(z).$$

Daher ist auch die Zahl $\frac{ay-bz}{cz-ax}$ eine Function von z. Diese bezeichne man durch Z, so daß die Integralgleichung sey $\frac{ay-bz}{cz-ax}=Z$. Diese differentiirt giebt

$$a[(ay-bx)\partial x+(cz-ax)\partial y+(bx-cy)\partial z]:(cz-ax)^2=\partial Z.$$

Der Zähler dieses Bruches ist die gegebene Gleichung mit a multiplicirt, also ist $\partial Z=0$, und $Z=C$, eine unveränderliche Größe. Man setze $Z=n$, so ist die vollständige Integralgleichung,

$$nax+ay-(b+nc)z=0,$$

welche eine neue Größe n enthält, die durch die Integration hinzugekommen ist.

Mehrere Beyspiele anzuführen, würde wegen der weitläuftigen Rechnung zu vielen Raum wegnehmen. Man sehe aber Euleri Calc. Integr. T. III. P. I. Sect. 1. cap. 1. und la Croix Integralrechnung, Nr. 698—715.

Zur Geschichte der Rechnung mit partiellen Differentialquotienten.

59. Euler hat auch zu dieser seinen analytischen Theorie den Grund gelegt, in zwey Abhandlungen de infinitis curvis ejusdem generis, Comm. Acad. Petrop. T. VII. a. a. 1734. 1735. Krumme Linien von einerley Gattung nennt er solche, die nicht weiter von einander verschieden sind, als in Absicht auf eine für jede derselben unveränderliche Linie, welche man den Parameter zu nennen pflegt. Jede algebraische Gleichung zwischen den veränderlichen z, x und einer unveränderlichen a (welche aber auch mehrere gegebene enthalten mag) stellt unendlich viele Curven dar, nachdem

Digitized by Google

a verschiedene Werthe erhält. Allein bey diesen (welche in der That nur Varietäten sind) bleibt Euler nicht stehen, sondern er sucht Gleichungen auf, in welchen z eine willkürliche Function von x und a ist, wiewol er sich über diese große Erweiterung des Begriffs von Curven einerley Art nicht erklärt. Wenn $z = \varphi\left(\frac{x}{a} + c\right)$ ist, so gehören unter dieselbe Gattung die Linien, deren Gleichung ist $z = \frac{x}{a} + c$; $z = \left(\frac{x}{a} + c\right)^2$; $z = \left(\frac{x}{a} + c\right)^5$. u. s. f. auch alle, in welchen der Werth von z aus $\frac{x}{a} + c$, als einer untheilbaren Größe betrachtet, zusammengesetzt ist, auch circulare und logarithmische und unbenannte Functionen sind. Dieses mag aber bey Seite gesetzt werden, da es nur eine Benennung betrifft.

60. Es sey $\partial z = P\partial x$, wo P eine Function von x und a ist, die aber nicht bekannt ist, weil $P\partial x$ sich nicht integriren läßt. Nimmt man a veränderlich, so wird $\partial z = P\partial x + Q\partial a$, wo $Q = \int \frac{\partial P}{\partial a}\partial x$ ist (Differentialgleichung, 20.). Nun sucht Euler solche Werthe für P und Q, wodurch die Formel $P\partial x + Q\partial a$ sich integriren läßt. Zuerst setzt er in der zweyten Abhandlung $Q = -\frac{Px}{a}$, wodurch ist $\partial z = P\left(\partial x - \frac{x\partial a}{a}\right)$. Damit diese Formel sich integriren lasse, muß $P = \frac{1}{a}$ seyn, und es ist $z = \frac{x}{a} + c$, wo c eine willkürliche Constante ist. Anstatt des Multiplicators $\frac{1}{a}$ kann man

Digitized by Google

den Miscellaneis Taurinensibus, T. I. II. Eulern bey, näherte sich aber nachher, veranlaßt durch eine anders angestellte Analysis, der Meynung d'Alemberts. Condorcet, in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1771. de la Place in denselben für 1779 fügten jeder gewisse Einschränkungen der Veränderlichkeit der willkürlichen Functionen bey. Der Abbate de Caluso trat in den Mém. de Turin für 1786 und 1787 größtentheils Condorcet bey. Monge suchte durch geometrische Constructionen in den Turiner Memoiren, T. IV. zu zeigen, daß die willkürlichen Functionen nicht stetig zu seyn brauchen, welches er in den Mém. présentés, T. VII. und IX. noch mehr entwickelte. Die Petersburger Akademie gab im J. 1787 als Preisfrage die Untersuchung über die willkürlichen Functionen auf. Arbogast, damahls Professor zu Colmar, erhielt den Preis. Die Preisschrift ist 1791 zu Petersburg gedruckt, in französischer Sprache, 96 S. 4. stark. Die zunächst gewürdigte, lateinisch abgefaßte, 28 S. ebendas. ist nach Montucla's Angabe von dem Cavaliere Lorgna in Verona. Beide Verfasser pflichten Eulern bey. Die erstere enthält zugleich viele nützliche Erläuterungen über die Gleichungen mit partiellen Differentialen selbst, von welchen manche als Beyspiele angeführt und durch geometrische Constructionen dargestellt sind. — Charles sucht in den Mém. présentés, T. X. darzuthun, daß alle noch so irreguläre und unzusammenhängende Functionen es nur dem Scheine nach sind, weil das Gesetz ihrer Bildung zu sehr zusammengesetzt sey, als daß man es darstellen könnte.

63. Ich wage es kaum, nach solchen angesehenen Analysten, noch etwas über die Streitfrage von meinen Gedanken beyzufügen. Da die Auflösung der Gleichungen mit partiellen Differentialen auf willkürliche Functionen führt, so müssen diese der Gattung nach auch veränderlich seyn können. Dieses vermehrt die Anzahl der veränderlichen Bestimmungen um eine. Sind drey veränderliche Größen, x, y, z, mit einander durch eine

Digitized by Google

willkürliche Function einiger unter ihnen oder aller verbunden, so ist es so gut, als wenn man eine Gleichung zwischen vier veränderlichen Größen t, x, y, z hätte. Diese können sich aber mit einander nicht anders als stetiger Weise verändern. Sind die Veränderungen von t, x, y unendlich klein, so ist es nothwendig die Veränderung von z auch. Es sey z. B. $z = \varphi(ax + by)$, und die Function sey irgend eine Potenz von $ax + by$, so ist es nicht nöthig, den Exponenten dieser Potenz unveränderlich zu nehmen, allein man wird ihn auch nicht plötzlich sich ändern lassen können. Ist er

für $\begin{cases} 1, & 2, & 3, & 4, & \text{u. s. f.} \\ x', & x'', & x''', & x^{IV} & — \\ y', & y'', & y''', & y^{IV} & — \end{cases}$

so muß für die zwischen diesen fallenden Werthe von x und y auch der Exponent der Potenz zwischen die jenen zugehörigen Werthe des Exponenten fallen. Es steht nicht in des Geometers Macht, eine nach einem bestimmten Gesetze angefangene krumme Linie abzubrechen. Was man in der sinnlichen Zeichnung thun kann, ist in der reinen Vorstellung nicht möglich. Eine Linie aus verschiedenartigen Portionen zusammensetzen heißt mehrere volle ständige Linien sich schneiden lassen, und die Segmente zwischen je zwey Durchschnittspuncten zu einem Aggregate verbinden. In der Natur mag es sehr wohl Linien geben, die keine stetige Fortschreitung der Veränderungen, der veränderlichen Größen, auch nicht der Krümmung enthalten; das rührt von äußern Einwirkungen her, die der Geometrie fremd sind. Eine gespannte Saite mag durch äußere Einwirkung die Gestalt zweyer geraden sich schneidenden annehmen; sie mag, wenn jene äußere Kraft entfernt wird, sich in ein Polygon von vielen kleinen geraden Linien umgestalten, und eine solche Gestalt bis zu der Coincidenz mit der geraden durch die Befestigungspuncte behalten, eine solche Figur ist nicht mehr eine rein geometrische. Die ganz willkürlichen Functionen lassen gar nichts über den Zusammenhang der Größen zu gedenken übrig.

Digitized by Google

64. Die Veränderlichkeit der Functionen mag in der Einschaltung in sehr irregulären Fortschreitungen nützlich gebraucht werden können.

65. So wie bey der Integration totaler Differentialgleichungen die Constanten den besondern Bedingungen einer Aufgabe gemäß bestimmt werden, so geschieht dieses auch bey der Bestimmung der willkürlichen Functionen, die in den Integralen der partiellen Differentialgleichung in die Stelle jener Constanten treten. Gewöhnlich kommt es hierbey auf die Integration einer Gleichung mit endlichen Differenzen an. Condorcet hat sich mit dieser Untersuchung viel beschäftigt. Mém. de l'Acad. des Sc. 1770. 1771. 1772. Mémoires présentés, T. VII.

66. Zum ausführlichern Unterrichte dienen die oft angeführten Lehrbücher von Cousin. T. I. Ch. 3. T. II. Ch. 4, 5, 6. Bossut T. II. p. 351 — 434. Lacroix, T. II. p. 476 — 624. auch desselben Traité élémentaire de Calcul diff. et intégral, p. 438 — 458. von nämlich der dritte Theil von Eulers Integralrechnung, worin aber die Benennung, partielle Differentiale, nicht gebraucht ist.

Von la Grange sind drey lehrreiche Abhandlungen über die Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen in den Mémoires de l'Acad. de Berlin 1772, 1779 und 1785. Eine Methode aus vollständigen Gleichungen zwischen zwey veränderlichen und gegebenen Größen durch Wegschaffung einiger Constanten, die als veränderliche behandelt werden, eine ganz allgemeine Gleichung mit willkürlichen Functionen herzuleiten, in eben der Sammlung für 1774, in dem Mémoire sur les intégrales particulieres, Article V. und für 1779 in einem Mém. sur différentes questions d'Analyse, Art. V.

In den Mémoires de l'Acad. des Sc. 1773 ist eine Abhandlung von la Place, und in dem Jahrgange für 1787 eine von Legendre enthalten.

Digitized by Google

Zusatz über die allgemeine Gleichung für Revolutions-Flächen, zu 18.

In dem Artikel, krumme Fläche, 48. ist eine allgemeine Gleichung für alle krumme Flächen, die durch Umdrehung einer Curve um eine Axe entstehen, nach Monge angeführt. Hier füge ich, wegen des davon in 18.) gemachten Gebrauchs den Beweis bey.

Eine krumme Fläche werde durch eine Curve, die sich um ihre Axe dreht, beschrieben. Den Umfang jedes auf diese Axe senkrechten Kreisschnittes kann man sich vorstellen, als den Durchschnitt zweyer Kugelflächen, deren Mittelpuncte auf der Drehungsaxe liegen, weil der Durchschnitt zweyer Kugelflächen immer ein Kreis ist. Es ist der gemeinschaftliche Durchschnitt jeder der beiden Kugelflächen mit einer Ebene, die durch einen der Durchschnittspuncte senkrecht auf die gerade durch ihre Mittelpuncte steht.

Da die Kreislinien auf der krummen Fläche eine stetige Folge bilden, so lasse man die Halbmesser der zugehörigen Kugelflächen und die Coordinaten zu ihren Mittelpuncten ebenfalls in einer stetigen Folge sich verändern, indem jede der Kugelflächen mit der vorhergehenden einen der Kreisumfänge und mit der nachfolgenden den nächsten Kreisumfang giebt. Da die Lage der Axe durch zwey Gleichungen zwischen ihren drey Coordinaten gegeben wird, so kann man zwey derselben wegschaffen, und es ist nun eine Relation zwischen drey veränderlichen Größen vorhanden, nämlich der Ordinate an der Curve, welche der Halbmesser eines Kreisumfanges auf der krummen Fläche ist, dem Halbmesser der diese Fläche schneidenden Kugel und der einen Coordinate zu ihrem Mittelpuncte.

Die Coordinaten zu der krummen Fläche seyn x, y, z, welche zugleich zu der schneidenden Kugelfläche gehören; die Coordinaten zu der Drehungsaxe seyn p, q, r, und die beiden Gleichungen für diese gerade Linie seyn, $p = ar + \alpha$; $q = br + \beta$. Der Halbmesser einer

Digitized by Google

Kugel, deren Mittelpunct in der Axe liegt, sey = u. Die Coordinaten dieses und jedes andern Mittelpunct sind ebenfalls p, q, r. Daher ist $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=u^2$. Denn der Halbmesser der Kugel ist die Diagonale eines rechtwinklichten Parallelepipedum, dessen Seiten $x-p$; $y-q$; $z-r$ sind, welche auch entgegengesetzte Lagen in Absicht auf die hier angenommenen haben können.

Man setze für p und q ihre Werthe, so ist die Gleichung für die Kugelfläche,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2$$
$$-2r[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z] \quad (A)$$
$$+(1+a^2+b^2)r^2-u^2=0.$$

Da der Halbmesser jedes Kreises auf der krummen Fläche durch x, y, z gegeben wird, so vertritt diese Gleichung die Stelle einer unmittelbaren Gleichung zwischen jenem Halbmesser, dem Halbmesser der Kugel, und der Höhe ihres Mittelpunctes über der Ebene der x, y. Die Größe des Halbmessers der Kugel hängt also für jeden Punct der krummen Oberfläche oder jenen Kreisumfang auf derselben von r, das ist, von der Lage ihres Mittelpunctes ab. Daher kann man u als eine Function von r, daher auch $(1+a^2+b^2)r^2-u^2$ als eine Function von r betrachten, oder setzen $(1+a^2+b^2)r^2-u^2=F(r)$. Dadurch wird die Gleichung (A) diese:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2 \quad (B)$$
$$-2r[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z)+F(r)=0.$$

Da zu demselben Kreisumfange auf der krummen Fläche zwey unendlich wenig verschiedene Kugeln gehören, das ist, zwey nächste Höhen, r, ihrer Mittelpuncte über der Ebene der x, y oder p, q, so giebt die Differentiirung einen Werth für eine andre Function von r. Es ist nämlich

$$-2\partial r[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z)+F'(r).\partial r=0$$

wo F' das Functionszeichen in dem Differential von F(r) ist. Es ist also

Digitized by Google

$$2[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z]=F'r.$$

Umgekehrt ist r eine Function von

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z.$$

Daher ist in der Gleichung (B) die Summe der drey Quadrate eine Function eben dieser Größe, das ist $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\varphi[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z]$.

Wenn die Drehungsaxe durch den Anfang der Coordinaten geht, so ist $\alpha=0$, $\beta=0$, und die gefundene Gleichung verwandelt sich in diese,

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+z).$$

Geht die Drehungsaxe durch diejenige der z, so ist (weil $p=0$, $q=0$ ist) auch $a=0$; $b=0$, und $x^2+y^2+z^2=\varphi(z)$, daher x^2+y^2 eine Function von z, und umgekehrt z eine Function von x^2+y^2 ist, d. i. $z=\chi(x^2+y^2)$.

Partitio numerorum, s. Zerlegung der Zahlen.

Pascals Dreyeck und Tabelle, s. arithmetisches Dreyeck.

Pelecoides figura, ertähnliche Figur, besteht aus einem Halbkreise und zwey Quadranten, die ihre convexe Seite der concaven des Halbkreises zukehren, und sich an einem ihrer Endpuncte berühren. Der Jesuit **Bettini** führt sie in seinen Apiariis, Progymnasmate V. VI. nebst andern geometrischen Spielereyen an. Die Figur ist durch Zusetzen und Wegnehmen gleicher Segmente quadrirbar. Kraft hat sie in seiner Geom. sublim. §. 169. angeführt.

Pells Aufgabe ist eine zur unbestimmten Analytik gehörige, die Formel $axx+1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen, wo nur a kein Quadrat oder negativ seyn darf. Pells Auflösung ist aber in manchen Fällen sehr langwierig. Man sehe Eulers Algebra, den Abschnitt von der unbestimmten Analytik, §. 98. ff.

Digitized by Google

Eine sehr kunstreiche Methode enthält desselben Abhandlung, de usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo. Comm. novi Acad. Petrop. T. XI. worin die Kettenbrüche zur Ausziehung der Quadrat-Wurzeln angewandt werden. Euler gebraucht zum Beyspiele die Aufgabe, zwey Zahlen p und q zu finden, so daß $pp = 157\,qq + 1$ sey. Hier ist der kleinste Werth für p eine Zahl von 14 Ziffern, und q eine von 13 Ziffern.

Pell war ein angesehener Mathematiker in England, geb. 1610, gest. 1685. Er hat sich unter anderm mit der unbestimmten Analytik beschäftigt, und gedachte vom Diophantus eine neue Ausgabe zu liefern. In seiner vermehrten und verbesserten Ausgabe von Rahns Algebra, die Brancker aus dem Deutschen übersetzt hatte, kommt vieles über jenen Zweig der Analysis vor, wie man aus dem Auszuge sieht, den Wallis in seiner Algebra, Cap. 57. davon giebt. Dieser nennt den deutschen Verfasser Rhonius. Pell hat auch manches über die Astronomie geschrieben.

Pentadik, ein Zahlensystem, worin alle Zahlen durch Potenzen von 5 und deren Vielfache durch 2, 3, 4 dargestellt werden. Es ist nie in Gebrauch gekommen, es müßte denn bey einem wilden Volke geschehen seyn. Bey den Cereren in Senegambien glaubt man es gefunden zu haben.

Pentaedrum ist von einigen ein Prisma genannt, dessen Grundflächen gleichseitige Dreyecke sind.

Pentagonalzahl ist eine Gattung der Polygonalzahlen, deren Form ist $\frac{3nn-n}{2}$. Schränkt man diese Form nicht blos auf positive Werthe von n ein, wie es zu geschehen pflegt, so sind darunter auch die Zahlen von der Form $\frac{3nn+n}{2}$ begriffen. Euler hat eine be-

Digitized by Google

sondere Abhandlung über die Pentagonalzahlen in dieser erweiterten Bedeutung geliefert: de mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. Acta Acad. Petr., T. IV. P. I. a. a. 1780. Er hat sonderbare Beziehungen dieser Zahlenreihe auf andere ganz fremde Reihen entdeckt.

Die Reihen der Pentagonalzahlen nach beiden Formeln sind

0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.
0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.

Ordnet man diese Zahlen nach ihrer Größe, so entsteht daraus eine ganz irreguläre Reihe:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc.

Diese Zahlen finden sich auch in einer Formel für die Summe aller Theiler einer Zahl, die Einheit und die Zahl selbst mit einbegriffen. Man bezeichne die Zahl durch N, die Summe der Theiler durch $\int N$, so ist

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) + \int(N-15) - \int(N-22) - \text{etc.}$$

Diese Formel hat Euler in den Comm. novis Ac. Petr. T. V. erwiesen. Sie wird so weit fortgesetzt, bis daß, die Zahlen aufhören positiv zu seyn. Trifft man auf ein Glied $\int(N-N)$, so setzt man dafür die Zahl N selbst.

Z. B. Es sey $N = 13$, so ist

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1.$$

das ist, $\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14$.

Es sey $N = 12$, so ist

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0,$$

das ist,

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

Euler hat ferner in den Actis Petr. T. IV. gefunden, daß das Product

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$. etc.

entwickelt die Reihe

$x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} +$ etc.

Digitized by Google

giebt, wo die Exponenten gerade die Pentagonalzahlen nach beiden Formeln sind.

Pentagonum, Pentangulum, eine geradlinichte Figur von fünf Seiten, s. Vieleck.

Pentedecagonum, eine in funfzehn Seiten eingeschlossene geradlinichte Figur.

Perfectus numerus, s. vollständige Zahl.

Pericaustica ist eine Curve, die aus der Caustica oder Brennlinie einer gegebenen Curve für einen strahlenden Punct auf folgende Art entsteht. Der zurückgeworfene Strahl, von dem Zurückwerfungspuncte bis an die Brennlinie genommen, werde auf den verlängerten einfallenden Strahl jenseits der zurückwerfenden Curve getragen, so ist ihr Endpunct in der Pericaustica. Diese ist das Bild der Brennlinie für ein in dem strahlenden Puncte befindliches Auge, wenn die zurückwerfende Linie der Spiegel ist. Jakob Bernoulli hat diese Erzeugungsart einer Curve und ähnliche erdacht. Operum T. I. Nr. 49. Sie ist nicht weiter als für die logarithmische Spirale gebraucht.

Perimeter ist der Umfang einer Figur.

Periode, cyklische, ist eine Verbindung verschiedener Zahlenreihen (Cyklen), deren jede mit 1 anfängt, bis zu ihrer Endzahl fortgeht, und so oft wiederholt wird, bis alle zugleich jede an ihre Endzahl gekommen sind; wobey die Periode sich schließt, und eine neue, der ersten ganz gleiche, wieder anfängt. Auf diese folgen dann die dritte, vierte Periode, u. s. f. ohne Ende.

Z. B. die Zahlenreihen oder Cyklen seyn
I. 1, 2, 3. II. 1, 2. 3, 4, 5. III. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, so entsteht daraus die erste Periode

Digitized by Google

(1)	1.	1.	1	(35)	2.	5.	7.
(2)	2.	2.	2	:	:	:	:
(3)	3	3	3	(105)	3.	5.	7.
:	2	:	:				
(15)	3.	5.	1				
:	:	:	:				

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Ordnungszahlen der Glieder der Periode sind.

1. Die Glieder oder Complexionen einer Periode bestehen aus so vielen Zahlen als Cyklen vorhanden sind. Jede Zahl ist der Überschuß der Ordnungszahl über ein Vielfaches (oder das Einfache) der Endzahl; ist dieser Überschuß $=0$, so wird statt 0 die Endzahl selbst gesetzt.

2. Aus der Ordnungszahl einer Complexion findet man daher sehr leicht die Zahlen in derselben, z. B. die 23ste Complexion in dem gegebenen Exempel ist 2, 3, 6.

3. Aus den Zahlen in einer Complexion die Ordnungszahl zu finden, ist etwas schwer. Die Aufgabe ist aus den Resten, die eine unbekannte Zahl durch zwey, drey oder mehrere gegebene Zahlen dividirt, übrig läßt, die Zahl selbst zu finden. Die Aufgabe gehört unter die unbestimmten. Dieselbe Complexion kommt in jeder Periode vor. Was also unbestimmt bleibt, ist die Ordnungszahl der Periode. In jeder Periode aber wird die Ordnungszahl einer bestimmten Complexion durch diese gegeben. In dem obigen Exempel sieht man, daß der erste Cyklus, 1, 2, 3, fünfmahl wiederholt werden muß, ehe die Endzahl 5 aus dem zweyten Cyklus mit der Endzahl 3 des ersten zusammentrifft, und die partielle Periode beider Cyklen wieder mit 1, 1 anfängt. Diese Periode muß 7 mahl wiederholt werden, ehe die Endzahl 7 des dritten Cyklus 1 ... 7 mit 3, 5 zusammentrifft. Denn die 16te Complexion ist 1, 1, 2; die 31ste ist 1, 1, 3; die 46ste ist 1, 1, 4, u. s. w. immer eine andere, daher auch alle zwischen liegende verschieden sind.

4. Man muß hierbey bemerken, daß die Anzahl der Complexionen in einer Periode nur dann dem Producte

Digitized by Google

der Endzahlen gleich ist, wenn diese Primzahlen sind, oder doch keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn in diesem Falle läßt keine andere Zahl als dieses Product, mit jeder der Endzahlen dividirt, den Rest o oder, welches hier dasselbe ist, die Endzahl selbst. Sonst aber ist die Anzahl der Complexionen in jeder Periode die kleinste Zahl, in welcher alle Endzahlen ohne Rest aufgehen.

Ein Exempel für den ersten Fall wird uns auf die Form der Ordnungszahl leiten.

5. Es sey $N = 15A + a$, und auch $N = 19B + b$, die Werthe von N zu finden. Die Zahlen sind alle ganze, wie hier durchgehends angenommen wird.

Aus der Gleichheit beider Formeln ist

$A = B + \frac{4B + b - a}{15}$. Daher ist $4B + b - a = 15C$, und $B = 3C + \frac{3C - b + a}{4}$. Daraus ferner $3C - b + a = 4D$, und $C = D + \frac{D - a + b}{3}$.

Hieraus $D - a + b = 3E$, und $D = 3E + a - b$, wo für E jede ganze Zahl genommen werden mag. Nun ist rückwärts $C = 4E + a - b$; und $B = 15E + 4(a - b)$. Also ist $N = 15 . 19E + 76a - 75b$. Um den subtractiven Theil in einen additiven zu verwandeln, setze man $15 . 19b - 15 . 19b$ hinzu, so ist $N = 15 . 19(E - b) + 76a + 210b$. Hier ist $76 = 15 . 5 + 1 = 4 . 19$; und $210 = 19 . 11 + 1 = 14 . 15$. Daraus sieht man, wie die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Die Zahl $E - b$ ist willkürlich, und ist $= o$ für die erste Periode.

6. Die Coefficienten von B, C, D in den Brüchen, die ganze Zahlen ausdrucken sollen, sind die Reste, welche man findet, wenn man den Bruch $\frac{19}{15}$ auf die kleinsten Zahlen zu bringen sucht, wo in den successiven

Digitized by Google

Divisionen, ein Divisor zum Dividendus und der vorhergehende Rest zum Divisor gemacht wird.

7. Das berechnete Beyspiel zeigt uns die allgemeinen Formeln für eine Periode von zwey Cyklen. Es sey $N = pA + a$, und $N = qB + b$, so ist sowol

$$N = pqC + (p\alpha + 1) + (q\beta + 1)b,$$

als

$$N = pq.C + mq.a + np.b,$$

wo $p\alpha + 1 = mq$, und $q\beta + 1 = np$ sind, so daß α, β, m, n noch unbestimmt bleiben, aber möglichst klein genommen werden müssen. Denn die Zahl N läßt solchergestalt, durch p dividirt, den Rest a, durch q den Rest b. Die Forderungen sind zwar fast dieselben wie in der Aufgabe selbst, aber dadurch einfacher, daß statt der unbestimmten a und b hier die Einheit gekommen ist.

8. Exempel. Es soll seyn $N = 19A + a = 28B + b$, so ist $19\alpha + 1 = 28m$, und $28\beta + 1 = 19n$. Die erstere Gleichung giebt $9m - 1 = 19\gamma$; $\gamma + 1 = 9\delta$; $\gamma = 8$, und daher $m = 17$. Die andere Gleichung giebt $9\beta + 1 = 19\gamma$; $\gamma - 1 = 9\delta$; $\gamma = 1$; $\beta = 2$, und $n = 3$. Also ist

$$N = 19.28\,C + 17.28\,a + 3.19\,b.$$

Die Periode dieser beiden Cyklen ist die des Mondscyklus und des Sonnencyklus in der Chronologie, welche die Victorische oder Dionysische genannt wird. Sie beträgt 19.28, das ist, 532 Jahre.

9. Wenn das Aggregat $mqa + npb$ mehr als eine Periode beträgt, so wird das Product pq so oft davon weggeworfen, als es angeht, um die Ordnungszahl in einer einzelnen Periode zu erhalten, oder in der ersten schlechthin. Diese Bemerkung gilt auch für Perioden von mehreren Cyklen.

10. Es seyn drey Cyklen mit einander verbunden; die Endzahlen seyn p, q, r; die Divisionsreste oder die Zahlen einer Complexion seyn a, b, c, so daß

Digitized by Google

$N = pA + a = qB + b = rC + c$ ist. Es soll die daraus zusammengesetzte Form von N gefunden werden.

Wenn p, q, r keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so besteht eine Periode aus pqr Gliedern oder Complexionen. Nach der Analogie der Auflösung für zwey Cyklen ist

$N = pqrD + (p\alpha + 1)a + (q\beta + 1)b + (r\gamma + 1)c$,

und

$N = pqrD + lqr.a + mpr.b + npq.c$,

wo $lqr = p\alpha + 1$; $mpr = q\beta + 1$; und $npq = r\gamma + 1$ ist. Denn bey diesen Formen der Coefficienten von a, b, c läßt N durch p dividirt den Rest a, durch q den Rest b, durch r den Rest c.

11. Exempel. Es sey $N = 15A + a = 19B + b = 28C + c$. Es muß nun seyn $15\alpha + 1 = 532l$; $19\beta + 1 = 420m$; $28\gamma + 1 = 285n$.

Die erste Gleichung giebt $\alpha = 35l + \frac{7l - 1}{15}$;

also $7l - 1 = 15\delta$; daher $\frac{\delta + 1}{7}$ eine ganze Zahl seyn muß. Dieses giebt sogleich $\delta = 6$; wodurch $l = 13$, $lqr = 6916$, welche Zahl durch 15 dividirt zum Reste 1 läßt, wie es seyn muß.

Die zweyte Gleichung giebt $2m - 1 = 19\delta$, also $\delta = 1$; $m = 10$, und $mpr = 4200$, welche durch 19 dividirt zum Reste 1 giebt.

Die dritte Gleichung giebt $5n - 1 = 28\delta$, oder $5n = 28\delta + 1$; daher $3\delta + 1 = 5\varepsilon$, und $\delta = 3$, also $n = 17$, und $npq = 4845$. Also ist

$N = 15.19.28D + 6916a + 4200b + 4845c$.

Diese Aufgabe kommt in der Chronologie vor, nämlich aus den drey Kennzeichen eines Jahrs, der Indiction, der güldnen Zahl und der Zahl des Sonnencyklus (eigentlicher Wochencyklus) die Ordnungszahl desselben in der Julianischen Periode zu finden. Der

Digitized by Google

Cyklus der Indictionen hält 15 Jahre, der Mondscyklus 19, der Sonnencyklus 28; die ganze Periode 7980 Jahre.

12. Man sieht schon hinlänglich, wie für Perioden von mehr als drey Cyklen zu verfahren ist. Es ist für vier Cyklen, deren Endzahlen p, q, r, s sind,

$$N = pqrsE + (p\alpha + 1)a + (p\beta + 1)b + (r\gamma + 1)c + (s\delta + 1)d,$$

und zugleich

$$N = pqrsE + iqrs.a + lprs.b + mpqs.c + npqr.d.$$

13. Wenn unter den Endzahlen p, q, r, s, etc. einige einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so läßt sich die vorher angewandte Methode nicht gebrauchen. Denn es sey z. B. $p = 14$; $q = 21$, so kann man nicht setzen $p\alpha + 1 = mq$, das ist, $14\alpha + 1 = 21m$. Denn dieses gäbe, daß die Einheit durch den gemeinschaftlichen Theiler von 14 und 21 oder überhaupt durch den von p und q theilbar seyn sollte. Die Form für die Ordnungszahlen in Perioden von dieser Beschaffenheit ist eine andere als die für Perioden, in welchen alle Endzahlen Primzahlen unter sich sind.

14. Es sey $N = pA + a = qB + b$, wo p und q einen gemeinschaftlichen Factor d haben sollen. Ist $q = mp + n$, so hat n denselben Factor wie p und q haben, oder ist auch dieser selbst. Nun ist $pA = mpB + nB + b - a$. Da p und n sich durch d theilen lassen, so ist auch $b - a$ durch d theilbar, so daß d und b nicht ganz unabhängig von einander sind. Übrigens ist das Verfahren, N durch die Reste a und b darzustellen, eben dasselbe, wie in (5.).

15. Exempel. Es sey $N = 14A + a = 21B + b$, so ist $7B + b - a = 14C$. Hieraus ist $21B = 42C + 3(a - b)$, und $N = 42C + 3a - 2b$, oder, wenn man von dem unbestimmten Vielfachen $42C$

Digitized by Google

einmahl 42 b wegnimmt, und zu — 2 b setzt, N = 40 C + 3 a + 40 b. Diese Formel durch 14 dividirt, giebt zum Reste 3 a + 12 b = 15 a + 12 (b — a). Da b — a sich durch 7 theilen lassen muß, so ist der Rest von der Division der Zahl N durch 14 blos a. Dieselbe Zahl durch 21 dividirt, giebt zum ersten Reste 3 a + 19 b = 3 (a — b) + 22 b. Hier ist 3 (a — b) ein Vielfaches von 21 oder 21 selbst, also läßt die Zahl N durch 21 getheilt den Rest b.

16. Exempel. Es sey N = 12 A + a = 45 B + b, so ist a — b oder b — a ein Vielfaches von 3. Es sey b — a = 3 c, so ist 4 A = 15 B + c, und 3 B + c = 4 C. Ferner C — c = 3 D. Folglich 4 C = 12 D + 4 c; 3 B = 12 D + 3 c; also N = 180 D + 45 c + b = 180 D — 15 a + 16 b, oder N = 180 D + 165 a + 16 b. Diese Formel durch 12 dividirt giebt zum ersten Reste 9 a + 4 b = 13 a + 4 (b — a), zum zweyten a. Eben dieselbe giebt durch 45 dividirt zum Reste 30 a + 16 b = 30 (a — b) + 46 b, das ist, b.

17. Wenn drey Cyklen mit einander zu verbinden sind, deren Endzahlen gemeinschaftliche Divisoren haben, so suche man erstlich für zwey derselben den allgemeinen Ausdruck einer Complexion, betrachte diesen als für einen einfachen Cyklus gehörig, und suche dann für diesen und den dritten Cyklus die Form der Complexion. Auf diese Art verfahre man auch für vier und mehrere Cyklen.

18. Exempel. Es sey N = 14 A + a = 21 B + b = 30 C + c. Die Reste a, b, c hängen hier von einander ab, so daß a — b durch 7; a — c durch 2; b — c durch 3 theilbar ist. Die beiden ersten Formeln geben N = 42 D + 3 a + 40 b. Es sey 3 a + 40 b = d, also N = 42 D + d, so ist c — d durch 6 theilbar. Man setze c — d = 6 e. Da 30 C + c = 42 D + d ist, so ist 12 D + d — c = 30 E, das ist 2 D — e = 5 E. Hieraus ist E + e = 2 F, und E = 2 F — e. Ferner D = 5 F — 2 e; also N = 210 F — 84 e + d, oder N = 210 F + 15 d — 14 c, oder N = 210 F + 15 d + 196 c.

Digitized by Google

Für d dessen Werth, 3 a + 40 b, gesetzt, ist
N = 210 F + 45 a + 600 b + 196 c, oder
N = 210 F + 45 a + 180 b + 196 c, wenn nämlich 2.210 b zu dem Vielfachen 210 F genommen werden. Der Factor 210 ist die kleinste Zahl, worin 14, 21, 30 aufgehen.

Die Zahl 210 F + 45 a + 180 b + 196 c durch 14 dividirt läßt zum Reste, 3 a + 12 b oder 15 a + 12 (b — a). Da b — a durch 7 theilbar ist, so ist 12 (b — a) durch 14 theilbar, und der Rest durch 14 ist a, wie verlangt wird.

Wird eben diese Zahl durch 21 dividirt, so ist der Rest 3 a + 12 b + 7 c = 22 b + 3 a — 10 b + 7 c = 22 b + 3 (a — b) + 7 (c — b). Da a — b durch 7, und c — b durch 3 theilbar ist, so ist der Rest bey der Division durch 21 = b.

Eben diese Zahl durch 30 dividirt giebt zum Reste 15 a + 16 c = 15 (a — c) + 31 c. Da a — c durch 2 theilbar ist, so ist der Rest = c.

19. Aufgabe. Es soll eine Zahl N gefunden werden, die durch 2, 3, 5, 6, 9, 10 getheilt, folgeweise die Reste 1, 2, 4, 5, 9 gebe, und durch 11 getheilt keinen Rest lasse.

Es ist also

N = (2 a + 1) 11; N = (3 b + 1) 11.
N = (5 c + 4) 11; N = (6 d + 1) 11.
N = (9 e + 7) 11; N = (10 f + 9) 11.

Oder N ist ein Product aus der Zahl 11 in eine Zahl z, welche jede der Formen,

2 a + 1; 3 b + 1; 5 c + 4;
6 d + 1; 9 e + 7; 10 f + 9,

hat.

Damit die erste dieser Formen Statt finde, müssen b, e gerade Zahlen seyn, c aber eine ungerade. Man setze nun 2 b, 2 c + 1, 2 e statt b, c, e, so hat z die Formen

2 a + 1; 6 b + 1; 10 c + 9; 18 e + 7.

Digitized by Google

Die erste ist in den übrigen Formen, die zweyte in der vierten enthalten. Folglich bleiben blos die beiden letzten, $10c + 9$ und $18e + 7$, so daß seyn muß

$$10c + 9 = 18e + 7.$$

Daraus folgt $8e - 2 = 10f$, oder $4e = 5f + 1$. Der kleinste Werth von f ist $= 3$. Dieses giebt $e = 4$, und $z = 79$, also $N = 79.11 = 869$. Dieses ist der Werth von N in der ersten Periode von Cyklen, deren Endzahlen 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11 sind. Der Werth in jeder andern Periode ist das kleinste Product, worin diese Endzahlen enthalten sind, nebst der Zahl 869. Jenes Product ist 2. 3. 5. 3. 11 oder 990. Oder man suche die Form für f, wodurch $5f + 1 = 4e$ wird. Diese ist $f = 4g - 1$. Daher $e = 5g - 1$, und $z = 90g - 11$, oder $z = 90g + 79$, und daher $N = 990g + 869$.

20. In dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von Bernoulli und Hindenburg, 3tes St. 1786 ist von letzterm eine Abhandlung: Verbindungsgesetz cyklischer Perioden; Natur und Eigenschaften derselben; ihr Gebrauch in der diophanteischen oder unbestimmten Analytik. Daraus ein starker Auszug in Lorenz Lehrbegriff der Mathematik, I. Th. 2te Abth. S. 406 — 442. Die in diesem Artikel angewandte Methode hat wenig mit jener gemein.

21. Von der Aufgabe über die Julianische Periode sehe man Kästners angewandte Mathematik in der Chronologie, §. 46. das Verfahren, welches Wallis zur Auflösung derselben angiebt (Operum, T. II. p. 451 — 455) ist in der That empirisch. Wallis sagt, (l. c. p. 236.) daß er die Untersuchungen aus der diophanteischen Algebra nicht sehr liebe.

Clausberg kommt in seiner demonstrativen Rechenkunst, §. 1366. auf die Frage, diejenige Zahl zu finden, welche in 7 aufgehet, und in 15 dividirt, 10 übrig läßt, welches er einen harten Knoten nennt. Doch giebt er in §. 1493 die Auflösung einer solchen Aufgabe in einem Exempel.

Digitized by Google

Peripherie (Perimeter, circumferentia, ambitus) ist der Umfang einer Figur, einer geradlinichten oder krummlinichten. Im Griechischen wird das Wort auch für Kreisbogen gebraucht, weil in dieser Sprache das Wort τοξον, ein Bogen zum Schießen, nicht zum Kunstworte gemacht ist. Euclides L. I. def. 20. L. III. probl. 1. Cleomedes in seiner sphärischen Astronomie, I B. gebraucht auch den Ausdruck, περιφερια απο του δρακοντος επι καρκινου, die Peripherie vom Drachen bis zum Krebse.

Permutatio, s. Versetzung.

Perpendikel ist eine gerade Linie, welche auf eine andere senkrecht steht, d. i. auf beiden Seiten gleiche Winkel mit ihr macht. Wie sie gezogen wird, lehret jedes Elementarbuch.

Perpendikel auf eine krumme Linie, s. Normale.

Perspectiv ist die Theorie von der Entwerfung eines Gegenstandes auf einer gegebenen Fläche durch gerade Linien, welche von jedem Puncte desselben nach einem gegebenen Puncte gezogen werden. Die Durchschnittspuncte dieser Linien mit der Fläche geben auf dieser eine Abbildung des Gegenstandes. Die Fläche ist am gewöhnlichsten eine ebene. Man gedenke sie sich als eine Glastafel, durch welche man den Gegenstand betrachtete, und auf welcher man die Puncte bemerkte, wo die zugehörigen Puncte des Gegenstandes erscheinen.

1. Die Perspectiv ist ein Theil der Lehre von den Projectionen, zu welcher erstlich noch der Fall gehört, da die gezogenen geraden einander parallel sind. Ferner begreift diese noch verschiedene Anwendungen in der Astronomie, und in der Geographie wegen der Zeichnung einiger Gattungen von Landcharten.

2. Die Perspectiv pflegt fast durchgehends zur angewandten Mathematik, und zwar zur Optik, gerechnet zu werden. Doch hat Kästner sie schon seinen Anfangsgründen der Geometrie angehängt. In der That, so

Digitized by Google

weit sie mathematisch, nicht technisch ist, beruht sie ganz und gar auf der Elementar-Geometrie. Hausen hat auch schon in der Vorrede zu seinen Elementis Matheseos bemerkt, daß die Perspectiv nichts anders als eine Geometrie der Projectionen ist. Sie entlehne nichts aus der Optik, als die geradlinichte Richtung des Lichts. Aber auch dieses ist nicht nöthig, weil man die Linien, die von dem Gegenstande nach einem fixen Puncte gezogen werden, sehr wol als bloße Linien betrachten kann, und diesen fixen Punct blos als einen Punct, nicht als ein Auge.

3. Sie ist dem Zeichner, vorzüglich dem architektonischen, und dem Theatermahler sehr nöthig. Doch müssen diese Künstler noch verschiedenes, was die Geometrie nicht lehrt, beobachten, wenn die Täuschung möglichst vollkommen seyn soll. Sie müssen die Bestimmtheit der Umrisse gehörig schwächen, so wie die Gegenstände entfernter seyn sollen; auch muß die scheinbare Helligkeit abnehmen; die Farben der Gegenstände und der Luft selbst, welche durch den weitern Abstand eine Veränderung leiden, müssen diesem gemäß gehalten werden.

4. Es kann selbst eine Abweichung von den Vorschriften der Geometrie zur mehrern Täuschung erforderlich seyn. Wir beurtheilen die Größe wirklicher Gegenstände oft nicht nach den Gesichtswinkeln, z. B. die Fenster und Schäfte an einem langen Gebäude; in der Zeichnung aber werden wir allerdings sie nach der wirklichen Länge und Breite, welche sie darauf erhalten, beurtheilen. Dieses mag auch bisweilen der Fall in der Theatermahlerey seyn.

5. Über die Perspectiv ist sehr viel geschrieben, weil ihre Gründe nicht weit herzuholen sind. Die meisten Anweisungen beschäftigen sich mit besondern Fällen. Hier ist die Absicht, eine allgemeine Theorie der Perspectiv zu geben, woraus die besondern Fälle und Vortheile sich herleiten lassen mögen. Es kommt hier nur auf zwey Aufgaben an: erstlich durch einen perspectivisch gegebenen Punct die Projection einer gegebenen geraden Linie zu

Digitized by Google

ziehen; zweytens auf dieser die Projection einer gegebenen Länge abzuschneiden. Die geraden Linien, welche abgebildet werden, mögen im Raume jede Lage haben. — Die Entwerfungsfläche sey eine Ebene,

6. Die Ebene der beiden geraden AB, AC (Fig. 145.) ist die Tafel, worauf die Projection geschieht. Sie sey zuerst senkrecht auf die Ebene der DE, EF, welche die Grundebene (Fundamentalebene) heißt. Der Durchschnitt AB beider Ebenen heißt die Grundlinie. Jede auf die Tafel senkrechte Ebene kann zur Grundebene dienen, so fern die zu entwerfenden Puncte und Linien darauf liegen. Der Punct O vor der Tafel sey derjenige, nach welchem die Entwerfungslinien gezogen werden. Er heißt der Gesichtspunct oder das Auge. Die Höhe desselben über der Grundebene ist OS, und der senkrechte Abstand von der Tafel ist OP. Der Punct P, wo die senkrechte OP die Tafel trifft, heißt der Augenpunct. Der Punct S auf der Grundebene kann der Grundpunct heißen. Die Ebene POS schneide die Tafel in PQ, die Grundebene in QS. Sie heißt die Verticalebene, nämlich vorzugsweise. Da sie auf die Tafel und die Grundebene senkrecht steht, so steht der Durchschnitt dieser beiden, AB, auf jene senkrecht (Ebene, 22.), das ist auf PQ und QS. Durch P werde mit AB die parallele GH gezogen. Diese heißt die Horizontallinie, und die Ebene durch O und GH die Horizontalebene, beides vorzugsweise.

7. Aufgabe. Das Bild einer horizontalen (der Grundebene parallelen) geraden Linie zu entwerfen.

Es sey der Punct L auf der Tafel gegeben, wo die horizontale dieselbe trifft, und der Winkel A, welchen sie mit der Verticalfläche macht. Die Tafel ist in Fig. 146. vorgestellt, auf welcher P der Augenpunct, GH die Horizontallinie, L der Punct ist, wo die gegebene gerade die Tafel trifft. Dieser Punct wird durch seinen Abstand von der Verticalebene und der durch das Auge horizontalen Ebene gegeben, das ist, wenn ALB die durch L horizontale, und PQ die darauf durch P

Digitized by Google

senkrechte ist, durch LQ und PQ. Auf der PQ nehme man PO dem Abstande des Auges von der Tafel gleich, und auf GH die PT gleich der Tangente des Winkels A für PO als Halbmesser, und ziehe LT, so ist diese LT das Bild oder die Projection der ganzen unendlichen Linie von L an jenseits der Tafel.

Denn das Bild einer geraden Linie überhaupt ist der Durchschnitt der durch das Auge und die gerade gelegten Ebene mit der Tafel. Nun sey Ll (Fig. 145.) die gegebene horizontale, welche die Tafel in L trifft. Durch das Auge O ziehe man Oo parallel mit Ll, so ist die Ebene der beiden parallelen diejenige, in welcher alle geraden, die von den Puncten der Ll nach O gezogen werden mögen, liegen. Ihr Durchschnitt mit der Tafel ist LT, die gerade zwischen den Puncten L und T, worin Ll und Oo die Tafel treffen. Der Punct T liegt in der horizontalen Ebene durch O, also auf der horizontalen GH. Es sey Lk senkrecht auf die Tafel in L, so ist der Winkel KLl die Abweichung der Ll von der Verticalfläche. Da die OP der Lk parallel ist (Ebene, 10.), und OT der Ll, so ist der W. POT = KLl (Ebene, 13.), und PT die Tangente des Winkels POT oder KLl für OP als Halbmesser. Die gerade LT ist das Bild der ganzen unendlichen Ll von L an, weil jede gerade, die von O nach einem Puncte der Ll gezogen wird, zwischen L und T die Tafel trifft, so daß der Punct T selbst das Bild eines unendlich entfernten Punctes ist.

8. Die Länge der Tangente PT kann man aus den trigonometrischen Tafeln nehmen. Man gebe der PO tausend Theile, so findet man PT unmittelbar aus ihnen, wenn man die vier letzten Ziffern wegläßt. Oder man findet PT durch eine Construction, indem man mit dem Halbmesser PO einen Quadranten beschreibt, und an diesem aus den Winkeln in der Grundzeichnung die Tangenten bestimmt. Oder der Punct T wird aus dem Grundrisse des Gegenstandes gefunden.

Digitized by Google

Trägt man die Tangenten der Winkel von 5 zu 5 Graden auf beiden Seiten von dem Augenpuncte auf die Horizontallinie, so hat man einen perspectivischen Winkelmesser, durch dessen Hülfe man die Projectionen nach ihren scheinbaren Winkeln leicht ziehen kann.

9. Der Punct T ist der Vereinigungspunct der Projectionen aller mit Ll, das ist, mit OT parallelen. Denn der Punct L mag in Absicht der Verticalebene und der Horizontalebene, welche Lage es sey, haben, so bleibt die Lage von Oo und des Punctes T dieselbe.

Die Horizontallinie GH ist der geometrische Ort der Vereinigungspuncte der Projectionen von allen Linien, die mit der Grundebene und unter sich parallel sind. Sie ist die Gränzlinie für das Bild der ganzen unendlichen Ebene.

Die Vereinigungspuncte, wie T, welche auch außerhalb der Horizontallinie, für geneigte Linien, liegen können, heißen zufällige Puncte, in Beziehung auf den Augenpunct, welcher in dieser Rücksicht der Hauptpunct heißt.

10. Es erhellt nun, wie man an einen gegebenen Punct der Projection einer geraden die Projection eines gegebenen Winkels zeichnen könne. — Der gegebene Winkel sey = A. Man zerlege ihn in die beiden B + C oder B — C, wo der Winkel B der Abweichungswinkel der gegebenen geraden Linie ist. In dem erstern Falle trägt man von dem Augenpuncte nach der entgegengesetzten Seite von derjenigen, wohin die gegebene Linie abweicht, auf der Horizontallinie die Tangente des Winkels C; in dem andern Falle nach derselben Seite hin, und zieht nach dem Endpuncte der Tangente von dem gegebenen Puncte eine gerade, so macht diese mit der gegebenen die Projection des gegebenen Winkels.

11. Aufgabe. Auf der Projection einer geraden Linie einen Theil abzuschneiden, dem eine gegebene Länge auf dieser zugehöre.

Digitized by Google

I. Es sey LT (Fig. 146.) die Projection und auf derselben von L aus ein Stück LN zu nehmen, welches die Projection einer Länge LM sey. Nun trage man auf der horizontalen ALB diese LM; nehme auf GH die PU = tang (45° — ½A), für PO als Halbmesser, wenn A der Abweichungswinkel für LT ist, ziehe MU, welche LT in N schneide, so ist LN der LM perspectivisch gleich.

Denn es soll LMN die Projection eines gleichschenkligen Dreyecks seyn, worin die Winkel bey M und N gleich sind. Da in diesem der Winkel L = 90° — A ist, so ist M = 45° + ½A, und die Abweichung der MN = 45° — ½A nach der Gegend von AG. Daher ist PU = der Tangente von 45° — ½A. Umgekehrt, wenn PU = tang (45° — ½A) und PT = tang A ist, so ist LNM das Bild eines gleichschenkligen Dreyecks, worin LN = LM ist.

II. Oder man nehme TU gleich der Secante des Abweichungswinkels A, für den Halbmesser PO, und ziehe UM. Denn es sey in Fig. 145. LM die gegebene Länge. Zieht man OM, welche LT in N schneidet, so ist LN die Projection von LM. Es ist aber OT in dem bei P rechtwinkligen Dreyeck OPT die Secante von POT oder A für den Halbmesser OP. Nimmt man also in Fig. 146. die TU gleich der Secante des Winkels A für denselben Halbmesser, und zieht UM, so wird die TL in N nach dem Verhältnisse TU:LM eingetheilt, eben so wie in Fig. 145. durch die OM in der Ebene der beiden Parallelen Oo und LM.

III. Auf der Projection LT soll von N aus ein Stück Nn getragen werden, welches einer gegebenen Mm zugehöre.

Man ziehe erstlich durch N und U, nach der Vorschrift I. oder II. die gerade UNM, welche AB in M schneide. Von M nehme man Mm der gegebenen Länge gleich und ziehe Um, welche LT in n schneide, so ist Nn die verlangte Länge auf LT.

Digitized by Google

12. Es ist sec. A — tang A = tang (45° — ½ A), zufolge Goniometrie, 48, das ist TU — PT = PU.

13. Wenn die abzubildenden Linien senkrecht auf die Tafel sind, so ist PT = o, PU = o, und TU = PO. Diese Linien laufen alle in dem Augenpuncte P zusammen. Es ist nun LQ der senkrechte Abstand des Punctes N von der Verticalfläche und LM der senkrechte Abstand von der Tafel, wie in der Zeichnung Fig. 147. Der Winkel A ist = o, und PLM ist die Projection eines rechten Winkels; die Winkel M, N sind Projectionen eines halben rechten.

14. Dieses ist die gewöhnlichste Methode zu perspectivischen Zeichnungen, wo die Abstände jedes Punctes von der Verticalfläche und der Tafel aus einem Grundrisse genommen werden. Die Projection einer geraden Linie wird durch zwey Puncte, wie hier N, bestimmt. In denen Fällen, wo der Punct T weit von P entfernt liegt, das ist, wo die geraden Linien einen großen Winkel mit der Verticalfläche machen, ist dieses Verfahren das leichteste, wenn man sich nicht etwa der Rechnung bedienen will. Hingegen kann die Methode der Vereinigungspuncte wieder sehr dienlich seyn, wenn der eine gegebene Punct der abzubildenden Linie sehr weit entfernt liegt.

15. Durch N (Fig. 147.) ziehe man Nn parallel mit LQ, so ist QLNn die Projection eines Rechtecks, dessen Seiten LQ, LM sind.

Denn die gerade Nn, die unbestimmt verlängerte, ist parallel mit der Grundebene, da sie mit der AB in derselben parallel ist; sie schneidet also die gerade, welche der Durchschnitt der Grundebene und der durch das Auge und Nn gelegten Ebene ist, nicht, und ist ihr parallel, da beide in einer Ebene liegen. Diese Durchschnittslinie und die AB, welche der Nn parallel sind, sind einander parallel (Ebene, 12.). Da LN, Qn Projectionen von zwey auf die Tafel senkrechten sind, so ist LQnN die Projection eines Rechtecks.

Digitized by Google

Nimmt man LM = LQ, so wird QLNn die Abbildung eines Quadrats, in welchem man auf QP die Verkürzungen nach der Tiefe, senkrecht auf die Tafel, und auf Nn nach der Breite, parallel mit der Grundlinie, hat, woraus die Zeichnung eines perspectivischen Maßstabes nach diesen Richtungen sich ergiebt.

16. Hieraus ergiebt sich, wie man für jede der Tafel parallele und horizontale ihre Projection, und aus der perspectivischen Größe die wahre angeben könne.

17. Der Punct O heißt der Distanzpunct, weil PO dem Abstande des Auges von der Tafel gleich ist. Er wird auf die eine oder die andere Seite von P getragen, auf die entgegengesetzte derjenigen, nach welcher M von PQ ab liegt. Die Projection LN pflegt die perspectivische Vertiefung des Punctes N genannt zu werden; besser heißt sie die perspectivische Entfernung von der Tafel, so wie Nn dieselbe von der Verticalebene.

18. Die Projection einer auf die Grundebene senkrechten ist auf die Grundlinie senkrecht. — Denn die Ebene durch jene und das Auge ist senkrecht auf die Grundebene. Da die Tafel auch darauf senkrecht ist, so ist der Durchschnitt der Tafel und jener Ebene, das ist die Projection der senkrechten auf die Ebene, und also auch auf die Grundlinie senkrecht. Ebene, 22.

19. Aufgabe. Durch die Projection eines gegebenen Puncts der Grundfläche die Projection einer senkrechten von gegebener Länge zu ziehen.

Die Projection des Punctes sey N, (Fig. 148.), welcher aus seinem Abstande von der Vertical- und Fundamentalebene gefunden ist. Man ziehe durch N und den Augenpunct P die gerade PND bis an die Grundlinie in D. In D errichte man auf AB die senkrechte DE, und mache DE von der gegebenen Länge, ziehe PE, und dann durch N die mit DE parallele NM bis an PE, so ist MN die verlangte Projection.

Digitized by Google

Denn die geraden PD, PE sind parallellen, so wie DE und MN, also ist DEMN die Projection eines Rechtecks. Daher ist die gerade, wovon NM die Projection ist, der DE gleich. Da DE auf der Tafel selbst befindlich ist, so hat sie ihre eigene Länge unverändert, und es ist also MN die verlangte Projection.

20. Anstatt des Augenpunctes kann man jeden Punct der Horizontallinie nehmen, da die Linien, welche nach einem Puncte derselben gezogen werden, horizontale parallelen sind. Dieses ist bequem, um mittelst derselben senkrechten, wie DE, mehrere Höhen über verschiedenen Puncten zu errichten.

21. Wenn der Punct, auf welchem die senkrechte errichtet werden soll, nicht in der angenommenen Grundfläche liegt, so muß man AB in demjenigen Abstande von GH legen, welcher der Tiefe des Punctes unter der Horizontalebene gleich ist. — Oder man nimmt DE um so viel größer oder kleiner als der Punct über der Grundfläche oder darunter liegt. Wenn n die Projection des gegebenen Punctes ist, so bestimme man zuerst den Grundpunct N desselben auf der angenommenen Grundfläche, d. i. den senkrecht unter jenem liegenden Punct. Dann ziehe man PN und DE, nehme Dd der Höhe des Punctes über der Grundfläche gleich, (in dem entgegengesetzten Falle unterhalb D), ziehe Pd, welche NM in n schneidet, so ist n die Projection des gegebenen Punctes. Ist dE die Länge der darauf senkrechten, so giebt PE auf NM den Punct M, und dadurch die Projection nM der gegebenen senkrechten.

22. Aufgabe. Die Projection einer gegen die Grundfläche geneigten geraden zu zeichnen.

Die Neigungsebene der geraden mache mit der Verticalebene den Winkel A, und die gerade in derselben mit der Grundebene den Winkel B. Nun sey, Fig. 149. GH die Horizontallinie, P der Augenpunct, PO der Abstand des Auges von der Tafel, POT der Ab-

Digitized by Google

weichungswinkel der Neigungsebene nach BH hin, TV die Tangente des Neigungswinkels für den Halbmesser OT, so daß VOT in der auf die Ebene der Zeichnung senkrechten Ebene der Neigungswinkel ist. Der Punct L sey derjenige, in welchem die gegebene gerade die Tafel trifft. Man ziehe LV, so ist diese die Projection der gegebenen geraden Linie.

Der Beweis ergiebt sich durch Betrachtung der Fig. 145. In dieser ist LR die gegebene gerade, die Neigungsebene ist die Ebene der beiden geraden LR, LM, so daß KLM = A; MLR = B ist. Es ist KL auf die Tafel in der Grundebene senkrecht. Es sey, wie schon oben geschehen ist, OP parallel mit LK; OT parallel mit LM, und nun noch Ov parallel mit LR, so ist der W. POT = KLM, und W. oOv = MLR; die Oo begegne der Tafel in T, die Ov in V. Da die Ebene des Winkels oVv senkrecht auf die Grundebene ist, weil sie der Ebene MLR parallel ist, und die Tafel auch senkrecht auf die Grundebene steht, so ist die Durchschnittslinie TV senkrecht auf die Horizontalebene, das ist, auf PT und TO. In dem bey P rechtwinkligen Dreyeck OPT ist PT = tang POT = tang A, und OT = sec A. In dem bey T rechtwinkligen Dreyeck VTO ist TV = TO. tang TOV = sec A. tang B. Nun seyn P, T, V, L in Fig. 149. dieselben Puncte, wie die gleichnamigen in der Tafel Fig. 145. so ist LV dort dieselbe Linie wie hier, und in derselben Lage. Es ist aber LV in Fig. 145 die Projection der unendlichen Linie LR, eben so wie es von LT in Beziehung auf LM erwiesen ist. Also ist LV die Projection der geraden, deren Abweichung A, und Neigung B ist.

23. Aufgabe. Auf der Projection einer geneigten geraden Linie eine Länge abzuschneiden, die einem gegebenen Stücke dieser zugehöre.

Man trage die TO (Fig. 149.) auf der Horizontallinie von T nach U, ziehe UV, mit dieser durch L die parallele LR. Auf dieser nehme man LR gleich

Digitized by Google

der gegebenen Länge, ziehe UR, welche LV in N schneide, so ist LN die Projection einer der LR gleichen Länge.

Der Beweis ist derselbe wie in (11. II.).

24. Die Linie UV oder OV (Fig. 145.) ist = sec A. sec B.

25. Man kann den Linien VU, LR jede andere, nur parallele, Lage geben. Dadurch wird der Durchschnittspunct der beiden LV, UR nicht geändert. Jene Linien müssen zugleich die hier bestimmte Länge behalten.

26. Beyspiele von geneigten Linien sind die Dachkanten in perspectivischen Bauriſſen; in Dachverbindungen und andern Zusammensetzungen von Zimmerhölzern in Gebäuden und Maschinen; auch die nach der Sonne oder dem Monde laufenden Linien, wenn diese Körper auf der Zeichnung erscheinen sollen. Es sey POT (Fig. 149.) die Abweichung der Sonne von der Verticalfläche, und TUV die Höhe der Sonne über dem Horizont, wo TU = TO ist, so ist V das Bild des Mittelpunctes der Sonne, und T der Punct des Horizonts, über welchem sie senkrecht steht, oder der Durchschnitt mit dem Verticalkreise der Sonne. Die Schattenebene geht durch VT. Will man den Schatten einer senkrechten Linie zeichnen, so hat man durch ihren Grundpunct in der Grundebene und durch T eine gerade zu ziehen, dann durch ihren obersten Punct und durch V; beider Durchschnitt giebt den Endpunct des Schattens. Der Punct T ist das Bild des als unendlich weit entfernten Punctes auf der Horizontalebene, über welchem die Sonne in einer senkrechten steht.

27. Wenn die ebenen Figuren, deren Projection verlangt wird, in einer gegen die Tafel geneigten Ebene liegen, so kann man sich zur Entwerfung der einzelnen darin befindlichen Linien der Vorschrift in (13. 14.) bedienen; allein es ist bequemer, die Ebene der Figuren selbst zur Grundebene zu nehmen. Die Gränzlinie der

Digitized by Google

selben tritt nun an die Stelle der Horizontallinie für eine auf die Tafel senkrechte Grundebene.

28. Es stelle die Ebene der Zeichnung Fig. 150. die Neigungsebene der Tafel und der Grundebene, in der durch das Auge gehenden Lage vor, das ist, eine auf ihre Durchschnittslinie senkrecht durch das Auge gestellte Ebene. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Tafel ist AB, mit der Grundebene CD, der Winkel der Tafel und der Grundebene ist AEC. Der Ort des Auges sey O. Man ziehe OP senkrecht auf AB, so steht OP senkrecht auf die Tafel (Ebene, 25.), und es ist P der Augenpunct auf der Tafel, der Vereinigungspunct der Projectionen aller auf die Tafel senkrechten geraden. Die auf AB und CD zugleich senkrechte durch E ist der Durchschnitt der Tafel und der Grundebene, welche auch hier die Grundlinie heiße. Durch O ziehe man mit EC eine parallele Oo, und lege durch dieselbe eine mit der Grundebene parallele Ebene, so schneidet diese die Tafel in einer mit der durch E gehenden Grundlinie parallelen Linie. Denn beide Durchschnittslinien schneiden sich nicht, weil sie in parallelen Ebenen liegen. Die Oo schneide die AB in F, so ist die durch F mit der durch E gehenden Grundlinie parallel gezogene gerade die Gränzlinie für die Projectionen aller auf der Grundebene gezogenen geraden, von dem Puncte angenommen, wo sie die Tafel treffen. Nämlich jede von O nach einem Puncte der Grundebene gezogene gerade trifft die Tafel in einem Puncte zwischen der Grundlinie und der durch F ihr parallelen. Diese letztere heiße deswegen die Gränzlinie für die geneigte Grundebene, wie in 9. Der Punct F ist der Vereinigungspunct für alle geraden, welche der CE parallel sind, das ist, keine Abweichung von der Ebene des Auges (der Neigungsebene) haben, wiewol sie gegen die Tafel geneigt sind. Dieser Punct F ist daher als Augenpunct in Beziehung auf die geneigte Ebene anzusehen, so wie es P in Beziehung auf die gegen die Tafel senkrechte Ebene ist. Man kann ihn den zweyten Augenpunct nennen.

Digitized by Google

29. Weicht eine gerade, der Grundebene parallele, von der Ebene des Auges ab, so ziehe man derselben eine parallele durchs Auge. Diese, da sie der Grundebene parallel ist, schneidet die Tafel in der Gränzlinie für die Grundebene, in einem Puncte, der der Vereinigungspunct für alle jener parallelen ist, wie in 11.

30. Es sey OP = a; der Neigungswinkel der Grundebene gegen die Tafel = E; die Abweichung einer darauf oder ihr parallel gezogenen geraden von der Ebene des Auges OFE sey der Winkel A, so ist PF = a cot E, und OF = a cosec E. Der Abstand des Vereinigungspunctes von F bey dem Abweichungswinkel A ist = a cosec E. tang A. Der Abstand des Auges von dem Vereinigungspuncte ist = OF × sec A = a cosec E. sec A.

31. Die Länge der Projection jeder der geneigten Grundebene parallel laufenden Linie wird ganz auf dieselbe Art wie für horizontale Linien in (11.) gefunden. Die Projection der ganzen unendlichen Linie von dem Puncte, wo sie die Tafel trifft, bis zu dem Vereinigungspuncte wird nach dem Verhältnisse der wahren Linie eines abzuschneidenden Stücks zu dem Abstande des Auges von dem Vereinigungspuncte eingetheilt. Auch die Methode durch die gleichschenkligen Dreyecke mittelst der Tangenten der Abweichungswinkel das. I. ist hier anwendbar. Überhaupt, wenn man die Durchschnittslinie einer geneigten Ebene mit der Tafel und den zweyten Augenpunct bestimmt hat, ist alles, was für Zeichnungen auf einer horizontalen Ebene gefunden wird, auch auf Zeichnungen in der geneigten anwendbar.

32. Man ziehe (Fig. 150.) auf die CD die senkrechte OG vom Auge her, welche AB in H treffe. Der Punct H auf der Tafel ist der Vereinigungspunct für die Projectionen aller auf die Grundebene senkrechten. Es ist PH = a tang E, und OH = a sec E. Für diese Linie ist A = o und der Neigungswinkel gegen die

Digitized by Google

Tafel $= 90° - R$. Die Abmessung der perspectivischen Länge von dem Puncte, wo eine solche senkrechte auf die Tafel stößt, geschieht eben so wie in dem vorhergehenden Falle.

33. Wenn der Vereinigungspunct der perspectivisch parallelen zu weit entfernt liegt, als daß er in dem beschränkten Raume der Zeichnung auf die Horizontallinie getragen werden könnte, und die Construction vermittelst der Abstände eines Punctes von der Vertical- und Grundebene auch nicht paßlich seyn sollte, so muß man sich der Rechnung bedienen. In Fig. 146. schneide die LT die PQ in R, so ist $LQ + PT : LQ = PQ : QR$. Hier ist LQ der Abstand eines gegebenen Punctes von der Verticalebene, und PQ der Abstand seiner Grundebene von der horizontalen Ebene durchs Auge; PT die Tangente des Abweichungswinkels der projicirten Linie LT. Es sey der Abstand des Auges von der Tafel $= a$, der Abstand des Punctes L von der Horizontalebene durch $GH = b$; von der Verticalfläche, $LQ = c$; der Abweichungswinkel $= A$, so ist $QR = \frac{bc}{c + a \operatorname{tang} A}$. Nachdem der Punct R auf PQ gefunden ist, zieht man LR, und verlängert diese, so weit es der Raum der Zeichnung erlaubt.

34. Auf diese LR eine gegebene Länge perspectivisch zu tragen, wenn diese auf der Grundlinie, zufolge der Construction in (11.), nicht Raum hat, muß man zur Rechnung sich wenden. Es ist (Fig. 146.) $LM + TU : LM = LT : LN$. Hier ist LM die gegebene Länge, welche d sey; $TU = a \sec A$. Aber LT muß erst besonders berechnet werden. Es ist $LT = \frac{PQ}{\sin L}$, und $\operatorname{tang} L = \frac{RQ}{LQ} = \frac{b}{c + a \operatorname{tang} A}$. Sucht man also erst die Tangente des Winkels L, und aus den Tafeln den zugehörigen Sinus, wozu immer die Tafeln, ohne Einschaltung nöthig zu haben, hinreichen, so

Digitized by Google

findet man LT, und dann durch die angegebene Proportion LN.

35. Das bisher vorgetragene wird für alle Fälle, die bey der perspectivischen Entwerfung vorkommen mögen, hinreichen. Ebene Figuren, sie mögen in einer auf die Tafel senkrechten, oder gegen sie geneigten liegen, werden keine Schwierigkeit machen, da die Maßen der geradlinichten Seiten, Diagonalen und Winkel entweder in Zahlen gegeben, oder aus einer Zeichnung gefunden werden. Krumme Linien werden mittelst einiger ihrer Puncte aufgetragen, deren Projectionen aus freyer Hand auf eine geschickte Art durch einen Zug verbunden werden. Die Projection eines Kreises ist eine Ellipse, zu deren Construction fünf Puncte gegeben werden müssen; s. krumme Linien der ersten Classe, 15, 21, 22. Von der Entwerfung krummer, horizontal liegender Linien auf der vertical stehenden Tafel, sehe man Karstens Lehrbegriff, Th. VII. S. 206. ff.

36. Körperliche Figuren können mehr Schwierigkeit machen. Man muß die Lehren der sphärischen Trigonometrie wohl inne haben, um aus den gegebenen Lagen von Linien und Ebenen gegen einander die davon abhangenden herzuleiten.

37. Ich gebe keine Beyspiele, weil sie zu vielen Raum wegnehmen würden. Man wird in allen Büchern von der Perspectiv mancherley solche finden. Noch besser ist es, wenn man sie sich selbst giebt, und sie nach den hier gegebenen Vorschriften behandelt. Man nehme dazu geometrische Körper, die man mit ihren Schatten auf einer Ebene, es sey horizontalen, verticalen, geneigten, auch mehrern nach einander entwerfe. Die regelmäßigen Körper sind gute Übungsstücke, besonders wenn man sie in schwierigen Stellungen zeichnet. Am nutzbarsten sind Zeichnungen aus der Baukunst und dem Maschinenwesen. Mit Bogenstellungen und Dachverbindungen mache man den Anfang.

Digitized by Google

Tafel $= 90° - E$. Die Abmessung der perspectivischen Länge von dem Puncte, wo eine solche senkrechte auf die Tafel stößt, geschieht eben so wie in dem vorhergehenden Falle.

33. Wenn der Vereinigungspunct der perspectivisch parallelen zu weit entfernt liegt, als daß er in dem beschränkten Raume der Zeichnung auf die Horizontallinie getragen werden könnte, und die Construction vermittelst der Abstände eines Punctes von der Vertical- und Grundebene auch nicht paßlich seyn sollte, so muß man sich der Rechnung bedienen. In Fig. 146. schneide die LT die PQ in R, so ist $LQ + PT : LQ = PQ : QR$. Hier ist LQ der Abstand eines gegebenen Punctes von der Verticalebene, und PQ der Abstand seiner Grundebene von der horizontalen Ebene durchs Auge; PT die Tangente des Abweichungswinkels der projicirten Linie LT. Es sey der Abstand des Auges von der Tafel $= a$, der Abstand des Punctes L von der Horizontalebene durch $GH = b$; von der Verticalfläche, $LQ = c$; der Abweichungswinkel $= A$, so ist $QR = \frac{bc}{c + a \tang A}$. Nachdem der Punct R auf PQ gefunden ist, zieht man LR, und verlängert diese, so weit es der Raum der Zeichnung erlaubt.

34. Auf diese LR eine gegebene Länge perspectivisch zu tragen, wenn diese auf der Grundlinie, zufolge der Construction in (11.), nicht Raum hat, muß man zur Rechnung sich wenden. Es ist (Fig. 146.) $LM + TU : LM = LT : LN$. Hier ist LM die gegebene Länge, welche d sey; $TU = a \sec A$. Aber LT muß erst besonders berechnet werden. Es ist $LT = \frac{PQ}{\sin L}$, und $\tang L = \frac{RQ}{LQ} = \frac{b}{c + a \tang A}$. Sucht man also erst die Tangente des Winkels L, und aus den Tafeln den zugehörigen Sinus, wozu immer die Tafeln, ohne Einschaltung nöthig zu haben, hinreichen, so

Digitized by Google

findet man LT, und dann durch die angegebene Proportion LN.

35. Das bisher vorgetragene wird für alle Fälle, die bey der perspectivischen Entwerfung vorkommen mögen, hinreichen. Ebene Figuren, sie mögen in einer auf die Tafel senkrechten, oder gegen sie geneigten liegen, werden keine Schwierigkeit machen, da die Maßen der geradlinichten Seiten, Diagonalen und Winkel entweder in Zahlen gegeben, oder aus einer Zeichnung gefunden werden. Krumme Linien werden mittelst einiger ihrer Puncte aufgetragen, deren Projectionen aus freyer Hand auf eine geschickte Art durch einen Zug verbunden werden. Die Projection eines Kreises ist eine Ellipse, zu deren Construction fünf Puncte gegeben werden müssen, s. krumme Linien der ersten Classe, 15, 21, 22. Von der Entwerfung krummer, horizontal liegender Linien auf der vertical stehenden Tafel, sehe man Karstens Lehrbegriff, Th. VII. S. 206. ff.

36. Körperliche Figuren können mehr Schwierigkeit machen. Man muß die Lehren der sphärischen Trigonometrie wohl inne haben, um aus den gegebenen Lagen von Linien und Ebenen gegen einander die davon abhangenden herzuleiten.

37. Ich gebe keine Beyspiele, weil sie zu vielen Raum wegnehmen würden. Man wird in allen Büchern von der Perspectiv mancherley solche finden. Noch besser ist es, wenn man sie sich selbst giebt, und sie nach den hier gegebenen Vorschriften behandelt. Man nehme dazu geometrische Körper, die man mit ihren Schatten auf einer Ebene, es sey horizontalen, verticalen, geneigten, auch mehrern nach einander entwerfe. Die regelmäßigen Körper sind gute Übungsstücke, besonders wenn man sie in schwierigen Stellungen zeichnet. Am nutzbarsten sind Zeichnungen aus der Baukunst und dem Maschinenwesen. Mit Bogenstellungen und Dachverbindungen mache man den Anfang.

Digitized by Google

Zur Geschichte der Perspectiv.

Wie weit die Alten in der linearischen Perspectiv gekommen seyn, wissen wir nicht. Die Stelle beym Vitruv von der theatralischen Mahlerey der Griechen ist im 2 Th. S. 318. angeführt. Plinius erzählt im 35sten Buche vieles von täuschenden Nachahmungen natürlicher Gegenstände durch die alten Mahler, welches aber ohne geometrische Kenntniß möglich war. Man sehe zwey Abhandlungen über diese Materie von Meister in den Schriften der Göttingischen Societät der W. T. V. VI. für die Jahre 1774 und 1775; auch meine Übersetzung von Priestley's Geschichte der Optik, Th. I. S. 75. ff.

Ptolemäus lehrte die stereographische Entwerfung der Kreise einer Kugelfläche auf eine Ebene durch ihren Mittelpunct, welches in der That eine perspectivische Vorstellung ist, für ein Auge, das sich in dem Pole des Kreises, dessen Ebene die Tafel ist, befindet. Er begnügte sich damit, diese Theorie zur Entwerfung der Planisphärien zu gebrauchen.

Die Mahlerey und Baukunst gaben, nach der Wiederherstellung der Wissenschaften, Veranlassung zur Entdeckung einiger Regeln für perspectivische Zeichnungen. Der erste, welcher etwas brauchbares über die Perspectiv geschrieben hat, ist Pietro della Francesca dal Borgo S. Sepolcro im 16ten Jahrhundert gewesen, wie Egnazio Danti in der Vorrede zu seinem Commentar über die Perspectiv des Vignola anführt. Seine drey Bücher über diese Kunst sind nicht gedruckt. Daniel Barbaro, Patriarch zu Aquileja, hat daraus vieles in sein Buch über die Perspectiv getragen. Unter den ersten Schriftstellern über diese Wissenschaft war auch Balthasar von Siena, dessen Methode Sebastian Serlio in seinem Werke über die Baukunst gebraucht hat. Dieses meldet Danti a. a. O. Jener Balthasar führt den Zunamen Peruzzi, und war ein sehr angesehener Baumeister und Zeichner, der 1536 zu Rom in einem Alter von 36 Jahren gestorben ist. (Dictionnaire

Digitized by Google

de Peinture et d'Architecture, à Paris 1746.). Daß er den Distanzpunct gebraucht hat, sieht man aus einer Construction, welche Danti von ihm a. a. O. S. 82. anführt, und die auch jener Pietro dal Borgo S. Sepolcro schon entdeckt hat. Unser Albrecht Dürer hat auch Vorschriften zu perspectivischen Zeichnungen gegeben in seiner Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, 1525. Auch lehrte er ein mechanisches, wiewol sehr beschwerliches Verfahren, von einem wirklichen Gegenstande eine perspectivische Zeichnung zu entwerfen. Kästner hat dieses und vieles andere aus Dürers Buche angeführt, welches nicht so nöthig gewesen wäre, als dessen perspectivische Entwerfungsarten, wovon nichts angezeigt wird.

Ein Hauptbuch über die Perspectiv mag im 16ten Jahrhundert das von Barozzi da Vignola gewesen seyn, Regole della prospettiva pratica, Roma, 1583. Fol. wovon im J. 1602 noch drey Ausgaben in Folio, Quart und Octav erschienen sind. Egnatio Danti, Matematico dello Studio di Bologna, gab diese in kurzen Sätzen verfaßte Anweisung mit einem weitläufigen Commentar heraus, Rom 1611 Fol., wovon in der Folge noch zwey Ausgaben herausgekommen sind. Vignola (gest. 1573) trägt zwey Regeln oder Methoden vor. Zuerst bedient er sich des Ortes des Auges selbst und dessen Grundpunctes auf der Grundebene Die gerade von jenem Puncte nach einem Puncte des Gegenstandes giebt auf der Tafel die perspectivische Höhe, die gerade von dem andern nach dem Grundpuncte des abzubildenden Punctes giebt den perspectivischen Abstand von der Ebene des Auges. Die Projectionen geschehen, die eine in der Verticalebene durch das Auge, die andere in der Grundebene durch dessen Grundpunct. Diese Methode ist in der That die einfachste, mit sehr wenigen geometrischen Kenntnissen begreiflich. Die zweyte Methode nimmt den Distanzpunct (17.) nebst dem Augenpuncte zu Hülfe, um vermittelst jenes auf den nach diesem laufenden perspectivischen Linien eine gegebene Länge zu entwerfen.

Digitized by Google

Guido Ubaldis mit dem Zunamen e Marchionibus Montis, erwies, daß alle mit der Grundebene parallelen in der perspectivischen Abbildung in einem Puncte der Horizontallinie zusammen kommen. Sein Werk über die Perspectiv kam 1600 heraus. Es ist nach damahliger Art weitschweifig, doch gehört der Verfasser zu den besten mathematischen Schriftstellern seiner Zeit. Der Jesuit Franciscus Aguilonius, welcher einen großen Folianten über die Optik (Opticorum libri sex, Antwerpiae, 1613) herausgegeben hat, erweiterte die Bemerkung auf parallelen, die in einer gegen die Tafel geneigten Ebene gezogen sind. Er zerstückelt den Satz in fünf Sätze, ohne Zeichnungen und Anwendungen, daher die Theorie dieser Entwerfungen den praktischen Schriftstellern über die Perspectiv zu schwer gewesen seyn mag. Auch finde ich in Niceron's Thaumaturgus opticus, Parisiis, 1646 Fol. noch nichts von der Entwerfung solcher Linien, welche gegen die Horizontalebene geneigt sind. Der Jesuit Dechales handelt in dem dritten Theile seines großen Cursus mathematicus, Lugduni 1690, in dem vierten Buche von der Perspectiv ausführlich von dieser Entwerfung mit Beyspielen.

De la Caille zeigte in seinen Leçons d'Optique (erste Ausg. 1756, zweyte 1766), wie die Eintheilung der Horizontallinie nach den Tangenten der Gesichtswinkel am Auge als perspectivischer Winkelmesser (8.) dient, jede mit der Grundebene parallele und gegen die Tafel geneigte Linie zu entwerfen. Lambert in seiner freyen Perspectiv (1. Th. Zürch 1795, zweyter, 1774) hatte eben den Gedanken, ohne jenes Werk gesehen zu haben. Er zeigt auch daselbst, wie der Proportionalzirkel, mittelst der darauf befindlichen Linien, der arithmetischen und der trigonometrischen, zur Erleichterung perspectivischer Zeichnungen gebraucht werden kann.

Mechanische Vorrichtungen zu perspectivischen Abbildungen haben Dürer, Danti in seinem Commentar über Vignola, Niceron nach einem Mahler Lodovico

Digitized by Google

Cisolo, Lambert u. a. angegeben. Meister hat in einer Gradual-Schrift, Instrumentum scenographicum, Gottingae 1753, ein aus verschiedenen verschiebbaren Linealen zusammengesetztes Instrument beschrieben, wodurch vermittelst des daneben gelegten Grundrisses und Aufrisses eine perspectivische Zeichnung daraus gemacht werden kann. Man kann auch den Pantograph zu perspectivischen Entwerfungen benutzen, wie es der Erfinder, Scheiner, in seiner Pantographice, p. 100, und nach ihm Dechales, a. a. O. pag. 566. gezeigt haben. Bürja schlägt dieses Instrument auch zu dieser Absicht vor in seiner Perspectiv, ohne jene Vorgänger zu kennen. In den Philos. Transactions, 1785, Nr. 22. sind drey Instrumente zu perspectivischen Zeichnungen von Gebäuden und Maschinen beschrieben von Peacock. Das bequemste Instrument möchte der Proportionalzirkel seyn, wie ihn Lambert in einer kleinen Schrift: Kurzgefaßte Regeln zu perspectivischen Zeichnungen ꝛc. Augsburg, 1768 beschrieben hat.

Verzeichnisse von Schriften über die Perspectiv findet man in Lamberts Perspectiv, 2 Th. S. 6. ff. in Montucla Geschichte der Mathematik, Th. II. S. 708 ff. in meiner Übersetzung von Priestley's Geschichte der Optik, I. Th. S. 75 ff. am ausführlichsten in Scheibels mathematischer Bücherkenntniß, zehnten Stück, bis zum J. 1776. Zu diesem Verzeichnisse füge ich noch einige mir bekannt gewordene Schriften hinzu.

Von Segner Anfangsgründe der Perspectiv, Berlin 1779. 94 S. 8. 8 K. ein völlig ausgearbeitetes Werk, welches nach dem Tode des Verfassers erschienen ist, ganz theoretisch, nach geometrischer Methode.

G. H. Werners Anweisung alle Arten von Prospecten nach den Regeln der Kunst und Perspectiv von selbst ziehen zu lernen. Erfurt 1781. 130 S. 8. mit 17 K. ganz praktisch.

Iosephi Torelli, Veronensis, elementorum Prospettivae libri II. opus posthumum; recensuit et edidit Io. Bapt. Bertolini Centurio Ar-

Digitized by Google

chitectus, Veronae 146 p. 4to. 1787. Götting. gel. Anz. 1788. St. 175.

Mönnichs Versuch, die mathematischen Regeln der Perspectiv für den Künstler ohne Theorie anwendbar zu machen. Berlin 1794. 5 ½ Bog. 19 K. Mit einem neuen Titel 1801. Neue allgem. D. Bibl. XXI und LXXVI.

Bürjas mathematischer Maler, oder Anweisung zur Perspectiv nach verschiedenen Methoden, mit einem Anhange über die theatralische Perspectiv. Berlin 1795, 230 S. 8.

Horstig Briefe über die malerische Perspectiv, 2 Thle. Leipz. 1797. 32 K. Allgemeine Liter. Zeitung, 1798, Nr. 185. In Briefen an ein Frauenzimmer abgefaßt.

Traité de Perspective par Lavit, Prof. à l'Athénée de Paris, T. I. 4to. 50 pl. à Paris.

Über die Luftperspectiv von Lambert in den Mém. de Berlin 1774, und eine besondre Schrift von St. Morien, Paris 1789.

Vorzügliche deutsche Schriften über die Perspectiv sind die vorher angeführte von Lambert, und die Abhandlung von Karsten in seinem Lehrbegriffe der Mathematik, Th. VII. S. 110—434. In der ersten ist der Vortrag geometrisch, in der andern analytisch geometrisch, nur etwas zu weitläufig. Von der letztern ist ein Auszug in desselben Verfassers Anfangsgründen der Mathematik, Th. III. S. 89—175.

Planimetrie ist der Theil der Elementargeometrie, welcher von ebenen Figuren handelt; insbesondere wird dieses Wort von der Ausmessung ebener Figuren dem Inhalt nach gebraucht.

Planus locus und

Planum problema, s. Ort.

Plasmaticum, ein Kunstwort, welches Diophantus in seiner Arithmetik oder Analysis B. I. Aufg. 30.

Digitized by Google

31. 35 gebraucht. Es macht in Absicht der Etymologie Schwierigkeit. Die Aufgaben, von welchen D. sagt, daß sie plasmatisch sind, sind folgende. I. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe und Product gegeben werden. II. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe und die Summe ihrer Quadrate gegeben werden. III. Zwey Zahlen zu finden, deren Unterschied und Product gegeben werden; zugleich soll das Vierfache des Produets mit dem Quadrate des Unterschiedes eine Quadratzahl ausmachen. Die beiden ersten Aufgaben schließen, wenn sie möglich seyn sollen, eine Bedingung ein. Gleichung 33, 36, 48. Die dritte ist zwar unbedingt möglich, wenn gerade keine ganze oder rationale Zahlen verlangt werden; allein die Rationalität, die gefordert wird, macht eine Bedingung. Diophant hat also durch sein Kunstwort die Abhängigkeit der Auflösung von den Bedingungen, die er dem Vortrage derselben beyfügt, anzeigen wollen. Das griechische Stammwort πλασσειν heißt formen und auch erdichten. Es ist freylich nicht recht klar, wie diese Bedeutung sich auf jene Abhängigkeit bezieht. Xylander hat in seinem Commentar über den Diophant das Wort übersetzt durch effictum aliunde. Bachet, ein anderer Commentator, tadelt jenen, und behauptet, es bedeute id, a quo aliud quippiam effingi et plasmari possit. Vieta gebraucht das Kunstwort auch. In der Schrift, de recognitione aequationum, heißt es Cap. VIII. plasma inesse aequationibus intelligitur, quum deducuntur potestates affectae a puris vel minus affectis aeque altis, aut etiam altiores a depressioribus. In der Schrift, de emendatione aequationum, Cap. 1. sagt er, die Gleichung $x^3 + 3ax^2 + bx = c$ sey plasmatisch, aequalitas aliunde efficta. Kästner erwähnt der Frage über dieses Kunstwort auch, in der Geschichte der Mathematik, 3. B. 158—160 S. Die Frage ist nur grammatisch. Dem Sinne nach muß es heißen: ein Fall, der etwas anders voraussetzt,

Digitized by Google

Plus, ein Kunstwort, welches Addition bezeichnet. Das Zeichen ist +, welches zugleich auch eine positive Größe bedeutet.

Pol ist jeder der Endpuncte eines Durchmessers einer Kugel, in Beziehung auf den großen Kreis und die kleinern parallelen, die auf den Durchmesser senkrecht stehen.

Pol bedeutet auch den fixen Punct, aus welchem an die Puncte einer Curve gerade Linien gezogen werden, als Ordinaten zu den Winkeln mit einer gegebenen, durch denselben Punct gezogenen, geraden Linie, welche als Abscissen dienen.

Polarprojection, s. Projection.

Polyedrum oder **Polyhedrum** ist ein Körper, der zwischen ebenen Flächen eingeschlossen ist, von πολυ, viel, und ἑδρα, Sitz. Wenn die Seitenflächen gleiche und reguläre Figuren sind, dann ist das Polyedrum ein regulärer Körper, der in eine Kugel eingezeichnet werden kann. S. Vieleckige Körper.

Polyedralzahlen, s. in dem folgenden Artikel.

Polygon, s. Vieleck.

Polygonalzahlen sind Summen arithmetischer Reihen, deren Anfangsglied die Einheit, der Unterschied der Glieder eine der ganzen Zahlen ist. Sie machen also nur eine besondere Gattung von arithmetischen Reihen der zweyten Ordnung aus.

1. Sie heißen Triangularzahlen, wenn der Unterschied der Glieder in der arithmetischen Reihe = 1 ist, Quadratzahlen, Pentagonal-, Hexagonal-, Heptagonal-, Octogonalzahlen u. s. f. wenn der Unterschied 2, 3, 4, 5, 6, u. s. f. ist.

2. Die Seite oder Wurzel einer Polygonalzahl ist die Anzahl der Glieder aus der zugehörigen Reihe, wovon sie das summatorische Glied ist. Die Anzahl der Winkel, welche zu ihrer Bestimmung

Digitized by Google

gebraucht wird, ist diejenige, welche das Vieleck hat, wovon die Polygonalzahl benannt ist.

3. Der Grund der Benennung, Polygonalzahlen, ist, daß diese Zahlen durch ihre Einheiten, als Puncte, in reguläre Vielecke gestellt werden können, z. B. die Triangularzahlen in Form eines gleichseitigen Dreyecks.

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

Hier enthält die Seite rechter Hand die Trigonalzahlen. Auf ähnliche Weise erhält man durch mehrere, mit einem gemeinschaftlichen Winkel in einander gelegten, Vierecke, Fünfecke ꝛc. die Quadratzahlen, die Pentagonalzahlen, u. s. f.

4. Die Anzahl der Winkel in einem regulären Vieleck sey m. Man nehme eine Folge von solchen Vielecken, in welchen die Seiten gleiche (oder, wenn man will, ungleiche) Unterschiede haben, lege sie mit einem gemeinschaftlichen Winkel in einander, und zähle von dem gemeinschaftlichen Winkelpuncte an die Eckpuncte und Theilungspuncte, so erhält man für das erste Vieleck m Puncte, für das zweyte $2m-3$, weil 3 Puncte mit dem ersten gemein sind; für das dritte $3m-5$; das vierte $4m-7$; u. s. f. Diese Zahlen, nach der ersten, machen eine arithmetische Progression aus, nämlich für $m=3$ diese,

3, 3, 4, 5, 6 . . . oder 1, 2, 3, 4, 5 . . .

für $m=4$ diese,

4, 5, 7, 9 . . . . oder 1, 3, 5, 7, 9 . . .

für $m=5$ diese,

5, 7, 10, 13 . . . oder 1, 4, 7, 10, 13 . . .

u. s. f.

Die Summen dieser und folgender arithmetischen Reihen sind nach der Reihe die Polygonalzahlen.

5. Es sey eine Polygonalzahl $=p$; ihre Wurzel

Digitized by Google

oder Seite $= r$; die Anzahl der Winkel in dem ihr gleichnamigen Vieleck $= m$; so ist

$$p = \tfrac{1}{2}(m-2)r^2 - \tfrac{1}{2}(m-4)r.$$

Denn es sey die arithmetische Reihe, deren Summe die Polygonalzahl ist,

$$1 ; 1 + d ; 1 + 2d ; \ldots 1 + (r-1)d,$$

wo d der gemeinschaftliche Unterschied d ist. Die Summe der r Glieder ist $= \frac{1}{2}r(2 + (r-1)d)$, s. arithm. Reihe, 6. Da $d = m - 2$ ist, so ist diese Summe oder $p = r + \frac{1}{2}r(r-1)(m-2)$, woraus die angegebene Formel folgt.

6. Es ist also eine

$$\text{Triangularzahl} = \frac{rr + r}{2} ; \text{Quadratzahl} = \frac{2rr}{2}.$$

$$\text{Pentagonalzahl} = \frac{3rr - r}{2} ; \text{Hexagonalz.} = \frac{4rr - 2r}{2}$$

$$\text{Heptagonalzahl} = \frac{5rr - 3r}{2} ; \text{u. s. f.}$$

7. Die Folge dieser Zahlen ist

Triangularz.,	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36 . .
Quadratz.,	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64 . .
Pentagonalz.,	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92 . .
Hexagonalz.,	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120 . .

Die Unterschiede der Polygonalzahlen mit derselben Seite nach der Folge der Winkelzahlen, sind $\frac{1}{2}(n^2 - n)$.

8. Aus der Polygonalzahl p einer Ordnung die Seite r zu finden, hat man eine quadratische Gleichung aufzulösen. Es sey der Kürze wegen $m - 2 = a$; $m - 4 = b$, so daß

$$2p = ar^2 - br, \text{ oder } r^2 - \frac{b}{a}r = \frac{2p}{a}.$$

Daher ist (Gleichung, 34.) . . $r = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{2p}{a} + \frac{bb}{4aa}\right)}$,

oder $r = \frac{b + \sqrt{(8ap + bb)}}{2a}$. Die negative Wurzel werde hier bey Seite gesetzt.

Digitized by Google

9. Es muß $8ap + bb$ das Quadrat einer ganzen Zahl seyn, wenn r eine ganze Zahl seyn soll. Wäre dieses nicht, so wäre p keine Polygonalzahl im eigentlichen Verstande, sondern eine in der Reihe der Polygonalzahlen eingeschaltete.

Ist p eine ursprüngliche Polygonalzahl, so ist $8ap + bb$ oder $8(m-2)p + (m-4)^2$ das Quadrat einer ganzen Zahl. Z. B. für Triangularzahlen ist $8p + 1$ ein Quadrat; für Quadrate $16p$. wo p selbst ein Quadrat ist, und $16p$ keines Zusatzes bedarf; für Pentagonalzahlen $24p + 1$; für Hexagonalzahlen $32p + 4$; für Heptagonalzahlen $40p + 9$; u. s. f.

10. Die Summe der Puncte auf den in einander gelegten Vielecken erhält man auch folgendergestalt. Man ziehe von der Reihe,

$$m + 2m + 3m + 4m \ldots + (r-1)m,$$

ab die Reihe von $r-2$ Gliedern,

$$3 + 5 + 7 \ldots + (2r-3).$$

Die Summe jener ist $= \frac{1}{2}(r-1)rm$; dieser $= r(r-2)$. Der Unterschied ist $= \frac{1}{2}(m-2)r^2 - \frac{1}{2}(m-4)r$, wie vorher.

11. Mit den Polygonalzahlen haben sich die ältern Rechenmeister viel beschäftigt. Marpurg hat in seinem Progressionalcalcul, Berlin 1774, sie sehr weitläufig behandelt. Er führt auch Central-Polygonalzahlen an, die aber nichts anders sind, als die Summe der Winkel- und Theilungspuncte auf Vielecken, wenn man sie um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct herum legt, und für diesen noch 1 addirt. Theon von Smyrna handelt von den Polygonalzahlen in seinen mathematischen Erläuterungen. C. 19. 20.

12. Die **Polyedralzahlen** sind den Polygonalzahlen verwandt. Es sind die Summen der Puncte, welche auf den Ecken, Seitenlinien und Seitenflächen regulärer Polyedren, in gleichen Entfernungen von einander sich stellen lassen, auf gleiche Art wie die Polygonalzahlen Summen von Puncten in regulären Vielecken.

Digitized by Google

13. Ein Tetraedrum hat 4 Eckpuncte, 6 Seitenlinien und 4 Seitenflächen. Die Seitenlinie eines Tetraedrum nehme man zur Einheit. Verdoppelt man diese, so kommen, bey einer gemeinschaftlichen Ecke (körperlichem Winkel) zu den 4 Puncten an dem erstern hinzu 3 Eckpuncte und 3 Puncte in der Mitte der nicht gemeinschaftlichen Seitenlängen, in Summe 6. — Man nehme die Seite = 3, so kommen hinzu 3 Eckpuncte, 2(6 — 3) innerhalb der Seitenlinien, und 1 innerhalb der Grundfläche, zusammen 10. — Man nehme die Seite = 4, so kommen hinzu 3 Eckpuncte, 3(6 — 3) innerhalb der Seitenlinien, und 3 innerhalb der Grundfläche, in Summe 15. — Bey ferner successiv vergrößerter Anzahl der Theile kommen nach der Reihe hinzu 21, 28, 36, 45, etc. Die Tetraedralzahlen von der Einheit an sind nun die Summen der Glieder folgender arithmetischer Reihe zweyter Ordnung,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 . .

das ist

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165 . .

14. Ein Hexaedrum oder Würfel hat 8 Eckpuncte, 12 Seitenlinien und 6 Seitenflächen. Man nehme die Seitenlinie eines Hexaedrum zur Einheit, so giebt dieser Körper 8 Puncte. Man verdoppele die Seiten, und gebe beiden Körpern eine gemeinschaftliche Ecke, so kommen zu jenen 8 Puncten hinzu 7 Eckpuncte, 12 — 3 auf der Mitte jeder Seite, und 6 — 3 innerhalb der Seitenflächen, in Summe 19 Puncte. Man nehme die Seite = 3, so kommen hinzu 7 Eckpuncte, 2(12 — 3) auf den Seitenlinien innerhalb der Endpuncte, und 4(6 — 3) innerhalb der Seitenflächen, zusammen 37. Nimmt man die Seite = 4, so kommen hinzu 7 + 3(12 — 3) + 9(6 — 3) = 61. So sind die Hexaedralzahlen von der Einheit an die Summen der Glieder der arithmetischen Reihe zweyter Ordnung,

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169 . . .

das ist

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 . . .

die Würfel der natürlichen Zahlen.

Digitized by Google

15. Auf gleiche Art wird ein Liebhaber dieser Untersuchungen finden, daß die Octoedralzahlen sind die Summen der Glieder folgender Reihen,

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85 . . .

also

1, 6, 19, 44, 85, 146, 231 . . .

16. Die Dodekaedralzahlen sind die Summen der Glieder folgender Reihe,

1, 19, 64, 136, 235, 361, 514 . . .

also

1, 20, 84, 220, 455, 816, 1330 . . .

17. Die Ikosaedralzahlen sind die Summen der Glieder folgender Reihe,

1, 11, 36, 76, 131, 201, 286 . . .

also

1, 12, 48, 124, 255, 456, 742 . . .

18. Die allgemeinen Formeln für diese Zahlen zu finden, dient die Summirungsformel in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 12. Für die Tetraedralzahlen ist die Formel schon daselbst, 13, gefunden. Die r te Tetraedralzahl ist $= \frac{1}{6} r(r+1)(r+2)$.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 7, 19, 37, etc. zu finden, ist $A = 1$; $\Delta A = 6$; $\Delta^2 A = 6$; $\Delta^3 A = 0$, also die Summe $= r + \frac{r.r-1.}{1.2} 6 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} 6$.

$= r^3$, und die r te Hexaedralzahl $= r^3$.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 5, 13, 25 . . . zu finden, setze man $A = 1$, $\Delta A = 4$; $\Delta^2 A = 4$, $\Delta^3 A = 0$, so ist die Summe $= r + \frac{r.r-1.}{1.2} 4 + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3} 4$

$= \frac{1}{3} r(2r^2+1)$, als die r te Octoedralzahl.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 19, 64, 136 . . . ist $= \frac{1}{2} r(9r^2-9r+2)$, als die r te Dodekaedralzahl.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 11, 36, 76, 131 . . . ist $= \frac{1}{2} r(5r^2-5r+2)$, als die r te Ikosaedralzahl.

Digitized by Google

Von den Polyedralzahlen handelt Marpurg a. a. O. S. 307—313. Die Formeln giebt er in Worten, ohne Beweis, auch ohne Erläuterung, wie diese Zahlen gefunden werden mögen. Auch in einigen Rechenbüchern findet man die Formeln; allein die geometrische Herleitung der Polyedralzahlen habe ich, so viel ich nachsehen können, nirgends gefunden. Die Rechenmeister haben vielleicht gar ein Geheimniß daraus machen wollen.

Die Pyramidalzahlen sind die summatorischen Glieder der Polygonalzahlen, s. unten.

Polygonometrie ist die Lehre von der Ausmessung geradlinichter Figuren von mehr als drey Seiten, mittelst der sie bestimmenden Seiten und Winkel. Es wird dienlich seyn, diese Materie bis zu dem Artikel, Tetragonometrie, zu versparen, wo auch der Artikel, Trigonometrie, benachbart ist. Der gegenwärtige Theil dieses Werks möchte auch kaum die Untersuchung noch fassen.

Polynomium, eine Größe, die aus mehr als drey oder vier endlichen, besonders bezeichneten, Theilen zusammengesetzt ist. Es ist auch eine aus unendlich vielen Theilen bestehende Größe darunter begriffen, welche man insbesondere Infinitinomium nennt.

Polynomial-Coefficient ist der gegebene oder unveränderliche Factor zu den Potenzen der veränderlichen Größe, nach welchen die Potenz eines Polynomium geordnet ist. Hindenburg versteht darunter den Factor, der in diesem Coefficienten zu dem darin enthaltenen Binomial-Coefficienten kommt, und bezeichnet denselben durch die Buchstaben des kleinen deutschen Alphabets, s. Combinatorische Analysis, 35.

Polynomischer Lehrsatz (Theorema polynomiale s. infinitinomiale) ist die analytische Formel, welche die Zusammensetzung einer Potenz einer vieltheiligen

Digitized by Google

Größe aus den Theilen derselben und dem Exponenten der Potenz darstellt.

1. Die vieltheilige Größe ist entweder ein bloßes Aggregat von Theilen (auch von subtractiven) ohne ein Gesetz der Folge, wie die Reihe,

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.}$$

Oder die Theile sind nach den Potenzen einer in ihnen als Factor enthaltenen gemeinschaftlichen Größe geordnet, auf eine ähnliche Art, wie die Theile einer Zahl in der dekadischen Fortschreitung, als in der Reihe,

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$$

oder allgemeiner

$$az^n + bz^{n+r} + cz^{n+2r} + dz^{n+3r} + \text{etc.}$$

wo a, b, c, d, etc. bestimmte Größen sind, z aber unbestimmt und veränderlich gelassen wird.

2. Eine vieltheilige Größe von der einen oder der andern Form auf eine Potenz zu erheben, kann man auf zweyerley Art verfahren. Entweder leitet man sie aus dem binomischen Lehrsatze her, oder gründet sie unmittelbar auf die Multiplication gleicher Factoren und die Lehre von den Combinationen. Die Anwendung der Differentialrechnung ist weniger methodisch, weil der Satz der Analysis des Endlichen zugehört.

3. Man betrachte alle nach dem ersten folgende Theile als eine einzelne Größe, das Ganze also als eine zweytheilige, $P = A + R$, erhebe nun die Größe $A + R$ auf die Potenz mit dem gegebenen Exponenten m, so ist nach dem binomischen Lehrsatze, mit den für denselben gebrauchten Bezeichnungen der Coefficienten (Binomial-Coefficienten, 1.)

$$P^m = A^m + {}^m\mathfrak{A}\,A^{m-1}R + {}^m\mathfrak{B}\,A^{m-2}R^2 + {}^m\mathfrak{C}\,A^{m-3}R^3 + {}^m\mathfrak{D}\,A^{m-4}R^4 \ldots\ldots + {}^m\mathfrak{N}\,A^{m-n}R^n + \text{etc.}$$

Nun entwickele man die Potenzen R^2, R^3, R^4, etc. nach der gemeinen Multiplication, und setze die Werthe derselben, so wie auch R selbst, in die für P^m gefundene Reihe, so erhält man so viele Glieder für P^m als man nöthig findet, und mag auch daraus durch Bemerkung

Digitized by Google

des Gesetzes ihrer Formation ein allgemeines Gesetz herleiten, es sey nun, daß man die Glieder von P^m nach den Potenzen des ersten Gliedes A der Reihe P oder nach den Potenzen von z ordnet. Um aber ohne Induction das Gesetz der Glieder in P^m zu erhalten, muß die durch R bezeichnete Reihe auf eine unbestimmte Potenz erhoben werden. Dieses ist nun freylich dasselbe, wie das, was für die gegebene Reihe P verlangt wird, allein der Unterschied ist, daß die Reihe R nur auf eine Potenz mit einem ganzen Exponenten erhoben werden darf, dagegen der Exponent m für P jeder Art muß seyn können, eine ganze oder gebrochne, positive oder negative Zahl. Ist nun der binomische Lehrsatz allgemein erwiesen, so hat man nur die Potenz einer polynomischen Größe für ganze Exponenten zu suchen, um dieselbe auch für jede andere Art von Exponenten darstellen zu können. Diesen Weg hat Hindenburg befolgt in der Schrift, infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae. Gottingae, 1779.

4. Nach dem beschriebenen Verfahren erhebt man sich von dem Besondern zu dem Allgemeinen, von der Potenzirung einer zweytheiligen Größe zu der einer vieltheiligen. Allein es ist auch erforderlich, das Allgemeine unabhängig von dem Besondern zu erhalten, und dieses zu einem Folgesatze aus jenem zu machen. Der polynomische Lehrsatz muß für ganze Exponenten auch unabhängig von dem binomischen, aus der Natur der Multiplication, mit Zuziehung der Lehre von den Combinationen gefunden werden. Dann ist es noch nöthig, die für ganze Exponenten gefundene Form auch für jede andere Art von Exponenten als gültig zu erweisen.

Erste Form eines Polynomium:

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.} = P.$$

5. Aufgabe. Es soll das Aggregat, $a + b + c + d + e + f + \text{etc.} = P$, in welchem kein Gesetz der Form der einzelnen Theile nach ihrer Folge ange-

Digitized by Google

nommen wird, auf die Potenz mit dem ganzen positiven Exponenten m erhoben werden.

Da bey der Multiplication vieltheiliger Größen jeder einzelne Theil jedes Factors in jeden einzelnen Theil jedes der andern Factoren multiplicirt wird, so besteht die Potenz P^m aus Partialproducten von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, in welchen die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = m$ ist, und die Größen a, b, c, d .... auf jede beliebige Art aus der Reihe P genommen werden können. Die hier angesetzten a, b, c, d vertreten die Stelle aller übrigen. Ein Partialproduct kann lauter gleiche Factoren enthalten, wie a^m, b^m; oder zwey verschiedene, wie $a^\alpha b^{m-\alpha}$; oder drey verschiedene, wie $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, oder mehrere theils verschiedene, theils gleiche, oder lauter verschiedene. So viele Zerfällungen die Zahl m zuläßt, so vielerley Formen von Partialproducten sind vorhanden. Eine und dieselbe Combination von Factoren, wie a, b, c, d, etc. mit denselben Wiederholungsexponenten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kann mehrmahls vorhanden seyn, weil die Factoren der Partialproducte auf verschiedene Arten aus den gleichen Hauptfactoren P der Potenz P^m genommen werden können. Man unterscheide diese gleichen Hauptfactoren nach den Stellen ihrer Folge, als

I. a + b + c + d + e + etc.
II. a + b + c + d + e + etc.
III. a + b + c + d + e + etc.

u. s. f.

Die Factoren in den Partialproducten ordne man nach den Stellen der Hauptfactoren, woraus sie genommen sind, z. B. aabdabce, für m = 8, wo die beiden ersten a aus I. und II. das erste b aus III; d aus IV. u. s. f. genommen sind. Nun ist klar, daß jede Combination so oft vorkommt, als oft sich die Elemente derselben, oder die Partialfactoren, versetzen lassen. Zufolge der Lehre von den Versetzungen (s. Ver-

Digitized by Google

setzungen) ist die Anzahl der Versetzungen in derselben Combination $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ aus m Factoren $=$

$$m.m-1.m-2\ldots 2.1.$$

$$(\alpha.\alpha-1\ldots)(\beta.\beta-1\ldots 1)(\gamma.\gamma-1\ldots 1)(\delta.\delta-1\ldots 1)\text{ etc.}$$

Der Zähler ist die Anzahl der Versetzungen von m verschiedenen Dingen; die Factoren des Nenners sind die Mengen der Versetzungen von α, von β, von γ, von δ, u. s. f. verschiedenen Dingen.

Es ist also noch nöthig, alle Formen der Combinationen von je m Größen aus der Reihe, $a + b + c + d + \ldots$ mit Wiederholungen sowol als ohne solche aufzustellen, welche dann mit den zugehörigen Versetzungszahlen begleitet werden. Die Formen ergeben sich alle aus den Zerlegungen einer Zahl in alle ihre ganzen Theile, s. Zerlegung der Zahlen, oder Combination, IV. Bey kleinern Zahlen ist die Sache äußerst leicht.

Man bezeichne das Aggregat aller ähnlichen Verbindungen von a, b, c, d ... durch das vorgesetzte Zeichen $\int$, so daß $\int a$ das Aggregat der a, b, c ... bedeute, $\int a^2$ die Summe ihrer Quadrate; $\int ab$ die Summe der Binionen; $\int abc$ der Ternionen; $\int a^2 b$ die Summe der Verbindungen von denselben gleichen mit einer von ihnen verschiedenen, u. s. f.

Es ist nun

$$P = \int a.$$

$$P^2 = \int a^2 + 2\int ab.$$

$$P^3 = \int a^3 + 3\int a^2 b + 6\int abc.$$

$$P^4 = \int a^4 + 4\int a^3 bc + 6\int a^2 b^2 + 12\int a^2 bc + 24\int abcd.$$

$$P^5 = \int a^5 + 5\int a^4 b + 10\int a^3 b^2 + 20\int a^3 bc + 30\int a^2 b^2 c + 60\int a^2 bcd + 120\int abcde.$$

$$P^6 = \int a^6 + 6\int a^5 b + 15\int a^4 b^2 + 30\int a^4 bc + 20\int a^3 b^3 + 60\int a^3 b^2 c + 120\int a^3 bcd + 90\int a^2 b^2 c^2 + 180\int a^2 b^2 cd + 360\int a^2 bcde + 720\int abcdef.$$

etc. $=$ etc.

Digitized by Google

Die Combinationen sind in jedem Abschnitte dieser Formel lexikographisch geordnet, wobey es kaum möglich ist, eine Form zu übersehen. Formen, worin ein folgender Exponent grösser ist, als ein vorhergehender, sind schon in einer vorhergehenden Form begriffen.

6. Man setze $P = a + S$, so ist

$$P^m = a^m + Aa^{m-1}.S + Ba^{m-2}.S^2 + Ca^{m-3}.S^3 + Da^{m-4}.S^4 + \text{etc.}$$

Hier haben die Werthe der Potenzen von S eben die Form, welche die Potenzen von P in (5.) haben, indem man nur statt a, b, c, d, etc. die Buchstaben b, c, d, e, etc. zu setzen braucht. Die Formel ist die in (3.) angeführte, wozu hier nun die Potenzen von S in Bereitschaft sind. Wenn m eine ganze Zahl ist, so begreift das letzte Glied der Formel alle Combinationen, die kein a enthalten.

7. Die Entwickelung der Summen der Combinationen ist bey einer beträchtlichen Anzahl Glieder in P beschwerlich. Man muß die Glieder nach ihrer Grösse ordnen, damit die unbeträchtlichen Glieder in der Potenz weggelassen werden können. Darum ist die folgende Form vorzüglicher, bey welcher dieses bequem erhalten werden kann.

Zweyte Form eines Polynomium.

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = P.$$

8. Es soll das Polynomium $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.} = P$ auf die Potenz mit dem ganzen positiven Exponenten m erhoben werden.

Die Potenz P^m werde so wie P nach den Potenzen von z geordnet, so hat sie die Form,

$$P^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \ldots + Nz^n + \text{etc.}$$

Jeder dieser Coefficienten besteht aus Producten von m Factoren aus der Reihe der Coefficienten in P, aber nur aus solchen, deren Stellenzahlen nach dem Zeiger,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .
a, b, c, d, e, f, g . . . .

eine Summe gleich dem Exponenten von z geben, z. B.

Digitized by Google

zu z^5 die Producte $a^{m-1}f$; $a^{m-2}(be + cd)$; $a^{m-3}(b^2d + bc^2)$; $a^{m-4}b^3e$; $a^{m-5}b^5$.

Die Producte bis zu $n = 9$ sind in dem Artikel, Combination, 40, angegeben, wo nur in der Horizontalzeile von g statt b^5c und b^5 zu setzen sind b^4c und b^6, und in der von l noch b^3h statt bh^3. Oder man zerlegt den Exponenten von z in alle seine ganzen Theile, setzt für diese die in dem Zeiger zugehörigen Buchstaben, und fügt jedem einzelnen Producte so viele Factoren a hinzu, daß die Anzahl aller $= m$ wird.

Der numerische Coefficient eines Literalproducts, $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ ist, wie vorher bemerkt worden $=$

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, \ldots \,.\, 2 \,.\, 1}{(\alpha \ldots 1)(\beta \ldots 1)(\gamma \ldots 1)(\delta \ldots 1).\text{etc.}},$$

oder $\dfrac{m \,.\, m-1 \,.\, \ldots \,.\, (\alpha+1)}{(\beta \ldots 1)(\gamma \ldots 1)(\delta \ldots 1).\text{etc.}}$. Man setze $\alpha = m - r$, und gebe dem numerischen Coefficienten die Form

$$\frac{m \,.\, m-1 \ldots (m-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots r} \times \frac{r \,.\, r-1 \,.\, \ldots \,.\, 1}{(\beta \ldots 1)(\gamma \ldots 1)(\delta \ldots 1).\text{etc.}},$$

so ist der erste Factor desselben der rte Binomialcoefficient in der mten Potenz eines Binomium. Der andere Factor ist die Versetzungszahl zu dem Producte $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, welches mit dem Factor a^{m-r} oder a^α eines der Partialproducte ausmacht. Die Binomialcoefficienten bezeichne man durch A, B, C, D, u. s. f. wie in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, doch mit Weglassung der Bezeichnung des Exponenten.

Die Coefficienten von z in der Potenz P^m sind nun

$A = a^m$.
$B = Aa^{m-1}b$.
$C = Aa^{m-1}c + Ba^{m-2}b^2$.
$D = Aa^{m-1}d + Ba^{m-2}.2bc + Ca^{m-3}b^3$.
$E = Aa^{m-1}e + Ba^{m-2}(2bd + c^2) + Ca^{m-3}.3b^2c + Da^{m-4}.b^4$.

Digitized by Google

$$F = Aa^{m-1}f + Ba^{m-2}(2be + 2cd) + Ca^{m-3}(3b^2d + 3bc^2) + Da^{m-4}.4b^3c + Ea^{m-5}.b^5.$$
$$G = Aa^{m-1}g + Ba^{m-2}(2bf + 2ce + d^2) + Ca^{m-3}(3b^2e + 6bed + c^3) + Da^{m-4}(4b^3d + 6b^2c^2) + Ea^{m-5}.5b^4c + Fa^{m-6}b^6.$$
$$\text{etc} = \text{etc.}$$

9. Diese Form des Lehrsatzes entsteht aus der ersten, nach der Abänderung in (6.), durch Zerlegung der daselbst angegebenen Summen. Zu jedem der Glieder b, c, d, e, etc. fügt man die Potenzen von z in der zweyten Form nach der Reihe bey, und nimmt die Terminos zusammen, welche einerley Potenz von z enthalten, um daraus die Glieder in P^m zu bilden. Die allgemeine Form sowol in Absicht der Combinationen von b, c, d . . . als der ganzen Coefficienten s. in combinatorischer Analysis, 35.

Allgemeinheit der zweyten polynomischen Formel für alle Arten von Exponenten.

10. Es bezeichnen ${}^{\alpha}P$ und ${}^{\beta}P$ die zweyte Formel unsers Lehrsatzes, wenn darin statt m irgend ein paar Exponenten, α, β, gesetzt werden, ohne dadurch schon anzunehmen, daß es Potenzen von P mit diesen Exponenten seyn. Man multiplicire beide Werthe in einander, oder gedenke sich nur, daß diese Operation vorgenommen werde. Sind α und β ganze Zahlen, so ist ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P = {}^{\alpha+\beta}P$, weil in diesem Falle $P^{\alpha}.P^{\beta} = P^{\alpha+\beta}$ ist, also das Product anstatt α und β in den Factoren den Exponenten $\alpha + \beta$ enthält. Das Product hat also in diesem Falle, welche ganze Werthe übrigens für α und β genommen werden, einerley Form mit seinen Factoren. Nun ist es bey der wirklichen Multiplication einerley, ob α und β ganze oder gebrochne, positive oder negative Zahlen bedeuten, weil es einfache Symbole sind, die in jedem dieser Fälle auf einerley Art mit den übrigen Größen zusammengesetzt werden. Daher ist allgemein

Digitized by Google

${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P = {}^{\alpha+\beta}P$, d. i. das Product hat dieselbe Form mit seinen Factoren, indem $\alpha+\beta$ statt α und β eintreten.

11. Daher hat das Product ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P \times {}^{\gamma}P \times {}^{\delta}P \times$ etc. einerley Form mit den Factoren, oder es ist $= {}^{\alpha+\beta+\gamma+\delta\ \cdots}P$.

12. Man setze $\alpha = \beta = \gamma = \delta =$ etc. und $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ etc. $= n\alpha$, so ist $\left({}^{\alpha}P\right)^{n} = {}^{n\alpha}P$, und ${}^{\alpha}P = \left({}^{n\alpha}P\right)^{\frac{1}{n}}$. Es sey $n\alpha$ eine ganze Zahl $= m$, so ist ${}^{n\alpha}P = {}^{m}P = P^{m}$, und ${}^{\alpha}P = P^{\frac{m}{n}}$ oder ${}^{n}P = P^{\frac{m}{n}}$, das ist, die Formel für eine gebrochne Potenz von P wird erhalten, wenn in der polynomischen Formel statt m der gebrochne Exponent $\frac{m}{n}$ gesetzt wird.

13. Man verwandle den einen Factor in dem Producte ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P$ in einen Divisor, so ist $\frac{{}^{\alpha}P}{{}^{\beta}P} = {}^{\alpha-\beta}P$, wenn α und β ganze Zahlen, und β kleiner als α ist. Der Quotient von ${}^{\alpha}P$ durch ${}^{\beta}P$ hat also in diesem Falle dieselbe Form mit dem Dividendus und Divisor. Bey der wirklichen Division ist es gleichgültig, ob α größer oder kleiner sey; also haben die Quotienten ${}^{\alpha}P : {}^{\beta}P$ und ${}^{\beta}P : {}^{\alpha}P$ einerley Form, das ist, $P^{\alpha-\beta}$ mit $P^{\beta-\alpha}$, oder P^{-m} mit P^{+m}.

14. Da α und β auch gebrochne Zahlen seyn können, und dabey die Form der Potenzen P^{α}, P^{β} dieselbe bleibt wie für ganze Zahlen, so hat auch $P^{-m:n}$ dieselbe Form mit $P^{+m:n}$.

15. Die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes ist auf dieselbe Art erwiesen worden (s. denselben, 26—30.); nur konnte da durch Rechnung gezeigt werden, daß für

Digitized by Google

eine zweytheilige Größe P die durch $^{\alpha}P$ und $^{\beta}P$ bezeichneten Formeln ein Product von derselben Form wie der Factoren selbst geben, was man auch für α und β für Zahlen setzen mag.

16. Die erste Form des polynomischen Lehrsatzes setzt ganze Exponenten voraus. Wenn man sie aber so abändert, wie in (6.) geschehen ist, so ist sie eben so allgemein, wie der binomische Lehrsatz.

17. Einen gebrochnen Exponenten $\frac{m}{n}$ zerlege man in die nächst kleinere ganze Zahl und den überschießenden Bruch, z. B. $\frac{3}{2}$ in $1+\frac{1}{2}$, oder $\frac{7}{3}$ in $2+\frac{1}{3}$, und sondere die Potenz von a mit dem Bruchexponenten von der Formel als gemeinschaftlichen Factor ab.

18. Exempel. Es ist

$$(a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\text{etc.})^{\frac{3}{2}} =$$
$$a^{\frac{3}{2}}\left[1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}z+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right)z^2\right.$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{a}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}+\tfrac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{a^3}\right)z^3$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e}{a}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{2bd+c^2}{a^2}+\tfrac{3}{16}\cdot\frac{b^2c}{a^3}-\tfrac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{a^4}\right)z^4$$
$$\left.+\text{etc.}\right].$$

Dritte Form des polynomischen Lehrsatzes.

19. In den beiden ersten Formen ist jeder Coefficient für sich, unabhängig von den andern, durch Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. in der Wurzel gegeben. Es ist noch eine dritte Form, eine involutorische oder rücklaufende, übrig, worin jeder Coefficient aus allen vorhergehenden zusammengesetzt wird. Wenn gleich nach dieser alle vorhergehenden Coefficienten berechnet seyn müssen, um einen Coefficienten in einer gegebenen Stelle zu finden, so empfiehlt sich doch auch diese Form durch ihre faßliche Regelmäßigkeit.

Digitized by Google

Zu numerischen Berechnungen der Coefficienten ist dieselbe sehr nützlich, da diese immer nach der Reihe gesucht werden. Die Formel ist folgende.

20. Es sey

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.} = p;$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.} = p^m = P,$$

so ist

$$A = a^m.$$
$$aB = mbA.$$
$$2aC = 2mcA + (m-1)bB.$$
$$3aD = 3mdA + (2m-1)cB + (m-2)bC.$$
$$4aE = 4meA + (3m-1)dB + (2m-2)cC + (m-3)bD.$$
$$5aF = 5mfA + (4m-1)eB + (3m-2)dC + (2m-3)cD + (m-4)bE.$$

u. s. f.

21. Diese Form zu finden, sehe man z als eine veränderliche Größe an, und suche Gleichungen zwischen den zusammen gehörigen Veränderungen der Größe z, der vieltheiligen Größe p, und ihrer Potenz P. Da die Form der Coefficienten in P für die veränderte z dieselbe bleibt, so wird dieses auf Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten führen.

22. Die zusammen gehörigen endlichen Veränderungen von z, p, P seyn Δz, Δp, ΔP, das ist, die Differenz zweyer Werthe von z, von p und von P. In dem Werthe von Δp bezeichne man alles, was das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $q\Delta z^2$, so daß q außer den Theilen von p auch noch Potenzen von Δz enthalte; eben so bezeichne man alles, was in ΔP das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $Q\Delta z^2$. Solchergestalt ist, wenn der Werth der Größe p von dem Werthe $p + \Delta p$ abgezogen wird,

$$\Delta p = b\Delta z + 2cz\Delta z + 3dz^2\Delta z + 4ez^3\Delta z + \text{etc.} + q\Delta z^2.$$

Eben so, wenn P von $P + \Delta P$ abgezogen wird,

Digitized by Google

$\Delta P = B\Delta z + 2Cz\Delta z + 3Dz^2\Delta z + 4Ez^3\Delta z + \text{etc.} + Q\Delta z^2$

Weil $(p + \Delta p)^m = P + \Delta P$ ist, so ist

$p^m + mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc.} = P + \Delta P$,

und, weil $p^m = P$ ist,

$mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1.}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc.} = \Delta P$, oder

$mp^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc.} = \frac{\Delta P}{\Delta p}$.

Hier setze man für ΔP und Δp ihre vorher gefundenen Werthe, so erhält man die Gleichung

$$mp^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc.} = \frac{B + 2Cz + \text{etc.} + Q\Delta z}{b + 2cz + \text{etc.} + q\Delta z}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Nenner des Bruches in dem Theile rechter Hand, so besteht ein Theil der dadurch erhaltenen Gleichung blos aus den Coefficienten in p und P nebst z und deren Potenzen, ein Theil enthält nebst diesen Δz und deren Potenzen, noch ein Theil Producte aus Δp und Δz und deren Potenzen. Nun ist der Werth von Δz und der daraus fließende von Δp ganz willkürlich und unabhängig von den Coefficienten in p und P. Die Relation dieser letztern bleibt, was man auch der Veränderung Δz für einen Werth beylegt. Darum muß alles, was Δz und Δp enthält, für sich allein sich aufheben, weil sonst jene Relation dadurch veränderlich würde. Folglich macht alles, was kein Δz und Δp enthält, eine besondere Gleichung für sich allein aus. Solchergestalt ist

$$mp^{m-1} = \frac{B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}}{b + 2cz + 3dz^2 + 4ez^3 + \text{etc.}}.$$

Diese Gleichung werde mit p und dem Nenner des Bruches multiplicirt, und darauf werde für p^m und p ihr Werth gesetzt, so ist,

Digitized by Google

$m(A + Bz + Cz^2 + \text{etc.})(b + 2cz + 3dz^2 + \text{etc.})$
$= (a + bz + cz^2 + \text{etc.})(B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc.})$

Diese beiden Producte entwickelt, und mit ihren Theilen auf eine und dieselbe Seite des Gleichheitszeichens gesetzt, geben eine nach den Potenzen von z fortschreitende Gleichung. Da die Coefficienten a, b, c, etc. so wie A, B, C, etc. von z ganz unabhängig sind, so muß alles, was in dieselbe Potenz von z multiplicirt ist, eine besondere Gleichung für sich allein ausmachen, weil sonst jene Coefficienten für jeden veränderlichen Werth von z sich verändern würden. Dadurch ergeben sich nun die gesuchten Gleichungen zur Bestimmung der Relation der Coefficienten, nämlich

I. $A = a^m$,
II. $mAb = aB$,
III. $m(2Ac + Bb) = 2aC + bB$,
IV. $m(3Ad + 2Bc + Cb) = 3aD + 2bC + cB$,
V. $m(4Ae + 3Bd + 2Cc + Db) =$
$4aE + 3bD + 2cC + dB$.
VI. $m(5Af + 4Be + 3Cd + 2Dc + Eb) =$
$5aF + 4bE + 3cD + 2dC + eB$.
u. s. f.

Hieraus folgen die oben für A, B, C, etc. angegebenen Werthe.

23. Die Beschaffenheit des Exponenten m mag auch bey dieser Form seyn, welche man will. Es kommt hier nur auf die beiden ersten Glieder der Binomialpotenz $(p + \Delta p)^m$ an, deren Form selbst unabhängig von der Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes blos durch die Ausziehung der Wurzel nach der gemeinen Art sich erweisen läßt.

24. Man würde die Formeln für die Coefficienten A, B, C, etc. auch erhalten, wenn man statt der Verhältnisse endlicher Differenzen, $\Delta z : \Delta p$; $\Delta z : \Delta P$; $\Delta p : \Delta P$, die Differentialverhältnisse anwendete, und würde dabey noch schneller zum Ziele kommen. Allein es ist hier gar nicht die Absicht, die letzten Verhältnisse der Veränderungen anzugeben, welches die Bestimmung

Digitized by Google

der Differentialrechnung ist. Die Veränderungen von z, p, P werden hier nur eingeführt, um sie wieder abzusondern, und eine Gleichung zwischen den Coefficienten in der Wurzel und in der Potenz zu erhalten, die von jenen Veränderungen unabhängig ist. Der polynomische Lehrsatz in dieser dritten Form bleibt also auch ein Eigenthum der Analysis endlicher Größen, selbst wenn zu diesem Beweise Differentialverhältnisse angewandt würden.

25. Das Polynomium, $ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+2r} + dx^{n+3r} + \text{etc.}$ auf eine Potenz zu erheben, ist nur nöthig, den Factor x^n abzusondern, um diesen besonders zu potenziren, und statt z in den obigen Formeln x^r zu setzen.

Geschichte des polynomischen Lehrsatzes.

26. Die erste hier vorgetragene Form hat Leibnitz zuerst gefunden. In einem Briefe an Joh. Bernoulli vom J. 1695 (Commerc. epist. T. I. p. 47.) meldet er, daß er schon vor einiger Zeit eine sehr merkwürdige Regel (mirabilem regulam) für die Coefficienten der Glieder in den Potenzen vieltheiliger Größen gefunden habe. Bernoulli zeigt ihm in der Antwort an, daß er auf diese Veranlassung die Regel entdeckt habe. Sie ist die Formel für die Versetzungszahlen.

27. Jakob Bernoulli giebt in einem nachgelassenen Aufsatze (Operum T. II. p. 993) zwey Methoden an. Die erste führt auf die Formel (6.), doch wird nicht gezeigt, wie alle Combinationen zu finden sind. Die zweyte giebt die zweyte oben vorgetragene Form, durch Differentiirung einer logarithmischen Gleichung. Die Coefficienten in der Potenz werden mühsam einer aus dem andern hergeleitet. Die Glieder der gegebenen Reihe, a, b, c, d, etc. bedeuten bey Bernoulli Potenzen einer veränderlichen Größe mit ihren Coefficienten, so auch die Glieder der Potenz. Dieses erschwert die Rechnung. Er ist zu der Untersuchung durch eine Ab-

Digitized by Google

handlung von Moivre in den englischen Transactionen veranlaßt worden, die er aber nicht gesehen hatte.

28. Diese Abhandlung von Moivre steht in der gedachten Sammlung, Vol. XIX. für das J. 1697. Sie enthält die zweyte Form des polynomischen Lehrsatzes, und beschränkt sich noch auf ganze Exponenten. Die Coefficienten in der Potenz werden jeder aus allen vorhergehenden hergeleitet.

29. Die dritte Form hat zuerst Cheyne in der Schrift: Fluxionum methodus inversa, Londini, 1703, vorgetragen.

30. Colson hat in seiner Übersetzung von Newtons Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Londini, 1736, eine Herleitung des polynomischen Lehrsatzes aus der Differential- und Integralrechnung beygefügt, wobey die höhern Differentiale nach der Reihe gebraucht werden. Die Integrationen, welche bey ihm die Rechnung undeutlich machen, konnte er sich leicht ersparen, wenn er in der Reihe für die Potenz des Polynomium die Coefficienten und die Potenzen von z nicht unter einem Symbol begriff, und die Differentialgleichungen von demselben Grade nach einander verglich, wobey es ganz klar ist, daß $z = 0$ gesetzt werden kann, und daß dadurch jedesmahl ein Coefficient bestimmt wird.

31. Die dritte Form des polynomischen Lehrsatzes hat Euler auf eine kurze und einleuchtende Art aus der Differentialgleichung vom ersten Grade hergeleitet, in den Instit. Calc. diff. P. II. §. 202. Nur war es nicht nöthig, logarithmische Differentiale zu gebrauchen, da die Differentiale der Potenzen schon zureichen. Nämlich, wenn das Polynomium $= p$, und $p^m = P$ ist, so ist $mp^{m-1}\partial p = \partial P$, und daher $mP = p\frac{\partial P}{\partial p}$. Nimmt man für P eine Reihe mit unbekannten Coefficienten an, wie in (20.), so erhält man hieraus die Differentiale ∂p und ∂P durch ∂z, und dadurch den ende

lichen Quotienten $\frac{\partial P}{\partial p}$, also eine Gleichung zwischen den Coefficienten beider Reihen, wie in (22.), wodurch die in der Reihe P bestimmt werden.

32. Vorzüglich hat sich Hindenburg um das polynomische Theorem verdient gemacht. Er hat gezeigt, wie in den beiden ersten Formen jedes Glied unabhängig von den vorhergehenden gefunden werden kann, und dieses durch Hülfe der Lehre von den Combinationen, von der Zerlegung der Zahlen und von den Versetzungen. Auch ist seine neue Bezeichnungsart sehr dienlich, das Gesetz der Formation kurz und deutlich darzustellen. Man sehe seine Schrift: Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae, Gottingae, 1779. 4.

33. Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis nebst einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet und dargestellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg, Leipzig, 1796. 8. In dieser Sammlung enthält die erste Abhandlung von Tetens eine Entwickelung des Polynomialtheorems ohne unmittelbaren Gebrauch der Combinationsmethode. Die Art, wie ich in der zweyten Abhandlung die erste Form des Lehrsatzes behandelt, und den Beweis der Allgemeinheit geführt habe, ist von der in diesem Artikel angewandten, verschieden. Zu dieser Sammlung ist im J. 1800 noch eine zweyte gekommen, und beide haben nun den Titel: Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen herausgegeben von C. F. Hindenburg. I. II. Leipzig, 1796. 1800.

Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesagt wird, daß einem oder mehrern gegebenen (unveränderlichen) Dingen, so wie auch unzählig vielen Dingen, die zwar nicht gegeben werden, aber zu den gegebenen Dingen eine bestimmte Relation haben, eine gewisse gemeinschaftliche Beschaffenheit zukomme.

Digitized by Google

Oder: ein Porisma ist eine Aufgabe, worin gefordert wird, etwas bestimmtes, das mit einem unbestimmten nach einem gewissen Gesetze verknüpft sey, zu finden.

1. Diese Benennung einer Gattung mathematischer Sätze ist aus der Geometrie der Alten. Euklides hat drey Bücher, Porismata betitelt, geschrieben, die verloren sind. Pappus bezeugt, daß sie eine höchst kunstreiche Sammlung zur Analysis der schwersten Aufgaben gewesen sind. Die Neuern, sagt er, hätten nichts hinzuzufügen gewußt; sie hätten selbst die Natur dieser Sätze nicht einmahl recht eingesehen, und eine zu enge Erklärung der Porismen gegeben. Pappus führt viele Sätze aus dem Euklidischen Werke an, aber unglücklicher Weise sind auch hier allenthalben Lücken, den Mangel der nöthigen Figuren nicht gerechnet. Daher ist es sehr schwer geworden, diese Bücher so gut als möglich wieder herzustellen. Wir besitzen nur noch die Lemmata des Pappus darüber, L. VII. prop. 127—164.

2. Albert Girard erwähnt in seiner Trigonometrie, (1629), daß er die Porismen wieder gefunden habe, auch in seiner Ausgabe von Stevins Werken. Man sieht aber aus dem, was er an jener Stelle beyfügt, daß er einige Sätze über die Durchschnitte gerader Linien für Porismen überhaupt gehalten, und also sich einen zu engen Begriff davon gemacht habe. — Nach ihm hat Fermat einen Versuch gemacht, die Porismen wieder aufzustellen, allein er nahm mit den jüngern griechischen Geometern eine zu eingeschränkte Erklärung an, da er sie als umgekehrte Localsätze ansahe.

Auch Bullialdus (Bouillaud), der in seinen Exercitationibus geometricis, 1667, die Porismen zu erklären versuchte, ist darin nicht glücklich gewesen. Halley, der den griechischen Text der Vorrede zum 7ten Buche des Pappus herausgegeben hat, bekennt, daß er von der Nachricht, die darin ertheilt wird, nichts verstehe.

Digitized by Google

3. Endlich scheint Robert Simson, der so erfahrne Kenner der alten Geometrie, die Porismen des Euklides so genau, als es möglich ist, wieder geliefert zu haben, nachdem er sein Vorhaben wegen der großen Schwierigkeit schon einmahl ganz aufgegeben hatte. Sein erster Versuch ist in den Engl. Transactionen vom J. 1723, No. 177. enthalten. Die völlige Ausführung ist in seinen Operibus posthumis, Glasguae 1776 befindlich, pag. 317—594. Von ihm ist auch die obige Erklärung entlehnt. Im Original lautet sie so: Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Die Construction scheint fast die Mühe zu zeigen, welche die Erklärung gekostet hat. Das Wort data in der Erklärung ist zweydeutig. Es bedeutet sowol, was eine bekannte gegebene Größe hat, als auch, was einen bestimmten unveränderlichen Werth (oder solche Lage hat) hat, aber erst zu finden ist.

4. Die Alten haben den Unterschied zwischen Theorem, Problem und Porisma sehr kurz gefaßt. Ein Theorem nannten sie, wie Pappus bemerkt, einen aufgestellten Satz, der bewiesen werden sollte; ein Problem etwas aufgegebenes, das durch eine Construction gefunden werden sollte (εἰς κατασκευην του προτεινομενου); ein Porisma einen Satz, worin etwas gefunden werden soll (το προτεινομενον εἰς πορισμον ἀυτου). Die jüngern Geometer, welche Pappus tadelt, nannten ein Porisma einen Satz, dem zu einem topischen oder localen Satze (auf einen geometrischen Ort sich beziehenden) die Hypothesis fehlt, το λειπον ὑποθεσει τοπικου θεωρηματος, d. i. sie sahen es als ein umgekehrtes Locattheorem an. Die geometrischen Örter sind, wie Pappus hierbey bemerkt, Arten (εἰδος) der Porise

Digitized by Google

men als einer Gattung (γενος). Sie sind von den Porismen abgesondert worden, weil diese Art viel zahlreicher als die übrigen ist.

Die Erläuterungen, welcher die anfangs gegebene Erklärung sehr bedarf, nehme ich von Simson selbst, aus der Einleitung zu seiner Abhandlung.

5. Eine gerade Linie A wird der Lage nach gegeben, und ein Kreis C der Lage und Größe nach, so wird dadurch ein Punct P bestimmt, welcher jede dadurch zwischen die gerade A und den Kreis gelegte gerade X so theilt, daß das Rechteck von den Segmenten zwischen dem Puncte P und ihren Durchschnittspuncten mit A und dem Kreise einen unveränderlichen Inhalt hat.

Der Punct P liegt auf dem Umfange des Kreises da, wo derselbe von der senkrechten aus dem Mittelpuncte auf die gerade A geschnitten wird. Die Segmente der geraden X sind die Dinge, welche zu dem gesuchten Puncte dieselbe Relation haben. Die gemeinschaftliche Beschaffenheit ist die Unveränderlichkeit der Rechtecke von den Segmenten. Etwas bestimmtes ist hier mit einem gewissen veränderlichen (der Lage der X und der Größe ihrer Segmente) nach einem gegebenen Gesetze verbunden.

6. Ein Punct wird gegeben nebst einem Kreise der Lage und Größe nach; es ist ein bestimmter Punct vorhanden, so daß die geraden, welche von einem Puncte des Kreisumfanges nach jenem gegebenen und dem zweyten noch zu findenden Puncte gezogen werden, ein unveränderliches Verhältniß haben.

Dieses ist der Satz 51. in dem Artikel Kreis. Es ist (Fig. 22. Tab. XVI.) AMB der gegebene Kreis, dessen Mittelpunct C und einer der Puncte D, E der gegebene, der andere der gesuchte, welchen man durch die Proportion CD : CA = CA : CE findet. Die veränderlichen Dinge sind hier die geraden DM, EM, die gemeinschaftliche Beschaffenheit ist das unveränderliche Verhältniß DM : EM.

Digitized by Google

7. Wenn man in dem Dreyecke DME, dessen Winkelpunct M auf einem gegebenen Kreisumfange liegen soll, die Seite DE nebst dem Verhältnisse der beiden andern Seiten als gegeben betrachtet, so ist die Aufgabe überhaupt eine bestimmte, welche nur durch einen einzigen Punct M des Kreisumfanges aufgelöset wird. Nur in dem Falle, wenn CD : CA = CA : CE, und das Verhältniß DM : EM dem DA : EA oder CA : CE gleich ist, wird die Aufgabe eine unbestimmte, und geht in ein Porisma über.

Auf gleiche Art ist es für das erste Beyspiel eine bestimmte Aufgabe: Gegeben eine gerade Linie und ein Kreis, einen Punct zu finden, der eine dadurch zwischen beide gelegte gerade so theile, daß das Rechteck der beiden Segmente einen gegebenen Inhalt habe.

8. Wenn in (5.) der Punct P und das Rechteck der Segmente gegeben werden, nebst einer der beiden Linien, so ist die andere der geometrische Ort, durch welchen die Gleichheit der Rechtecke von den Segmenten erhalten wird.

So auch, wenn in (6.) beide Puncte E, D, und das Verhältniß DM : EM gegeben werden, ist der geometrische Ort für die Winkelpuncte M ein Kreis, der nach (55. a. a. O.) bestimmt wird.

9. Aus diesen Beyspielen mag man auch abnehmen, was die in (4.) angeführte Erklärung der neuern griechischen Geometer hat sagen sollen. In dem Localtheorem zu dem ersten Beyspiele wird das Rechteck der beiden Segmente als gegeben angenommen, in dem Porisma blos als constant. In dem Localtheorem zu dem zweyten Beyspiele wird das Verhältniß der beiden Seiten des Dreyecks DME gegeben, in dem Porisma nur als constant betrachtet.

Simson führt zur Erläuterung noch einige Sätze an, welche eine Vergleichung der Segmente zwischen unveränderlichen und veränderlichen Puncten auf einer geraden Linie enthalten. Diese werden die Sache noch gut aufklären.

Digitized by Google

10. Auf einer geraden Linie

A C E D B

sind zwey Puncte A, B gegeben; auf derselben werden noch ein Paar Puncte C, D willkürlich genommen, so doch, daß das Verhältniß AC : BD ein gegebenes, m : n sey: es giebt einen unveränderlichen Punct E, für welchen das Verhältniß CE : ED = m : n ist.

Der Punct E ist leicht gefunden. Denn da AC : BD = CE : ED ist, so ist AC + CE : BD + ED = AC : BD, das ist AE : EB = m : n, folglich ist E der Punct, welcher die gegebene AB in einem gegebenen Verhältnisse theilt.

Die beiden Verhältnisse AC : BD und CE : ED müssen sich gleich seyn; sonst werden C und D bestimmte Puncte. Denn es bleibe AC : BD = m : n, aber es sey CE : ED = p : q. Man setze AE = a; EB = b; AC = x, so ist $BD = \frac{nx}{m}$, und es ist

$a - x : b - \frac{nx}{m} = p : q$. Diese Proportion giebt eine bestimmte Gleichung für x. Ist aber p : q = m : n, so wird na − nx = mb − nx, so daß für x jeder Werth genommen werden kann, und na = mb bleibt, oder a : b = m : n ist.

11. Auf einer gegebenen geraden Linie

A D B C

AB werde über B hinaus irgend ein Punct C genommen; es giebt einen unveränderlichen Punct D, so daß das Rechteck AC × CB mit einem gewissen bestimmten Flächenraume so groß ist als das Quadrat des Abstandes, CD von dem Puncte D.

Man setze AB = a; BD = b, BC = x; den Flächenraum = S, so ist (a + x) x + S = (b + x)², das ist ax + S = b² + 2bx. Damit x jeden Werth haben könne, muß seyn a = 2b, d. i. b = ½ a, und S = b² = ¼ aa.

Digitized by Google

Der Satz ist der umgekehrte von Euclidis Elem. II. 6.

12. Auf einer geraden Linie

A D B E C

sind drey Puncte A, B, C gegeben. Wenn zwischen A und B ein Punct D willkürlich genommen wird, so giebt es auf AC einen unveränderlichen Punct E, für welchen das Rechteck von ED und einer bestimmten, aber noch nicht bekannten Länge dem Rechteck AD × DB nebst dem Quadrate von DC gleich ist.

Er sey $AB = a$; $AC = b$; $AE = c$; die gegebene Länge $= f$; $AD = x$, so ist $(c-x)f = (a-x)x + (b-x)^2$. Daraus $cf - fx = ax + bb - 2bx$. Damit x jeden Werth erhalten könne, muß $f = 2b - a$ seyn. Dann ist $cf = bb$, folglich $c = \frac{bb}{2b-a}$.

13. Auf einer geraden Linie

E D A C B

werden drey Puncte A, B, C gegeben; es ist auf der verlängerten AB über A hinaus ein unveränderlicher Punct D in einer solchen Lage, daß, wie man auch einen Punct E nach derselben Gegend von A aus nehmen mag, das Rechteck $BC \times CE = AD \times AE + BE \times f$ ist, wo f eine bestimmte, aber noch unbekannte Länge ist.

Es sey $AB = a$; $BC = b$; $AD = c$; $AE = x$, so ist $b(a - b + x) = cx + (a + x)f$, das ist $ab - bb + bx = cx + fx + af$. Hier muß seyn $ab - bb = af$, und $c = b = f$, das ist $c = \frac{bb}{a}$.

14. Aus den letztern drey Aufgaben oder Sätzen sieht man, daß diese Art von Porismen eben solche Bestimmungen enthalten, als die Methode der Neuern durch unbestimmte Coefficienten, die durch die Gleichungen für die Coefficienten der Potenzen einer veränderlichen Größe bestimmt werden.

Simson behandelt diese Aufgaben anders als hier geschehen ist. Er führt neben der veränderlichen Größe

Digitized by Google

noch eine ein, welche eben die Relation gegen die unveränderlichen hat, als jene, und schafft durch Abziehen der beiden so erhaltenen Gleichungen von einander beide Größen weg. Das hier gebrauchte Verfahren ist viel einleuchtender.

15. Aus dem Werke selbst läßt sich in der Kürze kein Auszug geben. Es kommen darin merkwürdige Sätze über die Lage der Durchschnittspuncte gerader Linien vor, die durch gegebene Puncte gehen, als: wenn vier gerade Linien vorhanden sind, von welchen drey Durchschnittspuncte auf einer dieser Linien gegeben werden, und von den übrigen drey Durchschnittspuncten zwey jeder auf einer gegebenen geraden ihren Ort haben, so hat auch der dritte seinen Ort auf einer gegebenen geraden. Der Satz läßt sich, mit gehöriger Bestimmung der Bedingungen, auch auf irgend eine Anzahl von Linien anwenden. Dieser Satz gehört zu den Localtheoremen.

16. Auch ist folgender Satz über die Durchschnitte mehrerer Linien merkwürdig. Bey Simson, Prop. 34.

Auf einer geraden Linie MN (Fig. 151.) sind drey Puncte A, B, C gegeben, und durch A sind die beiden AD, AE gezogen; auch ist noch FG eine der Lage nach gegebene gerade. Von den Puncten B, C werden nach irgend einem Puncte P der FG die BP, CP gezogen, welche die gegebenen AD, AE in Q, R schneiden: die gerade, welche diese Puncte verbindet, geht durch einen unveränderlichen Punct, das ist, wie man auch P auf FG nehmen mag, die geraden durch die Durchschnittspuncte, dergleichen Q, R sind, schneiden sich alle in einem und demselben Puncte.

Die gegebenen Dinge sind hier die geraden MN, AD, AE, FG, und die Puncte A, B, C auf MN; die veränderlichen sind die Linien BP, CP, QR, das unveränderliche gemeinschaftliche ist der Durchschnittspunct aller QR. Diese muß nun noch gefunden werden.

17. Über den Kreis und die daran gezogenen geraden kommen in Simsons Werke auch künstliche Sätze vor. Ein solcher ist folgender, bey Simson Prop. 51.

Digitized by Google

Über dem Durchmesser AB (Fig. 152.) ist ein Kreis beschrieben; von irgend einem Puncte des Umfanges D werde auf AB die senkrechte DE gezogen, welche dem Kreise in E begegne; dann ziehe man irgend eine EF, welche den Durchmesser in H, den Kreis in F treffe; die DF verlängert schneide den verlängerten Durchmesser AB in G: es ist AG : GB = AH : BH.

Ist nun der Punct G gegeben, so ist H ein unveränderlicher Punct, wie auch die Puncte D, F liegen mögen. Die Linie FE muß aber nach dem Puncte E der auf AB senkrechten DE zugehen.

18. L'Huilier führt in seiner Polygonométrie, p. 98. gelegentlich folgendes von ihm gefundene Porisma an. Eine geradlinichte Figur sey der Größe und Form nach gegeben, nebst einer Anzahl gerader Linien, so vieler als jene Seiten hat, aber nicht alle mit den Seiten gleich verhaltend: es giebt eine der Lage nach und eine der Größe nach bestimmte gerade, und einen bestimmten Flächenraum, so daß, wenn von irgend einem Puncte Perpendikel auf die Seiten der Figur gefällt werden, der Unterschied der Summe (im allgemeinen Verstande) der Rechtecke von diesen Perpendikeln mit den gegebenen geraden und des noch zu findenden Flächenraums gleich ist dem Rechteck des Perpendikels auf die der Lage nach zu bestimmende gerade mit der zu bestimmenden Länge einer geraden Linie.

19. Porisma nennt Euklides in seinen Elementen, was wir Corollarium, Consectarium, Zusatz nennen, einen Satz, der aus einem bewiesenen Satze oder der Auflösung einer Aufgabe unmittelbar folgt. Das griechische Wort πορος bedeutet etwas, das einen Übergang oder Durchgang gewährt, daher Poren in den organisirten Körpern ihren Namen haben. Daraus ergiebt sich der Grund der Benennung jener leichten Folgerungssätze. Wie aber Euklides die leichteste Art von Sätzen, und eine für damahlige Zeit sehr schwere und künstliche mit demselben Kunstworte habe andeuten können, ist nicht so leicht erklärbar. Der Grund muß ver-

Digitized by Google

schieden seyn. Mir scheint er dadurch haben andeuten wollen, daß die Porismen einen Übergang von gegebenen Dingen zu einem bestimmten, wenn gleich noch unbekannten, durch veränderliche Dinge angeben. Sie sind daher Theoreme und Probleme zugleich. Es wird darin eine gewisse Relation der verbundenen Größen aufgestellt, und zugleich muß das bestimmte, aber unbekannte gefunden werden. Darauf mag sich beziehen, was Pappus sagt, daß die Porismen weder als Theoreme noch als Probleme zu betrachten seyn, sondern eine gewisse mittlere Art ausmachen, so daß man sie sowol unter diese als jene rechnen möge.

20. In dem 3ten Bande der Edinburger Transactionen hat noch vor kurzer Zeit Professor Playfair eine Abhandlung über die Porismen geliefert, worin er ihnen eine, wie man es nennen mag, philosophische Ansicht anzugewinnen sucht. Hutton hat in seinem mathematisch-physikalischen Wörterbuche einen sehr ausführlichen Auszug auf 13 großen Spalten daraus mitgetheilt.

21. Der Verfasser bemerkt, daß eine bestimmte geometrische Aufgabe unbestimmt wird, wenn die Linien, deren Durchschnitt das gesuchte angeben soll, bey einer besondern Relation der gegebenen Größen, ganz in eins fallen. Überhaupt ereigne sich dieses, wenn eine der Bedingungen der Aufgabe eine andere einschließt, so daß nicht genugsam unabhängige Bedingungen übrig bleiben, um die Auflösungen der Aufgabe auf eine einzige oder eine bestimmte Anzahl einzuschränken. Nun habe man bemerkt, daß diese Fälle sehr merkwürdige Sätze darbieten, die von einer mittlern Natur zwischen Lehrsätzen und Aufgaben sind, und sich auf eine eigenthümliche Art nett und kurz aufstellen lassen. Diesen Sätzen, auf eine sochle Art aufgestellt, hätten die alten Geometer den Namen Porismen gegeben.

22. Ein Porisma ist nun, nach dieser Ansicht, ein Satz, worin behauptet wird, daß es möglich sey solche Bedingungen zu finden, wodurch eine gewisse Auf-

Digitized by Google

gabe unbestimmt wird, das ist, unendlich viele Auflösungen zuläßt.

23. Als Beyspiel führt der Verf. die Aufgabe an, in einer Ebene, worin mehrere Puncte gegeben sind, durch einen gegebenen Punct eine gerade so zu legen, daß die Summe der von jenen Puncten darauf gezogenen Perpendikel auf der einen Seite so groß sey als auf der andern. Der zu suchende Punct für die gerade ist, was man in der Mechanik den Schwerpunct nennt. Die Aufgabe wird eine unbestimmte, wenn der gegebene Punct in den Schwerpunct selbst fällt.

Das oben (6, 7.) gegebene Beyspiel führt der Verfasser auch zur Erläuterung seiner Erklärung an. Ein merkwürdiges ist folgendes.

24. Zur Bestimmung der Bahn eines Kometen hat man die Aufgabe angewandt, vier der Lage nach gegebene gerade Linien durch eine gerade so zu schneiden, daß die Segmente auf dieser zwischen jenen ein gegebenes Verhältniß haben. Newton hat in den Princ. L. I. Lemma 27. Cor. auch Arithm. univ. Prop. 56. sie aufgelöset. Diese Aufgabe wird in einem gewissen Falle unbestimmt, wie Boscovich 1749 in einer Abhandlung gezeigt hat, welche man auch in seinen Werken und in Castillions Ausgabe von Newtons Arithm. univ. Addit. p. 124. findet. Dieser Fall hat wirklich einen Astronomen bey der Berechnung des Kometen von 1739 in große Verlegenheit gesetzt.

25. Der Gesichtspunct, aus welchen Playfair die Porismen betrachtet hat, ist wirklich derselbe, aus welchem ich oben bey den Aufgaben (10—14) sie schon angesehen habe, ehe ich noch seine Gedanken bey Hutton fand. Er fragt noch, warum Sätze, welche in der Geometrie der Alten einen so ansehnlichen Rang hatten, von den Neuern fast ganz unbeachtet geblieben sind. Allein in der That sind alle Fälle, worin die Coefficienten jeder für sich $= 0$ gesetzt werden, um daraus Gleichungen zu bilden, von derselben Gattung, wie die Porismen der Alten. Dazu kommt, daß es einzelne geometrische

Digitized by Google

Sätze sind, für sich zwar recht fein und sinnreich, allein dem Geiste der neuern Mathematik, der immer mehr nach Allgemeinheit strebt, nicht genug entsprechend. Die neue Mathematik ist so überhäuft reich, daß sie den Verlust einiger niedlichen Kunstsachen aus der Verlassenschaft der Alten nicht bemerkt.

26. Was Montucla in seiner Geschichte der Mathem. N. Ausg. Th. I. S. 277 ff. über die Porismen beybringt, ist belehrend und zweckmäßig.

Ein Aufsatz von Kästner über die Porismen ist in dessen geometrischen Abhandlungen, I. Sammlung, S. 53—74 befindlich.

Positio falsi, s. Regel Falsi.

Positiv, s. entgegengesetzte Größen.

Postulat, Forderung, Heischesatz, ist ein Satz, worin verlangt wird, daß etwas ausgeführt werden soll, ohne daß gezeigt wird, wie es geschehen mag, weil dieses sich aus dem Begriffe der Sache unmittelbar ergiebt. In der Geometrie sind drey Postulate: 1. Von jedem Puncte nach jedem Puncte eine gerade Linie zu ziehen. 2. Eine begränzte gerade Linie stetig gerade fort zu verlängern. 3. Aus jedem Puncte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben. Das heißt in der That nichts anders, als man muß zur Geometrie die Begriffe einer geraden Linie und eines Kreises mitbringen. Man kann es niemanden lehren, wie er es anzufangen habe, sich eine gerade Linie und einen Kreis vorzustellen. Denn von einer sinnlichen Zeichnung ist hier gar nicht die Rede.

In dem griechischen Texte der Euklidischen Elemente sind die drey vorher angeführten Sätze überschrieben: αἰτήματα; zwölf andere Sätze, κοιναὶ ἔννοιαι, gemeinschaftliche Vorstellungen, was wir Axiome, Grundsätze nennen. Sie gehören theils der Größenlehre überhaupt, theils der Geometrie insbesondere an. Sie unterscheiden sich von den Postulaten wie ein Theorem von

Digitized by Google

einem Problem. Die spätern griechischen Mathematiker waren über den Unterschied zwischen Axiom und Postulat nicht einig. Geminus und mehrere unterschieden beides, so wie jetzt eben angeführt ist. Andere bestimmten die Benennung, Axiome, für diejenigen Sätze, welche in der allgemeinen Größenlehre zum Grunde liegen; Postulate für die geometrischen insbesondere. Noch andere nannten jeden unmittelbar evidenten Satz in jeder Form ein Postulat, wieder andere ein Axiom. Jene konnten sich auf Archimedes berufen, der im Anfange seines Buchs von dem Gleichgewichte schwerer Ebenen sagt: wir fordern (αἰτουμεθα), daß gleiche Gewichte, in gleichen Entfernungen aufgehängt, sich das Gleichgewicht halten, u. s. w. Doch diese Streitigkeit schickte sich zu dem Zeitraume, als die Entdeckungen in der Geometrie aufgehört hatten. Proklus, der im Anfange des dritten Buches seines Commentars alles dieses weitläufig erzählt, scheint selbst nicht recht mit sich eins geworden zu seyn. Zuerst billigt er den Unterschied nach Art eines Theorems und Problems, aber bey der Aufzählung der Postulate fügt er den drey anfangs genannten noch dieses: alle rechte Winkel sind einander gleich, hinzu; dann zwar noch den Satz wegen der Bedingung, unter welcher sich zwey gerade nothwendig schneiden, streicht ihn aber wieder aus, weil er bewiesen werden müsse.

Potenz (potentia, potestas, dignitas, Frz. puissance, Engl. power) ist ein Product aus zwey oder mehrern gleichen Factoren, z. B. 25; 125; 625, u. s. f. Die Anzahl der Factoren bestimmt den Grad der Potenz, und heißt ihr Exponens.

1. Man benennt die Potenzen überhaupt nach ihren Exponenten, und rechnet daher die Zahl, aus deren wiederholter Multiplication die Potenzen entstehen, mit zu den Potenzen, unter dem Namen, erste Potenz. Die zweyte heißt häufig das Quadrat, die dritte der Cubus, die vierte das Biquadrat. Man bezeichnet eine Potenz durch die Größe, welche zu den Factoren

Digitized by Google

genommen wird, die Grundzahl, wie sie heißen sollte, nicht Wurzel, mit dem Exponenten an der Spitze, a^1, a^2, a^3, a^4, ... a^m. Die Bezeichnung a^1 wird statt a nur gebraucht, wenn eine Größe, die überhaupt eine Potenz von a ist, in einem besondern Falle diese a selbst ist. Das Quadrat wird oft durch a a bezeichnet, bisweilen der Cubus durch a a a, welches aber bey höhern Potenzen nicht üblich ist, man müßte denn dadurch die Formation der Größen durch Multiplication und Combination deutlicher machen wollen.

2. Wenn eine Zahl in zwey oder mehrere Factoren zerfällt wird, so heißt ein solcher Factor die Wurzel jener Zahl Ihr Grad wird gleichfalls durch die Anzahl der Factoren, welche man der Grundzahl giebt, bestimmt. Diese ist der Exponent der Wurzel. Für die niedrigern Wurzeln sind besondere Benennungen gewöhnlich, als Quadratwurzel, Cubikwurzel, Biquadratwurzel; die höhern kann man nicht anders als durch den Grad oder den Exponenten angeben: fünfte, sechste, mte Wurzel, so wie man auch sagen mag, zweyte, dritte, vierte Wurzel; anstatt jener Benennungen. Eine Grundzahl ist in Absicht auf ihre Wurzeln die erste derselben, eben so als wie sie in Absicht auf ihre Potenzen die erste derselben ist. Man bezeichnet die Wurzeln auf folgende Art: $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a} .. \sqrt[m]{a}$; oder jetzt gewöhnlicher durch $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ ... $a^{\frac{1}{m}}$.

3. Eine Potenz mag auch als Grundzahl genommen in irgend eine Anzahl gleicher Factoren zerfällt werden, z. B. ein Cubus in zwey gleiche Factoren, das Quadrat in drey. Dieses wird folgendergestalt bezeichnet, $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$, d. i. die nte Würzel aus der mten Potenz, z. B. die Quadratwurzel aus einem Cubus durch $\sqrt{a^3}$ oder durch $a^{\frac{3}{2}}$; die Cubikwurzel aus einem Quadrat durch $\sqrt[3]{a^2}$ oder $a^{\frac{2}{3}}$.

Digitized by Google

4. Eine Wurzel mag als Grundzahl auf irgend eine Potenz erhoben werden, z. B. die Quadratwurzel auf die dritte Potenz, die Cubikwurzel auf die zweyte. Dieses wird auf dieselbe Art wie in (3.) bezeichnet. Es ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ die mte Potenz der nten Wurzel aus a. Es ist einerley, ob die Erhebung auf eine Potenz zuerst, und dann die Zerlegung, oder diese zuerst und dann die Erhebung geschieht. Dieses wird unten (20.) noch näher gezeigt.

5. Die Alten, welche die arithmetischen Formen immer mit den geometrischen verglichen, nannten daher die zweyte Potenz eine viereckte Zahl oder ein Quadrat, die dritte einen Cubus; die vierte nennt Diophantus ein Quadrato-Quadrat, die fünfte einen Quadrato-Cubus, die sechste einen Cubo-Cubus. Das Wort Potenz, δυναμις, gebraucht er ganz allein von dem Quadrat. So heißen auch bey Euklides Linien, deren Quadrate ein gemeinschaftliches Maß haben, schlechthin in der Potenz vergleichbare, δυναμει συμμετρα. Jene Benennungen sind nach den Summen der Exponenten gebildet. Vieta und Oughtred folgen darin dem Diophantus.

Die Bezeichnungen, welche Diophantus für die Einheit, die Grundzahl und die Potenzen gebraucht, sind folgende, welche durch die darunter gesetzten, bey uns üblichen, erklärt werden.

μ^o ; ς ; δ^o ; κ^o ; $\delta\delta^o$; $\delta\kappa^o$; $\kappa\kappa^o$.
1 ; a ; a^2 ; a^3 ; a^4 ; a^5 ; a^6.

Das erste Symbol ist von dem Worte μονας, die Einheit, hergenommen; das zweyte ist das Zahlzeichen der Zahl 6, welches im Griechischen nicht aus den Alphabet genommen wird; die übrigen sind aus dem Anfangssylben der Wörter δυναμις und κυβος gebildet.

6. Die Araber gebrauchten Benennungen, die mit folgenden gleichbedeutend sind: Quadrat, Cubus, Quadrato-Quadrat oder Biquadrat, Sursolidum, Quadrat

Digitized by Google

des Cubus, zweytes Surſolidum, Quadrato-Quadrato-Quadrat, Cubo-Cubus, Quadrat des Surſolidum, drittes Surſolidum. Dieſe Benennungen ſind meiſtens zufolge der Producte der Exponenten aus den niedrigern Potenzen gebildet.

7. Der Frater Lucas de Burgo Santo Sepolcro oder Paciolus gebrauchte für Grundzahl, Quadrat, Cubus, u. ſ. w. die Benennungen; Cosa, Censo, Cubo, Censo de Censo, primo Relato, Censo de cubo, und die Bezeichnungen: co; ce; cu; ce.ce; p°.r°; ce.cu, u. ſ. f.

8. Chriſtoff Rudolph in ſeiner Coſs, durch Michael Stifel gebeſſert und ſehr vermehrt, Amſterd. 1615. hat folgende Benennungen der Coſſiſchen progres, wie er eine geometriſche Reihe nennt, Dragma, Radix, Zenſus, Cubus, Zenſdezens, Surſolidum, Zenſicubus, Bſurſolidum, Zenſzenſdezenſs, Cubus de cubo.

Von dem erſten Gliede, Dragma oder Numerus ſagt er, es werde hier genommen gleich als Eins iſt keine Zahl, ſondern giebt andern Zahlen ihr Weſen. Seine Benennungen ſind wie die arabiſchen gebildet. Er bemerkt noch, daß man die Coſſiſche Progres auch alſo verzeichnen möge:

0 1 2 3 4
I . A . AA . AAA . AAAA.

Seine coſſiſchen Zeichen kommen noch in Rechenbüchern des vorigen Jahrhunderts vor.

9. Robert Recorde, ein Engländer, der in den J. 1552 und 1557 eine Arithmetik und Algebra unter dem Titel: The whetstone of Witte, herausgab, bedient ſich derſelben Bezeichnungsart für die Potenzen wie Rudolph und Stifel, auch ihres Verfahrens mit Aggregaten von Potenzen zu rechnen.

10. Bombelli, deſſen Algebra 1579 gedruckt iſt, bezeichnete die Coſa, oder die unbekannte Größe durch das Zeichen ⌣, und die Potenzen durch die darüber geſetzten Exponenten, als $\overset{1}{\smile}$, $\overset{2}{\smile}$, $\overset{3}{\smile}$, u. ſ. f.

Digitized by Google

11. Stevin, der seine Arithmetik 1585, und bald darauf seine Algebra herausgab, gebrauchte einen kleinen Kreis, wohinein er den Exponenten der Potenz setzte. Er erweiterte seine Bezeichnung sogar auf gebrochne Exponenten. — Vieta gebrauchte wieder blos Wortzeichen nach dem Symbol für die Grundzahl. — Harriot bezeichnete die Potenzen durch die Wiederholung der Grundzahl, wie a, aa, aaa, welches, wie vorher bemerkt ist, Rudolph viel früher gethan hatte. — Descartes setzte bey höhern Potenzen den Exponenten an die Spitze des Symbols der Grundzahl, wie es seitdem üblich ist. Girard hatte schon im J. 1629 die Exponenten zur Bezeichnung der Wurzeln gebraucht, als $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$. In Oughtreds Clavis mathematica, edit. quarta, 1667, sind noch unbequeme Bezeichnungen, als Aqqc und Aqcc für A^7; A^8.

Man sieht, daß die Bezeichnungen in diesem gar nicht schweren Falle viele Mühe und Versuche gekostet haben; wie viel weniger darf man sich in philosophischen Dingen von dem Erfolge einer Bezeichnungskunst versprechen!

12. Gegenwärtig sind von den alten Benennungen nur üblich: Quadrat, Cubus (Würfel), Biquadrat; Quadratwurzel, Cubikwurzel, Biquadratwurzel.

13. Tafeln der Quadrate und Würfel der ganzen Zahlen findet man fast in allen Sammlungen mathematischer Tafeln. Meistens gehen die Wurzeln nur bis 1000. In der Sammlung von Tafeln, welche der von Wolfs mathematischen Lexikon durch die Verlagshandlung veranstalteten neuen Auflage beygefügt ist, gehen die Wurzeln bis zu 10000. Sie scheinen ziemlich richtig zu seyn. In Buchners Tabula radicum quadratorum et cuborum ist die höchste Wurzel 12000. Nürnberg, 1701. Diese Tafeln sind sehr fehlerhaft abgedruckt. Johann Ludolfs Tetragonometria tabularia, Ienae 1712 enthält die Quadrate aller Wurzeln bis zu der 100000.

Digitized by Google

Quadrat- und Cubikwurzeln aus den ersten 1000 Zahlen bis auf Zehnmillionentheile sind in Schulzens und Vega's Tafeln enthalten.

14. Die Tafeln der Potenzen dienen auch zur Ausziehung der Wurzeln, weil man dadurch die ersten drey oder vier Ziffern der Wurzel sogleich erhält. Man kann sie durch die Neunerprobe leicht prüfen, da man nicht zwey entgegengesetzte Fehler vermuthen darf. Die Reste bey der Division der Ziffernsumme durch 9 sind

für die Wurzel	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
für das Quadrat	0,	1.	4.	0.	7.	7.	0.	4.	1
für den Würfel	0,	1.	8.	0.	1.	8.	0.	1.	8

Die Quadrate ganzer Zahlen geben bey der Division durch 9 keine andere Reste als 0, 1, 4, 7. die Würfel keine andere als 0, 1, 8.

II. Rechnung mit eintheiligen Potenzen.

15. Die Multiplication der Potenzen von einerley Wurzel oder Grundzahl geschieht durch die Addition der Exponenten; die Division durch die Subtraction der Exponenten der Divisoren von denen der Dividenden; die Erhebung auf eine Potenz durch Multiplication des Exponenten, die Ausziehung der Wurzel durch Division desselben. Die Exponenten der Grundzahl verhalten sich bey diesen Operationen wie Logarithmen. Der Gebrauch der Logarithmen wird durch die hier vorzutragenden Rechnungen einleuchtender werden.

16. Es seyn m und n ganze Zahlen, so ist

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wenn $m > n$ ist.

III. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, wenn $m < n$. IV. $a^0 = 1$. Die Beweise dieser Formeln ergeben sich unmittelbar daher, daß ganze Exponenten die Anzahl der gleichen Factoren in einer Potenz sind. Die Formel IV. entsteht bey der

Digitized by Google

Division irgend einer Potenz durch eine ihr gleiche. Man gebraucht die Bezeichnung a^0, um dadurch die Einheit als Glied in einer geometrischen Progression anzugeben, oder anzuzeigen, daß Eins der particuläre Werth eines Quotienten, a^m dividirt durch a^n ist.

Exempel. $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $\frac{a^5}{a^3} = a^2$;

$a^3 = \frac{1}{a^2}$; $\frac{a^5}{a^5} = a^0 = 1$.

17. Den Quotienten $\frac{1}{a^n}$ bezeichnet man auch durch a^{-n}, weil bey dieser Form die Division durch eine Potenz als eine Multiplication anzusehen ist. Es ist einerley, ob man $\frac{a^m}{a^n}$ oder $a^m \cdot a^{-n}$ schreibt. Den negativen Exponenten addiren, ist eben so viel als den absoluten subtrahiren. Exemp. $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, und $\frac{a^5}{a^2} = a^5 \cdot a^{-2} = a^3$.

18. Es ist unter der obigen Voraussetzung, daß m und n ganze Zahlen bedeuten, I. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

II. $\left(a^m \cdot b^n\right)^r = a^{mr} \cdot b^{nr}$.

Z. B. $(a^2)^6 = a^{12}$; $(a^3 \cdot b^3)^4 = a^8 \cdot b^{12}$.

19. Es ist I. $\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$.

II. $\sqrt[r]{\left(a^m \cdot b^n\right)} = a^{\frac{m}{r}} \cdot b^{\frac{n}{r}}$, III. $\sqrt[r]{\left(a^m \cdot b^n \cdot c^p\right)} = a^{\frac{m}{r}} \cdot b^{\frac{n}{r}} \cdot c^{\frac{p}{r}}$, u. s. f.

Nämlich so wie bey der Erhebung einer Potenz auf eine Potenz der Exponent jener durch den Exponenten der Potenz, worauf sie erhoben werden soll, multiplicirt wird, so wird bey der Ausziehung einer Wurzel

Digitized by Google

aus einer Potenz der Exponent dieser Potenz durch den
der Wurzel dividirt. Daher sind $\sqrt[n]{a^m}$ oder $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$
und $a^{\frac{m}{n}}$ ganz gleichbedeutende Bezeichnungen. Ist die
Wurzel aus einem Producte von Potenzen zu ziehen, so
muß jeder Factor in so viele Factoren zerfällt werden,
als es der Grad oder Exponent der Wurzel anzeigt.

Exempel. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$; $\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}$;
$\sqrt[2]{a^4 b^6} = a^2 . b^3$; $\sqrt[3]{a^6 b^4 c^2} = a^2 . b^{\frac{4}{3}} . c^{\frac{2}{3}}$.

20. Es ist $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Denn man
setze $a^{\frac{1}{n}} = w$, so ist $a = w^n$; $a^m = w^{mn}$;
$a^{\frac{m}{n}} = w^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Z. B. $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$. Oder $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2 = a^{\frac{2}{5}}$.
Es ist einerley, ob die Erhebung auf eine Potenz zu-
erst, und dann die Ausziehung der Wurzel, oder ob diese
zuerst und jene hernach vorgenommen wird.

21. Es ist I. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}}$. II. $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{nr}}$.
III. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$.

Denn man setze $a^{\frac{m}{n}} = w$, so ist $a^m = w^n$; $a^{mr} = w^{nr}$,
und $a^{\frac{mr}{n}} = w^r$. II. Es sey $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = w$, so ist $a^{\frac{m}{n}} = w^r$;
$a^m = w^{nr}$, und $a^{\frac{m}{nr}} = w$. III. Ist die Erhebung
der Größe $a^{\frac{m}{n}}$ auf die rte Potenz, und die Ausziehung
der rten Wurzel, welches sich gegen einander hebt.

Digitized by Google

Exempel. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 = a^{\frac{5}{4}}$; $\sqrt[5]{a^{\frac{2}{4}}} = a^{\frac{2}{20}}$; $a^{\frac{5}{20}} = a^{\frac{1}{4}}$.

22. Es ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}$. II. $\sqrt[s]{a^{\frac{r}{n}}} = a^{\frac{mr}{ns}}$.

Denn es sey $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = w$, so ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{r} = w^{s}$; oder $a^{\frac{mr}{n}} = w^{s}$; $a^{\frac{mr}{ns}} = w$. II. $\sqrt[s]{a^{\frac{r}{n}}} = w$; $a^{\frac{r}{n}} = w^{s}$; $a^{\frac{mn}{r}} = w^{s}$; $a^{\frac{mn}{r}} = w$.

23. Es ist $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{mr+np}{nr}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{r}}$. Denn es ist $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$; $a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{np}{nr}}$. Nun ist $a^{\frac{mr}{nr}} \times a^{\frac{np}{nr}} = \sqrt[nr]{(a^{mr} \cdot a^{np})}$ nach (19.), das ist $= \sqrt[nr]{a^{mr+np}} = a^{\frac{mr+np}{nr}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{r}}$.

24. Auch ist $a^{\frac{m}{n}}$ dividirt durch $a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{r}}$. Der Beweis wie in (23.) nur daß statt Product ein Quotient gesetzt wird. Die Quotienten können auch als Producte behandelt werden, wenn statt eines Divisors d der Factor $\frac{1}{d}$ mit dem Dividendus multiplicirt wird. In den obigen Sätzen ist es unbestimmt gelassen, ob die Grundzahlen der Potenzen größer oder kleiner als die Einheit seyn.

25. Die Sätze in (16.) gelten nun auch, wenn m und n gebrochne Zahlen, selbst irrationale sind. Dieses

Digitized by Google

ist besonders zur gründlichen und deutlichen Einsicht des Verfahrens bey logarithmischen Rechnungen zu bemerken. Bey diesen werden alle Zahlen als Potenzen der Basis des logarithmischen Systems angesehen, in dem Briggischen der Basis 10. Die Exponenten sind ihre Logarithmen. S. Logarithmen.

26. Wenn die bisher durch ein einfaches Zeichen a bezeichnete Grundzahl die Form eines Bruches, $\frac{a}{b}$, hat, so werden alle Rechnungs-Operationen sowol mit dem Zähler als Nenner vorgenommen. So ist $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$. So auch die übrigen.

III. Differenzen und Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen.

27. Wenn die Wurzeln in einfacher arithmetischer Fortschreitung genommen werden, so sind die Potenzen Glieder einer arithmetischen Reihe einer höhern Ordnung; die Quadrate einer solchen Reihe von der zweyten Ordnung, die Würfel einer Reihe von der dritten, die Biquadrate einer Reihe von der vierten, u. s. f. Die Wurzeln seyn, a; a + d; a + 2d; a + 3d, etc. so ist der beständige zweyte Unterschied der Quadrate = 1 . 2 d^2; der beständige dritte Unterschied der Würfel = 1 . 2 . 3 d^3; . . . . der beständige nte Unterschied der nten Potenzen = 1 . 2 . 3 . 4 . . . n . d^n. S. arithmet. Reihen höherer Ordnungen, 23.

28. Für die niedrigern Potenzen kann dieser Satz unmittelbar aus ihrer Form leicht erwiesen werden. S. Buchstabenrechnung, 20. Dieses giebt ein Mittel an die Hand die Tafeln der Quadrate und Würfel, auch höherer Potenzen, blos durch Addition der Unterschiede

Digitized by Google

Z. B.

Wurzeln	10;	11;	12;	13;	14.
Würfel	1000;	1331;	1728;	2197;	2744.
I. Unterſch.		331;	397;	469;	547.
II. Unterſch.			66;	72;	78.
III. Unterſch.				6;	6.

Das Geſetz für die letzten Differenzen der Potenzen der natürlichen Zahlen und die Berechnung der Potenzenreihen durch Additen kehrt Faulhaber in einer deutſchen Schrift: Academia Algebrae betitelt, Augsburg, 1631. Er kam durch Induction darauf. Mit den Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen, ſelbſt mit den Summen dieſer Summen, hat dieſer myſtiſche Rechner ſich beſchäftigt.

29. Die Summe der Potenzen, deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreſſion ſind, wird mittelſt der Anfangsglieder der Reihe ſelbſt und der Differenzreihen aus der Anzahl der Glieder gefunden, ſ. arithm. Reihen höh. Ordn. 12—15. Eine andere Methode iſt in dem Artikel, Differenzenrechnung, 72, 73 gelehrt. Beide Methoden, beſonders die erſtere, ſind für höhere Potenzen zu beſchwerlich. Hier folgt eine leichtere, die uns zugleich noch zu wichtigen analytiſchen Formeln führen wird.

30. Die Binomial-Coefficienten in der $(n+1)$ten Potenz werden durch A, B, C, D, ꝛc. bezeichnet, die Summe der nten Potenzen der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3 ... x durch Sx^n; der $(n-1)$ten Potenzen durch $S.x^{n-1}$; u. ſ. f. Es iſt

$$(x+1)^{n+1} - (x+1) = AS.x^n + BS.x^{n-1} + CS.x^{n-2} + DS.x^{n-3} \ldots + BS.x^2 + AS.x.$$

Denn da

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} \ldots + Bx^2 + Ax + 1$$

iſt, ſo iſt, wenn für x nach der Reihe alle ganze Zahlen von 1 bis zu der unbeſtimmten x geſetzt werden, die Summe aller $(n+1)$ten Potenzen von $(1+1)^{n+1}$

Digitized by Google

bis $(x+1)^{n+1}$ oder

$S.(x+1)^{n+1} - 1 = S.x^{n+1} + \mathfrak{A}S.x^n + \mathfrak{B}S.x^{n-1} + \mathfrak{C}S.x^{n-2} + \mathfrak{D}S.x^{n-3} \ldots + \mathfrak{V}S.x^2 + \mathfrak{A}S.x + x$.

Es ist aber $S.(x+1)^{n+1} - S.x^{n+1} = (x+1)^{n+1}$, also $(x+1)^{n+1} = \mathfrak{A}S.x^n + \mathfrak{B}S.x^{n-1} \ldots + \mathfrak{A}Sx + x + 1$. Daraus folgt die Formel des Satzes unmittelbar.

31. Aus den Summen der niedrigern Potenzen wird die Summe der nächst höhern, und so jede Summe successiv gefunden.

32. Exempel. Für $n = 2$ ist $(x+1)^3 - (x+1) = 3S.x^2 + 3S.x$. Nun ist $S.x = 1 + 2 \ldots + x = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; also $S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

33. Exempel. Für $n = 3$ ist $(x+1)^4 - (x+1) = 4S.x^3 + 6S.x^2 + 4S.x$, daher $4S.x^3 = x^4 + 2x^3 + x^2$, und

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(x+1)^2 x^2$.

34. Es ist $x^{n+1} \pm x = \mathfrak{A}S.x^n - \mathfrak{B}S.x^{n-1} + \mathfrak{C}S.x^{n-2} - \mathfrak{D}Sx^{n-3} \ldots \mp \mathfrak{B}S.x^2 \pm \mathfrak{A}S.x$, wo das obere Vorzeichen für ein ungerades n, das untere für ein gerades n zu nehmen ist.

Denn da $(x-1)^{n+1} = x^{n+1} - \mathfrak{A}x^n + \mathfrak{B}x^{n-1} - \mathfrak{C}x^{n-2} + \mathfrak{D}x^{n-3} \ldots \pm \mathfrak{B}x^2 \mp \mathfrak{A}x \pm 1$ ist, so setze man für x alle ganze Zahlen von 1 bis zu einer unbestimmten x, und es ist

$S.(x-1)^{n+1} = S.x^{n+1} - \mathfrak{A}S.x^n + \mathfrak{B}S.x^{n-1} - \mathfrak{C}S.x^{n-2} \ldots \pm \mathfrak{B}S.x^2 \mp \mathfrak{A}S.x \pm x$. Da $S.x^{n+1} - S.(x-1)^{n+1} = x^{n+1}$ ist, so folgt daraus unmittelbar der angegebene Satz.

35. Für ein ungerades n ist $(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 1 = 2\mathfrak{A}S.x^n + 2\mathfrak{C}S.x^{n-2} + 2\mathfrak{E}S.x^{n-4} \ldots + 2\mathfrak{C}S.x^3 + 2\mathfrak{A}S.x$.

Diese Formel entsteht, wenn die Formel in (30.) zu der in (34.) addirt wird, da die obern Vorzeichen für ein ungerades n gelten.

Digitized by Google

36. Für ein gerades n ist $(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 2x - 1 = 2\,\mathfrak{A}\,S.x^n + 2\,\mathfrak{C}\,S.x^{n-2} + 2\,\mathfrak{E}\,S.x^{n-4} \ldots\ldots + 2\,\mathfrak{D}\,S.x^4 + 2\,\mathfrak{B}\,S.x^2$.

Diese Formel entsteht ebenfalls durch die Addition der beiden Formeln in (30.) und (34.), da für ein gerades n die untern Vorzeichen in (34.) zu nehmen sind.

37. Exempel. Für $n=1$ ist $x^2 + (x+1)^2 - 1 = 2.2\,S.x$, also $S.x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Für $n=3$ ist $x^4 + (x+1)^4 - 1 = 2.4\,S.x^3 + 2.4\,S.x$, also

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

38. Exempel. Für $n=2$, ist $(x+1)^3 + x^3 - 2x - 1 = 2.3\,S.x^2$, also

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Für $n=4$ ist $(x+1)^5 + x^5 - 2x - 1 = 2.5\,S.x^4 + 2.10\,S.x^2$, also

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

39. Nach diesen Formeln lassen sich die Summen der Potenzen leicht noch weiter berechnen. Es ist

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$

$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{9}{20}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{20}x^2$

$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{24}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{8}x^6 - \frac{11}{8}x + \frac{5}{24}x^2$ u. s. w.

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$

$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{4}{9}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - 1.x^7 + 1.x^6 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$

$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + \frac{6}{7}x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{691}{2730}x$ u. s. w.

Digitized by Google

40. Es ist nun nöthig, das Gesetz dieser Reihen zu entwickeln. Ihre Gestalt oder die Fortschreitung der Exponenten zeigt sich deutlich. Nur muß der Grund derselben entdeckt werden.

Wenn der erste Theil der Gleichung in (35, 36.) entwickelt wird, so ist für ein ungerades n die Gleichung

$2x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + Fx^{n-5} \ldots + Bx^2 + Ax = 2AS.x^n + 2CS.x^{n-2} + 2ES.x^{n-4} + 2GS.x^{n-6} \ldots + 2CS.x^3 + 2AS.x,$

und für ein gerades n,

$2x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} \ldots + Bx^2 + (A-2)x = 2AS.x^n + 2CS.x^{n-2} + 2ES.x^{n-4} + 2GS.x^{n-6} \ldots + 2DS.x^4 + 2BS.x^2.$

Der Theil linker Hand ist identisch mit dem Theile rechter Hand. Daher müssen alle Potenzen von x sich in dem zweyten Theile finden, das ist, S. x^n enthält die Potenzen x^{n+1} und x^n nebst den folgenden, es sey allen oder einem Theile derselben; eben so S. x^{n-2} die Potenzen x^{n-1} und x^{n-2}, u. m.; ferner S. x^{n-4} die Potenzen x^{n-3} und x^{n-4}, u. s. f. Allein keine andere Potenzen können sich gegen einander heben als die, welche mit denselben Binomial-Coefficienten begleitet sind. Dieses führt nun auf die Gestalt der Reihe für S. x^n, nämlich

$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n - \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-2} + \varepsilon x^{n-3} + \text{etc.}$

Die Potenzen x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, etc. können hier nicht vorkommen. Denn diese, welche außer ihren eigenen Coefficienten noch den Factor 2A in den Gleichungen erhielten, würden in dem ersten Theile keine Glieder antreffen, gegen welche sie sich heben könnten, da die Glieder Cx^{n-2}, Ex^{n-4}, Gx^{n-6}, etc. sich gegen das zweyte Glied aus $2CS.x^{n-2}$; $2ES.x^{n-4}$, $2GS.x^{n-6}$, etc. heben.

41. Es sey nun

$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-2} + \varepsilon x^{n-3} - \text{etc.}$
$S.x^{n-2} = \alpha' x^{n-1} + \beta' x^{n-2} + \gamma' x^{n-3} - \delta' x^{n-4} + \text{etc.}$
$S.x^{n-4} = \alpha'' x^{n-3} + \beta'' x^{n-4} + \gamma'' x^{n-5} - \text{etc.}$
$S.x^{n-6} = \alpha''' x^{n-5} + \text{etc.}$
u. s. f.

Digitized by Google

Die Coefficienten α', β', γ', δ', etc. sind eben solche Functionen von $n-2$ als α, β, χ, δ, von n; so auch α'', β'', γ'', δ'' von $n-4$; und so mit allen folgenden.

42. Diese Werthe der Summen setze man in die Gleichungen (40.), so giebt die Vergleichung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x die Werthe der α, β, γ, δ, etc. Zuerst ist $2 = 2\mathfrak{A}\alpha$, also $\alpha = \frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{n+1}$, daher $\alpha' = \frac{1}{n-1}$; $\alpha'' = \frac{1}{n-3}$, u. s. f.

Ferner ist $\mathfrak{A} = 2\mathfrak{A}\beta$, daher $\beta = \frac{1}{2}$, also auch $\beta' = \frac{1}{2}$; $\beta'' = \frac{1}{2}$, u. s. f. Es ist nämlich $\mathfrak{C} = 2\mathfrak{C}\beta'$; $\mathfrak{E} = 2\mathfrak{E}\beta''$, u. s. f. Die übrigen Bestimmungsgleichungen sind:

$\mathfrak{B} = +2\mathfrak{A}\gamma + 2\mathfrak{C}\alpha'$.
$\mathfrak{D} = -2\mathfrak{A}\delta + 2\mathfrak{C}\gamma' + 2\mathfrak{E}\alpha''$.
$\mathfrak{F} = +2\mathfrak{A}\varepsilon - 2\mathfrak{C}\delta' + 2\mathfrak{E}\gamma'' + 2\mathfrak{G}\alpha'''$.
$\mathfrak{H} = -2\mathfrak{A}\zeta + 2\mathfrak{E}\varepsilon' - 2\mathfrak{E}\delta'' + 2\mathfrak{G}\gamma''' + 2\mathfrak{J}\alpha^{IV}$
u. s. f.

Hieraus folgt:

I. $\alpha = \frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{n}$.

II. $\beta = \frac{1}{2}$

III. $2\mathfrak{A}\gamma = \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}\alpha' = \mathfrak{B}(1 - \frac{2}{3})$.
$\gamma = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

IV. $2\mathfrak{A}\delta = -\mathfrak{D} + 2\mathfrak{C}\gamma' + 2\mathfrak{E}\alpha'' = \mathfrak{D}(-1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5})$.
$\delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{n.n-1.n-2.}{2.\ 3.\ 4} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5}$.

V. $2\mathfrak{A}\varepsilon = \mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\delta' - 2\mathfrak{E}\gamma'' - 2\mathfrak{G}\alpha'''$
$= \mathfrak{F}(1 + \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{7})$.
$\varepsilon = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{n.n-1 \ldots n-4.}{2.\ 3 \ldots 6} \cdot \frac{1}{4 \cdot 7}$

VI. $2\mathfrak{A}\zeta = -\mathfrak{H} + 2\mathfrak{C}\varepsilon' - 2\mathfrak{E}\delta'' + 2\mathfrak{G}\gamma''' + 2\mathfrak{J}\alpha^{IV} = \mathfrak{H}(-1 + \frac{4}{5} - \frac{14}{15} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}) = \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{15}$.

Digitized by Google

$$\zeta = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{30} = \frac{n.n-1...n-6.}{2.\ 3.\ \ldots\ 8} \cdot \frac{1}{30}.$$

43. Die weitere Berechnung wird beschwerlicher und ist nicht nöthig, da das Gesetz der Coefficienten in S. x^n, was den einen Factor betrifft, schon offenbar ist. Der numerische Factor ist, wie man sieht, der absolute Coefficient des letzten Gliedes in der S. x^n für gerade n. Es ist nämlich für $n = 2$, das letzte Glied in S. $x^2 = \gamma x = \frac{1}{6} x$. In S. x^4 ist das letzte Glied $= -\delta x = -\frac{1}{30} x$. In S. x^6 ist es $= \varepsilon x = \frac{1}{42} x$, u. s. f.

44. Man bezeichne die Coefficienten des letzten Gliedes in der Summe der geraden Potenzen nach der Reihe durch A, B, C, D, E, F, etc. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so ist

$$S.x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tfrac{1}{2} x^n + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} A x^{n-1} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} B x^{n-3}$$

$$+ \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} C x^{n-5} - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}} D x^{n-7} + \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}} E x^{n-9} - \text{etc.}$$

Der zu x^{n-m} gehörige Binomial-Coefficient ist der $(m+1)$te in der Potenz $(1+x)^{n+1}$, und die damit verbundene Zahl die $\frac{1}{2}(m+2)$te aus der Reihe A, B, C, D, etc. Für ein gerades n ist das letzte Glied $= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} N$, wo N die $\frac{1}{2}n$te in jener Reihe, oder der Coefficient des letzten Gliedes in S. x^n ist. Für ein ungerades n ist das letzte Glied $= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} N$, wo N die $\frac{1}{2}(n-1)$te Zahl ist.

45. Die Zahlen A, B, C, D etc. heißen die Bernoullischen Zahlen, von ihrem Erfinder, Jakob Bernoulli, der die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen mittelst der Endcoefficienten in den Summen der geraden Potenzen und der Binomial-Coefficienten darstellt in der Schrift: Ars conjectandi, p. 97. Er zeigt,

Digitized by Google

wie sie folgweise gefunden werden können, leichter als aus den Gleichungen in 42.

46. Es wird nämlich S. $x^n = 1$ für $x = 1$, also ist die Summe der Coefficienten $= 1$, d. i. $1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}A - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}B + \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}C - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}D + \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}E - \text{etc.}$

Hat man nun die Zahlen A, B, C, etc. bis auf die $(n-1)$te gefunden, so findet man aus dieser Gleichung die nte.

Z. B. Es sey gefunden $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = \frac{1}{30}$, und es soll E für $n = 10$ gefunden werden, so setze man in dieser Gleichung $n = 10$, also $\mathfrak{A} = 11$; $\mathfrak{B} = 55$; $\mathfrak{D} = 330$; $\mathfrak{F} = 462$; $\mathfrak{H} = 165$; $\mathfrak{K} = 11$, und $1 = \frac{1}{11} + \frac{1}{2} + 5.\frac{1}{6} - 30.\frac{1}{30} + 42.\frac{1}{42} - 15.\frac{1}{30} + 1.E.$ so ist $E = \frac{5}{66}$.

Hieraus wird die folgende Zahl F gefunden, wenn $n = 12$ gesetzt wird. Es ist $1 = \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + 6A - 55B + 132C - 99D + 22E - F$. Daraus $F = \frac{691}{2730}$.

47. Man bezeichne die nte Bernoullische Zahl durch N, die nächst vorhergehende durch $\overset{-1}{N}$, die dieser zunächst vorhergehende durch $\overset{-2}{N}$, u. s. f. Ferner setze man in der Gleichung (46.) statt n das doppelte $2n$, und lasse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. die Binomial-Coefficienten in der $(2n+1)$ten Potenz seyn. So ist, nach der Multiplication durch, $\mathfrak{A} = 2n+1$,

$$\mathfrak{A} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}A - \mathfrak{D}B + \mathfrak{F}C \ldots\ldots \pm \mathfrak{C}\overset{-2}{N} \mp \mathfrak{C}\overset{-1}{N} \pm \mathfrak{A}N.$$

Oder:

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots\ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B \pm \mathfrak{B}A = \pm\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - 2).$$

Es werden nämlich die erste, zweyte, dritte, mte Bernoullische Zahl mit dem zweyten, vierten, sechsten, 2mten Binomial-Coefficienten verbunden. Nun ist $\mathfrak{A}$

der erste und auch der 2n te Binomial-Coefficient, daher wird die Zahl N mit X verbunden, und XN ist zugleich das letzte Glied in der Formel 46. Das Vorzeichen ist + oder —, nachdem die Stellenzahl von N. ungerade oder gerade ist.

Diese Formel für die Bernoullischen Zahlen theilt Sebastian Canterzani in den Memorie della Società Italiana, T. XI. 1804, p. 173 mit, als eine neue und bequemere in Vergleichung mit den Eulerischen, Calc. diff. §. 122, 123. Ich habe sie schon in dem ersten Theile dieses Wörterbuchs, in dem Artikel, Bernoullische Zahlen, angewandt. Canterzani ist indirecte auf die Formel gekommen, zufälliger Weise bey der Entwickelung einer gewissen Reihe. Die Rechnung ist bey ihm weitläufig.

48. Die Bernoullischen Zahlen lassen sich noch durch andere Formeln, als die jetzt gefundene ist, darstellen. Dadurch entdecken sich auch Relationen zu andern Größen. Sie kommen in verschiedenen analytischen Zusammensetzungen als Ingredientien der Coefficienten vor. S. Artikel, Bernoullische Zahlen, und Cyklometrie.

IV. Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen.

49. Eine Reihe $A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 -$ etc. kann man ansehen als entstanden durch die Division einer Function von z durch eine andere Function dieser veränderlichen Größe. Die Summe der ganzen, ins Unendliche fortlaufenden Reihe ist für jeden Werth von z der Werth des Quotienten, welchen der Dividendus durch den Divisor dividirt giebt. Man muß aber hier Summe oder Aggregat nicht schlechthin im arithmetischen Verstande nehmen, da die Reihe sehr divergent seyn kann. Sie stellt nur allgemein die Form des entwickelten Quotienten dar. Es müssen nun zwey Functionen von z gesucht werden, von der Beschaffenheit, daß die Coefficienten A, B,

Digitized by Google

C, D, etc. Potenzen der ganzen Zahlen nach der Reihe werden. Setzt man dann $z = 1$, so giebt der Quotient von den beiden Functionen die Summe der Potenzen mit abwechselnden Vorzeichen.

50. Es ist $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \text{etc.}$

Setzt man $z = 1$, so ist $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$

51. Es sey $\frac{a - bz}{(1+z)^2} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - \text{etc.}$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$, und setzt die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen auf beiden Seiten einander gleich, so ist $A = a$; $2A - B = b$; $C - 2B + A = 0$; $D - 2C + B = 0$, u. s. f. Die Coefficienten absolut genommen sind daher Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung (arithm. Reihen höherer Ordn. 3.) Man setze nun für dieselben die ganzen Zahlen 1, 2, 3, etc. so ist $a = 1$; $b = 0$, und $\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z - 4z^3 + 5z^4 -$ etc. Setzt man $z = 1$ so ist

$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$

52. Es sey $\frac{a - bz + cz^2}{(1+z)^3} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \text{etc.}$ so ist $A = a$; $B - 3A = b$; $C - 3B + 3A = c$; $D - 3C + 3B - A = 0$, u. s. f. Die Coefficienten A, B, C, etc. absolut genommen sind daher Glieder einer arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung. Setzt man für dieselben die Quadrate der natürlichen Zahlen, die ebenfalls eine solche Reihe ausmachen, so ist $a = 1$; $b = 1$; $c = 0$, und es ist

$\frac{1 - z}{(1+z)^3} = 1 - 4z + 9z^2 - 16z^3 + 25z^4 - \text{etc.}$

Wird $z = 1$ genommen, so ist

$0 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.}$

Digitized by Google

53. Es sey $\frac{a - bz + cz^2 - dz^3}{(1+z)^4} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 +$ etc. so sind die Coefficienten in der Reihe Glieder einer arithmetischen Reihe der dritten Ordnung. Setzt man $a = 1; b = 4; c = 1; d = 0$, so ist

$$\frac{1 - 4z + z^2}{(1+z)^4} = 1 - 8z + 27z^2 - 64z^3 + \text{etc.}$$

Wird $z = 1$ genommen, so ist

$$-\tfrac{1}{8} = 1 - 8 + 27 - 64 + 125 - 216 + \text{etc.}$$

54. Auf eine ähnliche Art wird gefunden

$$\frac{1 - 11z + 11z^2 - z^3}{(1+z)^5} = 1 - 16z + 81z^2 - 256z^3 + 625z^4 - \text{etc.}$$

und für $z = 1$ ist

$$0 = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + 7^4 - \text{etc.}$$

55. Gleichfalls ist

$$\frac{1 - 26z + 66z^2 - 26z^3 + z^4}{(1+z)^6} = 1 - 2^5 z + 3^5 z^2 - 4^5 z^3 + 5^5 z^4 - 6^5 z^5 + \text{etc.}$$

Für $z = 1$ ist

$$+\tfrac{1}{4} = 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.}$$

56. Diese Methode gewährt nur einzelne Formeln, deren Relation gegen einander selbst oder gegen andere Reihen hieraus nicht ersichtlich wird. Dieses zu erhalten ist eine tiefere Analysis erforderlich, welche auf folgendem Wege angestellt werden kann.

57. Man setze statt z in (50.) die Exponentialgröße e^u, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen sey. Dann ist u der Logarithme der Zahl e^u. (Logarithmus 2.).

Man setze $V = \frac{1}{1 + e^u}$, so ist

$$V = 1 - e^u + e^{2u} - e^{3u} + e^{4u} - e^{5u} + \text{etc.}$$

Nun ist (Logarithmus, 29.)

$$e^u = 1 + u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 + \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

Digitized by Google

$e^{2u} = 1 + 2u + \frac{1}{2} \cdot 2^2 u^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^3 u^3 + \frac{1}{24} \cdot 2^4 u^4 + \frac{1}{120} 2^5 u^5 + \text{etc.}$

$e^{3u} = 1 + 3u + \frac{1}{2} \cdot 3^2 u^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^3 u^3 + \frac{1}{24} \cdot 3^4 u^4 + \frac{1}{120} \cdot 3^5 u^5 + \text{etc.}$

u. s. f.

Folglich ist, wenn alle Glieder nach den Potenzen von u geordnet werden,

$V = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$
$-(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.})u$
$-\frac{1}{2}(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{etc.})u^2$
$-\frac{1}{6}(1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{etc.})u^3$
$-\frac{1}{24}(1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.})u^4$
$-\frac{1}{120}(1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.})u^5$
$-\text{etc.}$

Aus den beiden Formen von V müssen die Werthe der Coefficienten von den Potenzen der u hergeleitet werden. Das erste Glied der Reihe, der Coefficient von u^0, ist $= \frac{1}{2}$.

58. Da die Coefficienten von u^2 und $u^4 = 0$ sind (51, 53.), so ist zu vermuthen, daß die Summen der geraden Potenzen mit abwechselnden Vorzeichen überhaupt Null seyn werden.

Man nehme u negativ, und setze $V' = \frac{1}{1 + e^{-u}} = \frac{e^u}{e^u + 1}$, so ist $V' = V \cdot e^u$, das ist $V' = e^u - e^{2u} + e^{3u} - e^{4u} + e^{5u} - e^{6u} + \text{etc.}$

Folglich $V' = 1 - V$. Nun ist, wenn man die absoluten Coefficienten von u, u^2, etc. durch A, B, etc. bezeichnet,

$V = \frac{1}{2} - Au - Bu^2 - Cu^3 - Du^4 - Eu^5 - \text{etc.}$

und, wenn u negativ genommen wird,

$V' = \frac{1}{2} + Au - Bu^2 + Cu^3 - Du^4 + Eu^5 - \text{etc.}$

Da V' oder $1 - V = \frac{1}{2} + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + \text{etc.}$ ist, so kann diese Reihe der für V' nicht gleich seyn, wenn nicht $B = 0$; $D = 0$; $F = 0$, über-

Digitized by Google

haupt die Coefficienten der geraden Potenzen von $u = 0$ sind.

59. Man setze $V = \frac{1}{2} - \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5 + \delta u^7 -$ etc. Dieser Ausdruck für V und der Werth desselben, $\frac{1}{1+e^u}$, sind beide zu differentiiren, um durch die Vergleichung der Differentiale zu Relationen zwischen den Coefficienten α, β, γ, δ, etc. zu gelangen.

Es ist $\partial . e^u = e^u \partial u$ (Differentialformeln, 14.), also $\partial . \frac{1}{1+e^u} = -\frac{e^u \partial u}{(1+e^u)^2} = -(1-V) V \partial u$, weil $e^u = \frac{1-V}{V}$. Also ist $\frac{\partial V}{\partial u} = -(1-V) V$. Die für V angenommene Reihe giebt $\frac{\partial V}{\partial u} = -\alpha + 3\beta u^2 - 5\gamma u^4 + 7\delta u^6 - 9\varepsilon u^8 +$ etc. Da

$$1 - V = \frac{1}{2} + \alpha u - \beta u^3 + \gamma u^5 - \text{etc.}$$
$$V = \frac{1}{2} - \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5 + \text{etc.}$$

ist, so ist

$$(1-V) V = \frac{1}{4} - (\alpha u - \beta u^3 + \gamma u^5 - \text{etc.})^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für $-\frac{\partial V}{\partial u}$, so ergeben sich folgende Relationen:

$\alpha = \frac{1}{4}$.
$3\beta = \alpha^2$.
$5\gamma = 2\alpha\beta$.
$7\delta = 2\alpha\gamma + \beta^2$.
$9\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma$.
$11\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2$.
$13\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$.
$15\vartheta = 2\alpha\eta + 2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2$.
etc.

60. Die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen seyn für die

Digitized by Google

ersten Potenzen = a; für die dritten = b, für die fünften = c, u. s. f. so ist

$$a = \alpha \; ; \; b = -1.2.3\,\alpha \; ;$$
$$c = +1.2.3.4.5\,\gamma \; ; \; d = -1.2\ldots 7\,\delta \; ;$$
$$e = +1.2..9\,\varepsilon \; ; \; f = -1.2..11\,\zeta \; ;$$

etc.

Diese Werthe substituire man für α, β, γ, etc. in den Formeln (59.), jedoch nur die absoluten Werthe, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, so ist

$$a = 1.$$
$$b = 2.a^2.$$
$$c = 4.2ab.$$
$$d = 6.2ac + \frac{6.5.4.}{1.2.3.}.b^2.$$
$$e = 8.2ad + \frac{8.7.6.}{1.2.3.}.2bc.$$
$$f = 10.2ae + \frac{10.9.8.}{1.2.3.}.2bd + \frac{10..6}{1..5}.c^2.$$
$$g = 12.2af + \frac{12.11.10}{1.2.3}.2be + \frac{12..8}{1..5}.2cd.$$
$$h = 14.2ag + \frac{14.13.12}{1.2.3}.2bf + \frac{14..10}{1..5}.2ce + \frac{14...8}{1..7}.d^2.$$

etc.

61. Es ist sehr merkwürdig, daß die Relationen in (59.) ganz dieselben sind mit den Relationen der Coefficienten in der Reihe $\text{tang}\,\varphi = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 + d\varphi^7 + \text{etc.}$ (Cyklometrie, 14.). Die Tangenten der Winkel können als Logarithmen unmöglicher Größen betrachtet werden. Daher entsteht jene Übereinstimmung. Dort ist $a = 1$, hier ist $\alpha = 1$.

62. Man drücke die Zahlen β, γ, δ, etc. in (59.) durch α aus, so ist

$3\beta = \alpha^2$; $3.5\gamma = 2\alpha^3$; $3^2.5.7\delta = 17\alpha^4$;
$3^2.5.7.9\varepsilon = 62\alpha^5$; $3^2.5^2.7.9.11\zeta = 1382\alpha^6$, etc.
Die Factoren von den Potenzen der α sind ganz dieselben mit den Zählern der Coefficienten von φ, a. a. O. und die Zahlen α, β, γ, δ, etc. selbst sind diese Coefficienten mit den Potenzen von α nach der Reihe multiplicirt. Dieses führt daher, daß die Formeln für a, b, c, d, etc. daselbst dieselben mit denen für α, β, γ, δ, etc. sind, nur daß $a = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ ist. Die Werthe von b, c, d, etc. werden durch a eben so ausgedruckt, wie die von β, γ, δ, etc. durch α.

63. In dem Artikel, Bernoullische Zahlen (5), sind die Zahlen α, β, γ, δ, etc. eingeführt, welche zu jenen eine ähnliche Relation haben, als hier α, β, γ, etc. zu den Summen der $\pm$ Potenzen. Die Formeln für jene (daf. 8.) sind auch denen für diese ähnlich. Druckt man jene durch das zugehörige α aus, so ist
$5\beta = \alpha^2$; $5.7\gamma = 2\alpha^3$;
$5^2.7.9\delta = 27\alpha^4$; $5^2.7.9.11\varepsilon = 450\alpha^5$;
$5^3.7^2.9.11.13\zeta = 12438\alpha^6$, etc.

64. Man unterscheide diese Zahlen durch die Strichelung von α, β, γ etc. die sich auf die Aggregate der Potenzen beziehen, und suche ihre Verhältnisse. Man wird leicht finden, daß
$\alpha : \alpha' = 3 : 1$; $\beta : \beta' = 15 : 1$; $\gamma : \gamma' = 63 : 1$;
$\delta : \delta' = 255 : 1$; $\varepsilon : \varepsilon' = 1023 : 1$;
$\zeta : \zeta' = 4095 : 1$, u. s. w.
Das ist
$\alpha = (4-1)\alpha'$; $\beta = (4^2-1)\beta'$;
$\gamma = (4^3-1)\gamma'$; $\delta = (4^4-1)\delta'$
$\varepsilon = (4^5-1)\varepsilon'$; $\zeta = (4^6-1)\zeta'$;
etc.

65. Man nehme statt α, β, γ, etc. die Aggregate der Potenzen, mit dem zugehörigen Divisor, eben so statt α', β', γ', etc. die Bernoullischen Zahlen, so ergeben

Digitized by Google

sich für die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen folgende Werthe:

$$a=\frac{(4-1)A}{2};\ b=-\frac{(4^3-)B}{4};$$

$$c=\frac{(4^3-1)C}{6};\ d=-\frac{(4^4-1)D}{8};$$

$$e=\frac{(4^5-1)E}{10};\ f=-\frac{(4^6-1)F}{12};$$

etc.

Dadurch ist $a=+\frac{1}{4}$; $b=-\frac{1}{8}$; $c=\frac{1}{4}$;
$d=-\frac{17}{160}$; $e=+\frac{31}{832}$; $f=-\frac{691}{8192}$;
etc.

66. Diese Werthe folgen auch aus den Werthen der Coefficienten von φ in der Formel für tang φ in Cyklometrie, 17. Denn diese sind, wie vorher (62.) bemerkt worden, $\frac{\alpha}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha^2}, \frac{\gamma}{\alpha^3}, \frac{\delta}{\alpha^4}$, etc. das ist $1, 4^2\beta, 4^3\gamma, 4^4\delta$, etc. Vergleicht man diese mit den Werthen der Coefficienten in 17, a. a. O. wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc. die Bernoullischen Zahlen sind, welche hier A, B, C, etc. heißen, so ist $\beta = \frac{(4^2-1)}{1\ldots4}B$; $\gamma=\frac{4^3-1}{1\ldots6}C$; $\delta=\frac{4^4-1}{1\ldots8}$, u. s. f. woraus sogleich die Werthe von b, c, d, etc. folgen. Der Coefficient von φ ist $=1$, weil $\mathfrak{A}$ oder $A=\frac{1}{6}$ ist. Die Summe $\pm$ der ersten Potenzen ist $\frac{1}{4}$, welches auch der Werth von $\frac{4-1}{2}A$ ist.

67. Die Aggregate der ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen sind immer $=0$.

Es ist $1-\frac{e^u}{1+e^{2u}}=1-e^u(1-e^{2u}+e^{4u}-$ etc.
$=1-e^u+e^{3u}-e^{5u}+e^{7u}-$ etc. Setzt man $-u$

Digitized by Google

statt $+u$, so bleibt der Bruch ungeändert. Denn es ist $\frac{e^{-u}}{1+e^{-2u}} = \frac{e^{-u}.e^{2u}}{e^{2u}+1} = \frac{e^{u}}{e^{2u}+1}$. Entwickelt man die Potenzen in dem Quotienten, und ordnet die Glieder nach den Potenzen von u, wie in (57.), so entsteht eine Reihe von der Form $\frac{1}{2} - Au - \frac{1}{2}Bu^2 - \frac{1}{3}Cu^3 - \frac{1}{24}Du^4 - \frac{1}{120}Eu^5 -$ etc. worin A, C, E, etc. die Aggregate der ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen, mit abwechselnden Vorzeichen; B, D, F, etc. die Aggregate der geraden Potenzen der ungeraden Zahlen auch mit abwechselnden Vorzeichen sind. In dieser Reihe ändern die Glieder mit ungeraden Potenzen von u ihr Vorzeichen, wenn u negativ gesetzt wird. Da aber die ganze Reihe denselben Werth für $-u$ wie für $+u$ behält, so müssen die Coefficienten A, C, E, etc. der ungeraden Potenzen $= 0$ seyn.

Oder: es ist $\frac{e^{u}}{1+e^{2u}} = \frac{1}{e^{-u}+e^{u}}$. Der Nenner dieses Bruches ist $= 2(1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 +$ etc.). Der Quotient von 1 durch diese Reihe dividirt enthält blos die geraden Potenzen von u.

68. Man setze $1 - \frac{e^{u}}{1+e^{2u}} = V$, also $V = 1 - e^{u} + e^{3u} - e^{5u} + e^{7u} -$ etc. Entwickelt man die Potenzen von e nach den Potenzen von u, so ist, weil die mit ungeraden Exponenten wegfallen,

$V = 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.
$-\frac{1}{2}(1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 -$ etc.$)u^2$
$-\frac{1}{24}(1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 -$ etc.$)u^4$
$-\frac{1}{720}(1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 -$ etc.$)u^6$
$-$ etc.

69. Da $\frac{e^{u}}{1+e^{2u}} = \frac{1}{e^{-u}+e^{u}}$ ist, und $e^{-u} + e^{u} = 2(1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{720}u^6 +$ etc.) ist, so werden die Aggregate der geraden Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen mittelst der Entwicke-

Digitized by Google

ung des Bruchs $\frac{1}{1+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{24}u^4+\frac{1}{720}u^6+\text{etc.}}$

aus den Coefficienten der daraus hervorgehenden Reihe ge-
funden. Man setze diese Reihe $= 1-\alpha u^2+\beta u^4-\gamma u^6$
$+\delta u^8-$ etc. und statt der gebrochenen Coefficienten von
u zur Bequemlichkeit die Bezeichnungen a, b, c, d,
e, etc. so ist

$\alpha = a.$
$\beta = a\alpha - b.$
$\gamma = a\beta - b\alpha + c.$
$\delta = a\gamma - b\beta + c\alpha - d.$
$\varepsilon = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha + e,$
u. s. f.

Die numerische Entwickelung giebt

$$\alpha = \frac{1}{2};\ \beta = \frac{5}{1.2.3.4};\ \gamma = \frac{61}{1.2...6};\ \delta = \frac{1385}{1.2...8};$$

$$\varepsilon = \frac{50521}{1.2...10};\ \text{etc.}$$

Da $V = 1-\frac{1}{2}(1-\alpha u^2+\beta u^4-\gamma u^6+\text{etc.})$
$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha u^2-\frac{1}{2}\beta u^4+\frac{1}{2}\gamma u^6-$ etc. ist, so ist
$S.(1-3^2+\text{etc.}) = +\frac{1}{2}$; $S.(1-3^4+\text{etc.}) = +\frac{5}{2}$;
$S.(1-3^6+\text{etc.}) = -\frac{61}{2}$; $S.(1-3^8+\text{etc.}) = +\frac{1385}{2}$;
$S.(1-3^{10}+\text{etc.}) = -\frac{50521}{2}$; u. s. f.

Die Coefficienten α, β, γ, δ, etc. sind dieselben mit denen in der Reihe für $\sec\varphi$, in Cyklometrie, 22. nur daß daselbst alle das Vorzeichen + haben. Die Werthe der Zähler hat Euler bis zum zehnten berechnet. Calc. diff. P. II. §. 224.

70. Den Satz, daß $S.\pm 2^{2n} = 0$ ist, hat Euler in den Instit. calc. diff. P II §. 185. aus andern Gründen, als hier angewandt sind, hergeleitet. Eben daselbst finden sich auch die Formeln für $S.\pm 2^{2n+1}$. Ein vorzüglicher Analyst, Gregorio Fontana, findet die von Euler gebrauchte Beweisart nicht völlig überzeugend. Memorie della Società Italiana, T. II. p. 420. Er

Digitized by Google

wählt deswegen einen andern Weg durch fortgesetzte Differentiation gewisser Reihen. Allein dieses Verfahren ist zu verwickelt, als daß es einen sichern Schluß gewähren könnte. So urtheilt auch Pfaff in seiner Schrift: Versuch einer neuen Summationsmethode. Berlin 1788. In dieser Schrift sind die Formeln für $S. \pm z^n$ und $S. \pm (2z+1)^n$ aus goniometrischen Sätzen hergeleitet. Die zweyte Gattung hat Euler nicht. Die von mir angewandte Methode wird die einfachste unter allen seyn.

V. Summen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

71. Reciproke Potenzen sind die Quotienten der Einheit durch die Potenz einer Zahl dividirt. Die Reihen derselben, wenn die Potenzen der natürlichen Zahlen gerade Exponenten haben, werden vermittelst des Umfanges eines Kreises summirt, auch die Reihen mit geraden Potenzen der ungeraden Zahlen. Der Zusammenhang dieser Summen mit der Rectification des Kreises ist so merkwürdig, daß er verdient entwickelt zu werden.

72. Es ist (Cyklometrie, 5 und 26.)

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot 5}\varphi^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot 7}\varphi^7 + \text{etc.}$$

und

$$\sin\varphi = \varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{9\pi^2}\right).\text{ etc.}$$

Der Kürze wegen setze man für die Coefficienten von φ Buchstaben, in der erstern Formel 1, A, B, C, etc. in der zweyten α, β, γ, etc. so ist

$$1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.} =$$
$$(1-\alpha\varphi^2)(1-\beta\varphi^2)(1-\gamma\varphi^2)(1-\delta\varphi^2).\text{ etc.}$$

Nun ist, wenn das Product entwickelt wird, (Buchstabenrechnung, 19.) $A = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.} =$ der Summe der Unionen; $B = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta\ldots+\beta\gamma+\beta\delta\ldots+\gamma\delta\ldots+\text{etc.} =$ der Summe der Bi-

Digitized by Google

nionen; C = der Summe der Ternionen; D = der Summe der Quaternionen, u. s. f.

Ferner sey P die Summe der α, β, γ, etc. als Wurzeln betrachtet; Q die Summe ihrer Quadrate; R die Summe ihrer Würfel; S die Summe der Biquadrate, u. s. f. so ist (Combination, 43, und combinatorische Analysis, 54.)

$P = A.$

$Q = AP - 2B.$

$R = AQ - BP + 3C.$

$S = AR - BQ + CP - 4D.$

u. s. f.

Daher ist

$$P = \frac{1}{1.2.3}; \quad Q = \frac{4}{1.2..5} \cdot \frac{1}{3}; \quad R = \frac{16}{1.2..7} \cdot \frac{1}{3};$$

$$S = \frac{64}{1.2..9} \cdot \frac{3}{5}; \quad T = \frac{256}{1.2...11} \cdot \frac{5}{3}; \quad U = \frac{1024}{1.2...13} \cdot \frac{691}{105};$$

etc.

Das Gesetz des ersten Factors in diesen Brüchen ist offenbar, nicht für den zweyten Factor. Man gebe diesen Summen aber folgende Gestalt:

$$P = \frac{2}{1.2} \cdot \frac{1}{6}; \quad Q = \frac{8}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{30}; \quad R = \frac{32}{1.2..6} \cdot \frac{1}{42};$$

$$S = \frac{128}{1.2..8} \cdot \frac{1}{30}; \quad T = \frac{512}{1.2..11} \cdot \frac{5}{66}; \quad U = \frac{2048}{1.2..12} \cdot \frac{691}{2730};$$

etc.

wo die zweyten Factoren die Bernoullischen Zahlen sind.

73. Demnach ist, wenn die Bernoullischen Zahlen hier durch A, B, C, D, etc. und die Summen der reciproken geraden Potenzen ohne Ende genommen, durch

$S.\left(1,..\frac{1}{i^{2n}}\right)$ bezeichnet werden,

$$S.\left(1...+\frac{1}{i^2}\right) = \frac{2A}{1.2}\pi^2.$$

$$S.\left(1,..+\frac{1}{i^4}\right) = \frac{2^3 B}{1..4}\pi^4$$

Digitized by Google

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^6}\right) = \frac{2^6 \mathfrak{E}}{1..6}\pi^6.$$

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^8}\right) = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1..8}\pi^8.$$

u. s. f.

74. Diese Werthe sind zwar durch Induction gefunden; allein da die Reihen, woraus sie entspringen, eine regelmäßige Bildung haben, und sie daraus auf eine regelmäßige Art hergeleitet werden, so muß für die Summen ein Gesetz vorhanden seyn. Da ein solches ganz unzweydeutig gefunden ist, so ist es das richtige.

75. Die Factoren der Potenzen von π sind die halben Coefficienten des Winkels φ in der Reihe für cotang φ, Cyklometrie, 16. absolut genommen. Wie dieses mit den Summen der reciproken Potenzen zusammenhange, ist der Mühe werth zu untersuchen.

76. Die Reihe für die Cotangente ist der Quotient der Reihe für cos φ dividirt durch sin φ. Es ist, nach der vorher angenommenen Bezeichnung, $\sin\varphi = \varphi - A\varphi^5 + B\varphi^5 - C\varphi^7 + D\varphi^9 -$ etc. Ferner ist (Cyklometrie, 6.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.4}\varphi^4 - \frac{1}{1..6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

oder

$$\cos\varphi = 1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + 9D\varphi^8 - \text{etc.}$$

also ist

$$\cot\varphi = \frac{1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + \text{etc.}}{\varphi - A\varphi^5 + B\varphi^5 - C\varphi^7 + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^6 - d\varphi^7 - \text{etc.}$$

Man entwickele ferner den Quotienten

$$\frac{A - 2Bz + 3Cz^2 - 4Dz^3 + \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - \text{etc.}}$$, und setze denselben $= P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 +$ etc. so sind die Werthe von P, Q, R, S, etc. eben dieselben, welche für

Digitized by Google

die Summen der Potenzen in (72.) gefunden sind. Man multiplicire die gebrochne Function von z und die ihr gleiche Reihe durch 2z, und ziehe beides von 1 ab, so erhält man

$$\frac{1 - 3Az + 5Bz^2 - 7Cz^3 + 9Dz^4 - \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - \text{etc.}} = 1 - 2Pz - 2Qz^2 - 2Rz^3 - 2Sz^4 - \text{etc.}$$

Nun setze man φ^2 statt z, und dividire beiderseits durch φ, so ist

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - 2P\varphi - 2Q\varphi^3 - 2R\varphi^5 - 2S\varphi^7 - \text{etc.}$$

Oder $P = \frac{1}{2}a$; $Q = \frac{1}{2}b$; $R = \frac{1}{2}c$, u. s. f. Dieses bestätigt das vorher gefundene Gesetz für die Summen der reciproken Potenzen.

77. Die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen werden auf ähnliche Art gefunden. Es ist (Cyklometrie, 6 und 26.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{1...4}\varphi^4 - \frac{1}{1..6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

und

$$\cos\varphi = \left(1 - \frac{4\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\varphi^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\varphi^2}{25\pi^2}\right). \text{ etc.}$$

Nun setze man $A = \frac{1}{1.2}$; $B = \frac{1}{1..4}$; $C = \frac{1}{1..6}$; u. s. w. ferner $\alpha = \frac{4}{\pi^2}$; $\beta = \frac{4}{9\pi^2}$; $\gamma = \frac{4}{25\pi^2}$; etc. Hier ist wiederum A die Summe der Unionen, B die Summe der Binionen, C der Ternionen aus α, β, γ, etc. u. s. f. Die Bedeutungen von P, Q, R, etc. bleiben wie in (72.), und ihre Relationen zu A, B, C, etc. sind dieselben wie dort. Nun ist nach diesen Formeln

$$P = \frac{1}{1.2}; \quad Q = \frac{1}{1..3}; \quad R = \frac{8}{1.2..5}; \quad S = \frac{136}{1.2...7};$$

$$T = \frac{3968}{1.2..9}; \text{ etc.}$$

78. Es ist nicht leicht, hier ein Gesetz der Fortschreitung zu entdecken, auch wenn man die Bernoulli-

Digitized by Google

schen Zahlen einführt. Es ist $P = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{6}$; $Q = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{30}$; $R = 2 \cdot \frac{63}{3 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{42}$; $S = 1 \cdot \frac{255}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{30}$; $T = 2 \cdot \frac{1023}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{5}{66}$. wo $3 = 4 - 1$; $15 = 4^2 - 1$; $63 = 4^3 - 1$; $255 = 4^4 - 1$; $1023 = 4^5 - 1$, ist.

Vergleicht man diese Summen mit den Coefficienten von φ in der Reihe für tang φ, (Cyklometrie, 14.), so findet sich, daß sie die Hälften dieser sind.

79. Dieses ergiebt sich allgemein folgendergestalt. Es sey

$\cos\varphi = 1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.}$ so ist

$\sin\varphi = \varphi - 4B\varphi^3 + 6C\varphi^5 - 8D\varphi^7 + \text{etc.}$ weil

$A = \frac{1}{1 \cdot 2}$; $B = \frac{1}{1 \cdot \ldots 4}$, u. s. w. ist.

Ferner sey, wie vorher,

$$\frac{A - 2Bz + 3Cz^2 - 4Dz^3 + 5Ez^4 - \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}} = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + \text{etc.}$$

so sind P, Q, R, etc. die Summen der Potenzen von den in A enthaltenen Theilen nach 72. Nun multiplicire man die beiden gleichen Functionen jede durch 2, setze im Zähler für A seinen Werth $\frac{1}{2}$, vertausche z mit φ^2, und multiplicire dann beide Functionen mit φ, so wird die gebrochne Function $= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\,\varphi$, und es ist

$\text{tang}\,\varphi = 2P\varphi + 2Q\varphi^3 + 2R\varphi^5 + 2S\varphi^7 + \text{etc.}$

Die allgemeinen Werthe der Coefficienten von φ sind in Cyklometrie, 17. angegeben. Dadurch ist

$$2P = \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1 \cdot 2}; \quad 2Q = \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$2R = \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots 6}; \quad 2S = \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots 8};$$

$$2T = \frac{4^5(4^5-1)\mathfrak{E}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots 10}; \text{ etc.}$$

80. Folglich ist

Digitized by Google

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{(4-1)\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{2}.$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{(4^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{2}.$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \frac{(4^5-1)\mathfrak{C}}{1.2..6} \cdot \frac{\pi^6}{2}.$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.} = \frac{(4^4-1)\mathfrak{D}}{1.2...8} \cdot \frac{\pi^8}{2}.$$

u. s. w.

Die Werthe dieser Summen sind die Coefficienten in der Reihe für $\text{tang} \frac{1}{2}\varphi$, durch 4 dividirt und mit den Potenzen von π^2 multiplicirt.

81. Die Summen der reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen entstehen aus den in (73.) angegebenen durch die Abziehung der zuletzt in (80.) gefundenen. Es ist

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{2}.$$

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{B}}{1..4} \cdot \frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{C}}{1..6} \cdot \frac{\pi^6}{2}.$$

u. s. f.

Die Factoren zu den Potenzen von π sind der vierte Theil der Coefficienten in der Reihe zu $\cot \frac{1}{2}\varphi$. Cyklometrie, 16.

82. Die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen können auch aus den Summen hergeleitet werden, worin sich alle Zahlen finden. Denn es sey

$$\mathfrak{M} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$$

und diese Reihe werde durch 2^n dividirt, so ist

Digitized by Google

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

Zieht man diese Reihe von jener ab, so ist

$$\frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}$$

Setzt man für n die geraden Zahlen nach der Reihe, so erhält man aus den Formeln in (73.) die in (80).

83. Wenn die Reihe $\frac{M}{2^n}$ zweymahl genommen von der Reihe M abgezogen wird, so erhält man die Reihe der reciproken Potenzen mit abwechselnden Vorzeichen, nämlich $M - \frac{2M}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ Es ist

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.\ 2.}\,\pi^2.$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.\ .\ 4}\,\pi^4.$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.\ .\ 6}\,\pi^6.$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.\ .\ 8}\,\pi^8.$$

u. s. w.

Die Factoren zu den Potenzen von π sind die Hälften der Coefficienten von φ in der Reihe für cosec. φ. Cyklometrie 21.

84. Die Summen der reciproken ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen haben eine Beziehung auf die Coefficienten in der Reihe für die Secanten, deren Entwickelung aber zu umständlich ist, um hier ausgeführt zu werden. Es sey $\sec\varphi = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \text{etc.}$, so sind diese Summen nach der Folge der Potenzen:

I. 1. $\frac{\pi}{4}$, III. α. $\frac{\pi^3}{4^3}$. V. β. $\frac{\pi^5}{4^5}$.

Digitized by Google

VII. $\gamma. \frac{\pi^7}{4^4}$. IX. $\delta. \frac{\pi^9}{4^5}$. etc.

Man sehe Eulers Differentialrechnung, P. II. §. 224 — 226, und die Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 175. Die Summen der reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen mit einerley Vorzeichen haben keine Beziehung auf die Coefficienten in einer goniometrischen Reihe. Die numerischen Werthe, bis zu der 15ten Summe und bis auf die 16te Decimalstelle, hat Euler berechnet, a. a. O. §. 151. 152.

85. Die Summirung der reciproken Potenzen sowol aller ganzen Zahlen als der ungeraden allein hat Joh. Bernoulli entdeckt, auf dem Wege, der hier genommen ist, Opp. T. IV. nr. 152. Sein Bruder Jakob Bernoulli hatte die Summe der reciproken Quadrate nicht finden können, so sehr er sich darum bemühte. Er sagt daher, daß er sich sehr freuen würde, wenn jemand sie ihm mittheilte. De seriebus infinitis, p. 254. Nach derselben Methode, die Bernoulli gebraucht hat, fand auch Euler die Summe der reciproken Potenzen, in den Comm. Acad. Petrop. T. VII. a. a. 1734 et 1735, ohne etwas von Bernoulli's Verfahren zu wissen. Denn dessen Aufsatz steht in dem vierten Theile seiner Werke, der die ungedruckten Abhandlungen enthält, und 1742 herauskam. Euler trägt die Summirung der reciproken Potenzen ferner vor in der Introd. in Anal. Inf. T. I. cap. X. nachdem er in dem vorhergehenden gezeigt hatte, wie die Reihen für den Sinus und Cosinus eines Winkels in Factoren zerlegbar sind. Dieses leistet er, vermuthlich um einer unten anzuführenden Bedenklichkeit auszuweichen, durch die Zerlegung einer logarithmischen Function in Factoren. Allein der Gebrauch unendlich kleiner Größen und der Übergang von den logarithmischen Functionen zu den circularen durch das Unmögliche hat doch viele Unbequemlichkeit. Die allgemeinen Formen der Summen finden sich in dem angeführten Werke noch nicht. Diese giebt Euler für die reciprо-

Digitized by Google

ken geraden Potenzen aller ganzen Zahlen an in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 151. woselbst auch die numerischen Werthe derselben entwickelt sind. Die daselbst gebrauchte Methode gründet sich auf die Theorie der Reihen. Aus dieser werden auch die Formen von den Summen der reciproken geraden Potenzen von den ungeraden Zahlen, und aller Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen, daf. §. 187. hergeleitet. Die Übereinstimmung mit den Coefficienten in den Reihen für $\cot\varphi$, $\tang\frac{1}{2}\varphi$ und $\operatorname{cosec}\varphi$ ist nicht bemerkt. Nach einer andern Methode sind in demselben Werke §. 125. die Summen der reciproken geraden Potenzen aller Zahlen in einer allgemeinen Form dargestellt. Diese Methode nennt Euler zwar ein facile ratiocinium, doch sind die Gründe dazu ziemlich weit aus der Goniometrie hergeholt.

Euler hat in der Folge diese Summirungen wieder vorgenommen, und sie ganz unabhängig von dem Satze gemacht, daß jedem Sinus und Cosinus unzählig viele Bogen zugehören. Denn auf diesen gründen sich mittelbar seine vorigen Methoden. In den Opusculis analyticis, T. II. Petrop. 1785. leitet er die Summen aus dem Integral der Differentialformel, $\frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1+z^n}\,dz$, her. Es ist $\int\left(\frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}\right)dz = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$,

und $\int\left(\frac{z^{m-1}-z^{n-m-1}}{1+z^n}\right)dz = \frac{\pi}{n\tang\frac{m\pi}{n}}$.

86. Von Landen ist in den philosoph. Transactions eine neue Methode, die Summen gewisser Reihen zu finden, vorgetragen, worunter auch die reciproken sind. Sein Vortrag ist etwas verworren und weitschweifig. Die Methode für die letztern beruht darauf, daß log. nat. $\frac{1}{1-x}$ auf zweyerley Art dargestellt werden kann, wovon die eine unmögliche Größen enthält. Es ist nämlich log. (-1)

Digitized by Google

$= \pm \pi \sqrt{-1}$. Die Methode gewährt aber keine allgemeine Übersicht und Vergleichung. Für die Rechnung mit unmöglichen Größen giebt sie ein gutes Beyspiel.

87. Die vorher erwähnte Bedenklichkeit bey der in diesem Artikel gebrauchten Summirungsmethode betrifft die Zerlegung der unendlichen Reihe für den Sinus und Cosinus eines Winkels in Factoren. Joh. Bernoulli äußert sie selbst a. a. O. §. 12, sagt aber, daß die Entstehungsart der Reihe hinlänglich seyn möge sie zu heben. Es könnte nämlich gefragt werden, ob nicht jene Reihen vielleicht unmögliche oder fremde (nicht zu den Sinus und Cosinus gehörigen) Wurzeln enthalten möchten, wodurch freylich die Herleitung der Summe gefährdet werden würde. Ich glaube die Beantwortung genugthuend in der Cyklometrie. 8, gegeben zu haben, auch das. 20. einem Zweifel, den die Reihe für die Tangente erwecken könnte (Pfaff, a. a. O. S. 87.), begegnet zu seyn.

Potenz einer Hyperbel, s. Hyperbel, 9.

Potenzen, reguläre, irreguläre, gleichnamige (homogeneae), ungleichnamige (heterogeneae), sind Benennungen, die kaum noch vorkommen. Eine reguläre ist, woraus sich die Wurzel vollständig ziehen läßt, eine irreguläre ist das Gegentheil. Gleichnamige sind, Größen von gleich viel Dimensionen, in Zahlen solche, die denselben Exponenten haben. Ungleichnamige sind von entgegengesetzter Beschaffenheit.

Praktik, welsche Praktik insbesondere, ist in der Rechenkunst der Inbegriff von Regeln mit Leichtigkeit zu rechnen. Sie enthält die Vortheile, welche man sich beym Rechnen machen kann. Der zweyte Theil von Clausbergs Rechenkunst hat diese Überschrift. Der Beysatz, welsche, rührt daher, weil die praktische Rechenkunst, besonders die kaufmännische, in dem mittlern Zeitalter von Italien aus sich verbreitet hat, daher noch jetzt, und noch mehr vor nicht langer Zeit, die vielen italienischen Kunstwörter in dem kaufmännischen Rechnungswesen üblich sind.

Digitized by Google

Primzahl, einfache Zahl, (numerus primus) ist eine solche, welche keine ganze Zahlen zu Factoren hat, oder, welche nur von der Einheit allein gemessen wird, wie die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 u. s. f.

Primzahlen unter sich sind solche, welche keine gemeinschaftliche einfache Factoren haben, z. B. 18, 35, 143.

1. Es ist kein Charakter oder eine allgemeine Form bekannt, wodurch sich die Primzahlen von den aus Factoren zusammengesetzten Zahlen auszeichneten und kennbar wären. Sie werden empirisch gefunden, indem man alle theilbare Zahlen nach einer sichern Methode aussucht, wodurch die übrigen als Primzahlen sich zeigen. Diese werden entweder in eine besondere Tafel gebracht, oder sie werden in einer Factorentafel durch ein leeres Fach ausgezeichnet. Eratosthenes hat schon ein solches Verfahren angewandt, s. Eratosthenes.

2. Um zu untersuchen, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl sey, muß man sie mit allen Primzahlen bis zu der vor ihrer Quadratwurzel nächst vorhergehenden dividiren, vorausgesetzt, daß man alle Primzahlen so weit ausgesondert habe. Denn wenn die Zahl Factoren hat, so lassen sich diese, so viele ihrer auch seyn mögen, auf zwey bringen, deren einer kleiner, der andere größer als die Quadratwurzel der Zahl ist, den Fall einer rationalen Wurzel bey Seite gesetzt. Durch die angegebenen Divisionen findet man entweder jenen kleinern Factor selbst oder einen seiner Factoren. Findet man keinen Factor, so muß die vorgegebene Zahl eine Primzahl seyn. Man muß suchen, durch Ausschließungen die Menge der Divisionen zu vermindern. S. Theiler der Zahlen.

3. Daß es wenigstens nicht leicht möglich sey, eine allgemeine Form der Primzahlen zu finden, ist begreiflich. Unsere Zahlen sind Glieder vieler arithmetischen Reihen, als:

Digitized by Google

0, 2, 4, 6, 8, 10 . . .
0, 3, 6, 9, 12, 15 . . .
0, 5, 10, 15, 20, 25 . . .
0, 7, 14, 21, 28, 35 . . .
0, 11, 22, 33, 44, 55 . . .
u. s. f.

Die Zahlen der ersten Columne sind die Primzahlen. Es sind diejenigen, welche man in den übrigen Reihen nicht findet, wenn man in der natürlichen Ordnung fortzählet. Diese Lücken entstehen bald da bald hier. Die Zahlen in den Verticalreihen nach der ersten sind solche, welche zwey oder mehrern Reihen gemeinschaftlich sind. Dieses Zusammentreffen kann auf die mannigfaltigste Art geschehen, das Gegentheil daher auch. Die Reihen kann man sich als ein Fortschreiten auf einer geraden Linie mit den Intervallen 2, 3, 5, 7, u. vorstellen, wobey die meisten Puncte zwey oder mehremahle getroffen werden, einige nur einmahl. Die Intervalle von dem Anfangspuncte 0 bis zu einem der letztern sind die Intervalle der verschiedenen Fortschreitungen.

4. Um die Primzahlen auszusondern, nehme man blos die Fortschreitung der Zahlen, die durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind. Denn die durch diese Zähler theilbaren geben sich auf den ersten Blick zu erkennen. Man multiplicire alle durch 7 so weit man es für nöthig findet, dann alle von 11 an durch 11; alle von 13 an durch 13; alle von 17 an durch 17 u. s. f. Diejenigen Zahlen, welche sich unter den Producten nicht finden, sind Primzahlen.

5. Es ist sehr leicht die Fortschreitung jener durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen hinzuschreiben. Sie zerfällt in Perioden von 8 Ziffern, welche in jeder Periode um 30 von den gleichstelligen der nächst vorhergehenden verschieden sind, nämlich

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.
61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89.
91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 119.
u. s. f.

Digitized by Google

Die Multiplication durch 7 giebt die zusammengesetzten Zahlen 49, 77, 91, 119, ꝛc. durch 11 die Zahlen 121, 143, 187, 209, ꝛc. durch 13 die Zahlen 169, 221, 247, 299, ꝛc. u. s. f.

6. Diese Multiplicationen lassen sich leicht in ein Addiren verwandeln, bey den ersten acht, indem man das Product aus dem Multiplicator in die Unterschiede der obigen Reihe zu dem schon gefundenen Producte addirt; weiterhin aber successiv nur das beständige Product aus 30 in den Multiplicator zufügt, wie in dem folgenden Exempel, wo die Producte aus 13 in die Glieder der obigen Reihe von 13 an verzeichnet sind.

	0	30	60	90
13	169	559	949	1339
17	221	611	1001	1391
19	247	637	1027	1417
23	299	689	1079	1469
29	377	767	1157	1547
31	403	793	1183	1573
37	481	871	1261	1651
41	533	923	1313	1703

Die Zahlen, die über den Columnen stehen, mit den an der Seite beygesetzten zusammengenommen, geben den andern Factor zu der in dem zugehörigen Winkelfache befindlichen Zahl.

Trägt man nun die Producte in eine Tafel der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, und zerlegt sie entweder in alle ihre einfachen Factoren, oder zeichnet nur den kleinsten an, so bleiben für die Primzahlen die leeren Plätze übrig.

7. Euler hat in dem 19ten Bande der Petersburger neuen Commentarien eine Methode angegeben, wie man eine Tafel der Primzahlen verfertigen könne, worin zugleich die kleinsten Theiler der zusammengesetzten Zahlen sich finden. Das Verfahren ist etwas anders als das vorher gewiesene. Jede der 8 Zahlen, 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 werde durch r bezeichnet, so ist die Form der

Digitized by Google

durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen diese, $30q + r$, wo q jede der natürlichen Zahlen, auch 0, bezeichnet. Um alle durch 13 theilbare Zahlen, von 13. 13 an zu haben, suche man erstlich den Werth von r für diese Zahl. oder $169 = 30.5 + 19$, wo also $r = 19$ ist. Nun addire man successiv $2n.13$, wo n nach der Reihe 1, 2, 3, &c. ist. Denn ungerade Vielfache von 13 würden gerade Zahlen geben, die wir nicht nöthig haben. So oft als das Vielfache von r über 30 steigt, wird 30 davon genommen, und zu dem Vielfachen von 30 oder $30q$ geschlagen. Nun macht man sich eine Tafel, worin an der Seite die Werthe von q stehen, und in die Oberе die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. In die Winkelfächer trage man für die zusammengehörigen Werthe von q und r den Divisor 13, und so für jede andere zum Divisor genommene Zahl. Wenn r eine andere als eine der obigen acht Zahlen ist, so wird diese Zahl überschlagen, da der zugehörige Dividendus alsdann unter die durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen gehört. Die Dividenden braucht man nicht zu kennen, nur die Werthe von q und r, woraus sich nachher die Dividenden selbst ergeben. Bey dem Divisor 13 sind die zusammengehörigen

r	19,	15,	11,	7,	3,	29,	25,	21.	etc.
q	5,	6,	7,	8,	9,	9,	10,	11.	etc.

Die Werthe 15, 3, 25, 21 von r geben Vielfache von 13, die durch 5, 3, 5, 3 theilbar sind.

8. Hindenburg hat in einer besondern Schrift: Beschreibung einer neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden, Leipzig, 1776, unter andern gewiesen, wie man durch mechanische Hülfsmittel sich die Aussuchung der einfachen Zahlen erleichtern kann.

9. Die Primzahlen findet man nach der Reihe in den Tafeln der Factoren ganzer Zahlen, bey den leeren Plätzen ohne Theiler, s. Theiler der Zahlen. Eine besondere Tafel derselben allein bis zu der 101999 ist in Lamberts Zusätzen zu den logar. und trigon. Tafeln enthalten. Unrichtig sind daselbst als Primzahlen angegeben: 101519;

Digitized by Google

101549; 101579; 101851; 101993, welche nach ihrer Folge durch 11, 7, 157, 179, 569, 29 theilbar sind. Hinzuzusetzen sind als Primzahlen 91183; 101279.

Einiges allgemeine über Primzahlen.

10. Jede Primzahl hat eine der Formen $6m \pm 1$, ausgenommen 2 und 3. Denn die übrigen Formen $6m \pm 2$ und $6n \pm 3$ sind theilbar. Man darf aber den Satz nicht umkehren.

11. Jede Primzahl hat eine der Formen, $8m \pm 1$ und $8m \pm 3$. Denn die übrigen Formen dieser Gattung sind durch 2 theilbar. Allein der Haufe der theilbaren Zahlen, die unter diesen vier Formen begriffen sind, ist zu groß, als daß die Bemerkung von Nutzen seyn könnte.

12. Fermat hat behauptet, daß die Zahlen von der Form $a^m + 1$, wenn m eine Potenz der 2 ist, alle Primzahlen seyn. Einen Beweis könne er nicht geben, halte sich aber davon sicher überzeugt. (Epist. ad Digby, in Wallisii Opp. T. II. pag. 858). Es trifft zu bey allen Zahlen, die nicht über fünf Ziffern enthalten, z. B. $2^2 + 1$; $2^4 + 1$; $2^8 + 1$; $2^{16} + 1$ (= 5; 17; 257; 65537), aber bey der Zahl $2^{32} + 1 = 4294967297$ nicht, als welche durch 641 theilbar ist. Eulerus, de theoremate quodam Fermatiano, Comm. Ac. Petrop. vet. T. VI.

13. Fermat versichert a. a. O. er könne beweisen, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweyer Quadrate ist. Sein Beweis ist nicht bekannt. Man hatte sich viele Mühe gegeben, den Beweis zu finden; Euler beschäftigte sich damit in den Comm. Ac. Petr. novis, T. IV., de numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum, kam aber noch nicht ganz damit zu Stande; allein in dem folgenden Bande vollendete er den Beweis.

14. In dem gedachten Schreiben theilt Fermat noch folgende Sätze mit. Eine jede Primzahl von der Form $3n + 1$ (d. i. $6n + 1$, weil n nicht ungerade seyn kann)

Digitized by Google

besteht aus einem Quadrate und dem dreyfachen eines andern Quadrats, oder hat die Form $aa + 3bb$. In den neuen Petersburger Commentarien T. VIII. p. 125 hat Euler den Satz erwiesen, welches er in einer Abhandlung T. VI. p. 221 noch nicht vermochte.

Ferner: Eine jede Primzahl von der Form $8n + 1$ oder $8n + 3$ besteht aus einem Quadrate und dem doppelten eines andern Quadrats; oder hat die Form $aa + 2bb$. Euler hat es aus einer Induction von den Primzahlen bis 499 bestätigt. Comm. Petr. novi, T. VI. p. 193, mit der Bemerkung, daß die Zerlegung in Quadrate nur auf eine einzige Art angeht.

15. Von dem folgenden Satze, sagt Fermat, könne er keinen Beweis geben: Das Doppelte einer jeden Primzahl von der Form $8n - 1$ bestehe aus drey Quadraten.

Auch: Das Product zweyer Primzahlen von der Form $4n + 3$ mit den Endziffern 3 oder 7 habe immer die Form $aa + 5bb$.

16. In seinen Werken, aber in einem Briefe von Frenicle, kommt noch der Satz vor: Alle Primzahlen von der Form $8n \pm 1$ haben die Form $aa - 2bb$.

17. In dem 14ten Bande der ältern Petersburger Commentarien S. 151 ff. hat Euler eine große Menge von Lehrsätzen über die Formen der Primzahlen $m\alpha + \beta$ vorgetragen, welche zugleich die Form $paa \pm qbb$ haben.

18. Die ungerade Summe zweyer Quadrate, die unter sich Primzahlen sind, ist eine Primzahl, wenn sie nicht in zwey andere Quadrate zerlegt werden kann. Euler in den neuen Petersb. Comment. T. IV.

19. Die Formel $a^{p-1} - 1$, wo p eine Primzahl, und kein Factor von a ist, ist durch p theilbar. Dieser Satz, den Fermat auch gefunden hat, wird in der höhern Arithmetik sehr geschätzt. Euler hat den Beweis gegeben, zuerst in den ältern Petersb. Commentarien, T. VIII. p. 143. Hernach in den neuen, T. VII. p. 70. Bald darauf hat er den Satz noch erweitert, in dens. Comment. T. VIII. p. 192.

Digitized by Google

20. Waring hat in seinen Meditationibus algebraicis, Cantabr. 1770, folgenden Satz, aber ohne Beweis, mitgetheilt. Wenn n eine Primzahl ist, so ist die Zahl $1.2.3.4.5....(n-1)+1$ durch n theilbar. Er schreibt die Entdeckung dem John Wilson zu. La Grange hat zwey Beweise davon gegeben, in den Mém. de l'Ac. de Berlin, a. 1771. Der Satz hängt mit dem gleich vorher angeführten zusammen.

21. In demselben Werke von Waring sind noch einige hieher gehörige Sätze ohne Beweis aufgestellt, welchen la Grange a. a. O. giebt.

Einer ist dieser: wenn drey Primzahlen in arithmetischer Progression sind, so ist ihr Unterschied durch 6 theilbar, wenn nicht eine derselben die Zahl 3 ist.

Ein ähnlicher ist: wenn fünf Primzahlen in arithmetischer Progression sind, so ist ihr Unterschied durch 30 theilbar, wenn nicht eine von ihnen 5 ist. — Diesen Sätzen lassen sich noch mehrere analoge zugesellen.

22. La Grange hat in den Mém de l'Acad. de Berlin, 1773. Untersuchungen über die Zahlen von der Form $Bt^2+Ctu+Du^2$ und die Formen ihrer Theiler angestellt. Davon macht er in der Fortsetzung für 1775 Gebrauch, um die Theiler gegebener Zahlen zu finden. Es ist eine Ausschließungsmethode, vermittelst deren man nur nöthig hat, Theiler von gewissen Formen zu versuchen, z. B. bey der Zahl 10001 nur die Zahlen von der Form $8n+1$.

In eben dieser Fortsetzung sind 36 Sätze über die Formen der Primzahlen aufgestellt, welche zugleich die Form $py^2 \pm qz^2$ haben.

23. In demselben Bande für 1775 hat Beguelin eine Abhandlung über die Aufgabe geliefert, wie man Primzahlen finden könne, die größer als eine gegebene Zahl sind. Es kommt darauf an, in der Formel $4ppxx+1$ diejenigen x auszuwählen, welche sie zu einer Primzahl machen. Es ist z. B. $4(18)^2+1=1297$; $4(20)^2+1=1601$; $4(27)^2+1=2917$; $4(28)^2+1=3137$.

Digitized by Google

24. Kraft hat in den Novis Actis Petrop. T. XII. noch einen Versuch über die Primzahlen geliefert. Jede Zahl von der Form $6m+1$ ist eine Primzahl, wenn m weder unter der Form $6xy+x+y$, noch unter der Form $6xy-x-y$ begriffen ist. Auch ist jede Zahl von der Form $6m-1$ eine Primzahl, wenn m nicht unter der Form $6xy+x-y$ enthalten ist. Man muß für die nach der Reihe angenommenen Werthe von x und y die nach diesen Formeln hervorgehenden Werthe von m suchen; diese geben keine Primzahlen. Alle andere Werthe von m geben solche. Die Methode ist demnach eine ausschließende, welche übrigens sehr bequem zu seyn scheint.

25. Euler, der sich früh viel mit den Primzahlen beschäftigt hat, suchte auch in der Folge wenigstens etwas für die Auffindung großer Primzahlen zu leisten, da allgemeine Charaktere sich nicht finden lassen. In den neuen Petersburger Commentarien, T. IX. gab er eine Methode an, alle theilbare Zahlen von der Form $aa+1$ portheilhaft zu finden, wodurch die übrigen von dieser Form als Primzahlen erkannt werden. Die Zahlen von jener Form haben keine andere Theiler als solche, die selbst aus zwey Quadraten bestehen. Da nun keine Zahl von der Form $4n-1$ eine Summe von zwey Quadraten ist, die Primzahlen von der Form $4n+1$ aber eine solche Summe sind, so sind nur die einfachen Theiler von der Form $4n+1$ zu versuchen.

26. In den neuen Petersb. Commentarien, T. XIII. über die Prüfung sehr großer Zahlen, betrachtet Euler blos die Primzahlen von der Form $4n+1$. Von einer solchen ziehe man successiv die Quadratzahlen, welche kleiner als diese Zahl sind, ab, und bemerke sich die Reste, welche Quadrate sind. Ist die Zahl nur auf eine einzige Art die Summe zweyer Quadrate, so ist sie eine Primzahl, sonst aber nicht. Bey großen Zahlen ist auf Mittel zu denken, die Anzahl der Abziehungen zu vermindern.

27. Der Satz, daß jede Zahl von der Form $4n+1$, welche nur auf eine einzige Art in zwey Quadrate, die un-

Digitized by Google

ter sich Primzahlen sind, aufgelöset werden kann, gewiß eine Primzahl sey, wie Euler in den Comment. novis Petrop. T. IV. p. 27. erwiesen haben will, wovon er auch hier (26.) Gebrauch macht, leidet Ausnahmen. Die Zahl 25 ist nur in die Quadrate 16 und 9 zerlegbar, und doch keine Primzahl. So ist auch die Zahl 289, das Quadrat von 17, nur in die Quadrate 64 und 225 auflösbar. Die schwache Stelle in dem Beweise, den Euler a. a. O. giebt, ist diese, daß $4n+1 = (aa+bb)(cc+dd)$ seyn soll, und daß dabey nur der Fall beachtet wird, wenn beide Factoren ungleich sind. Dem Satze muß also die Einschränkung beygefügt werden, wenn $4n+1$ nicht selbst ein Quadrat ist.

In den neuen Actis Petrop. T. XII. über die Zahlen von der Form $mxx+nyy$, die zur Erforschung der Primzahlen dienen können, und merkwürdige Eigenschaften haben, bemerkt Euler, daß alle Zahlen, welche nur auf eine einzige Art in zwey Quadrate zerlegt werden können, Primzahlen sind, nur mit der Einschränkung, daß beide Quadrate ungerade Zahlen, und, wie es sich von selbst versteht, unter sich Primzahlen seyn.

Prisma, ein geometrischer Körper, begränzt von Ebenen, deren zwey einander gegenüber liegende gleich und ähnlich, auch parallel, die übrigen Parallelogramme sind. Das griechische Stammwort, πριειν, heißt mit einer Säge zerschneiden.

Die Prismen werden nach der Anzahl der Ecken in den Grundflächen, oder der Seitenlinien (Kanten), welche in zwey Seitenflächen gemeinschaftlich sind, benannt, dreyeckiges, viereckiges, u. s. f. oder dreyseitiges, vierseitiges ꝛc. Parallelepipedum und Würfel sind darunter als eine Art und Unterart begriffen. Ein reguläres Prisma ist ein solches, dessen Grundflächen reguläre Vielecke sind.

Ein senkrechtes Prisma ist, dessen Seitenlinien senkrecht auf die Grundfläche stehen.

Die Höhe eines Prisma ist der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen.

Digitized by Google

Prismen, verhalten sich zu einander zusammengesetzt wie die Grundflächen und Höhen, oder arithmetisch, wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen.

Ein dreyseitiges Prisma läßt sich in drey gleich große Pyramiden zerlegen.

Ähnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel der gleichnamigen Seitenlinien ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Höhen.

In der Dioptrik bedeutet Prisma ein dreyseitiges.

Prismoid ist ein Körper, dessen Grundflächen parallele geradlinichte Figuren von gleichvielen Seiten, aber unähnliche sind. Die Seitenlinien oder Kanten sind sich einander, keine oder nicht alle parallel, wie sie es in dem Prisma sind. Die Folge der parallelen Durchschnitte muß als stetig gedacht werden.

Probabilität, s. Wahrscheinlichkeit.

Probe, s. Rechnungsprobe.

Problem, s. Aufgabe.

Product ist die Größe, welche aus der Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entsteht. Wie ein Product numerischer Größen gefunden wird, lehrt die gemeine Arithmetik, s. Multiplication. Für allgemeine Größen, als Zahlen betrachtet, zeigt es die Buchstabenrechnung, für Reihen insbesondere die Combinationslehre, s. combinatorische Analysis, 5. Auch Hindenburgii Infinitinomii dignitatum . . . formulae §. XXVII, und eine Hülfstafel dazu in der Methodo nova serierum, p. LXX. ff.

1. Das Product $(1-z^2)(1-\frac{1}{4}z^2)(1-\frac{1}{9}z^2)$ etc. ist $= \frac{\sin \pi z}{\pi z}$, und das Product $(1-z^2)(1-\frac{1}{2^2}z^2)(1-\frac{1}{3^2}z^2)$ etc. $= \cos. \frac{1}{2}\pi z$, aus Cyklometrie, 26, wenn daselbst für φ gesetzt wird πz und $\frac{1}{2}\pi z$.

Digitized by Google

6. Das Product $(1+z^2)\left(1+\frac{1}{4}z^2\right)\left(1+\frac{1}{9}z^2\right)$ etc. ist $=\frac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{2\pi z}$, und das Product $(1+z^2)\left(1+\frac{1}{9}z^2\right)\left(1+\frac{1}{25}z^2\right)$, etc. $=\frac{1}{2}\left(e^{\pi z:2}+e^{-\pi z:2}\right)$.

Denn es ist

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1..4}+\text{etc.}$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1\ 2.3}+\frac{x^4}{1..4}-\text{etc.}$$

(Logarithmus, 29. 39.). Daher ist

$$\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1..5}+\text{etc.}\quad(A).$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1..4}+\text{etc.}\quad(B).$$

Die Reihe (A) verwandelt sich, wenn $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt, und alles durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, in die Reihe für $\sin x$, und diese ist gleich dem Producte $x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)$. etc. oder, wenn πz statt x gesetzt wird, dem Producte $\pi z\,(1-z^2)\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)$, etc. Daher ist rückwärts, wenn in diesem Producte $z\sqrt{-1}$ statt z gesetzt, und es durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, das Product $\pi z\,(1+z^2)\left(1+\frac{1}{4}z^2\right)\left(1+\frac{1}{9}z^2\right)$. etc. $=A$.

Die Reihe (B) verwandelt sich, wenn $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt wird, in die Reihe für $\cos x$, welche dem Producte $\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)$. etc. gleich ist, oder, wenn $\frac{1}{2}\pi z$ statt x gesetzt wird, dem $(1-z^2)\left(1-\frac{1}{9}z^2\right)\left(1-\frac{1}{25}z^2\right)$. etc. Daher ist rückwärts, wenn in diesem Producte $z\sqrt{-1}$ statt z gesetzt wird, das Product $(1+z^2)\left(1+\frac{1}{9}z^2\right)\left(1+\frac{1}{25}z^2\right)$. etc. $=B$.

Digitized by Google

3. Das Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$. etc. ist $=1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+$ etc. wo die Exponenten die Form $\frac{3nn \pm n}{2}$ haben.

Euler hat die Entwickelung dieses Products auf weyerley Art gezeigt in den Actis Ac. Petrop. T. IV. P. I. a. a. 1780. Durch die gemeine Multiplication mit jedem Factor nach der Reihe wird das Gesetz nicht erhalten.

Progression ist überhaupt eine Reihe von Größen, die nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen. Insbesondere gebraucht man den Ausdruck von einer Reihe Größen, worin jede die mittlere proportionale zwischen der nächst vorhergehenden und folgenden ist. Ist das Verhältniß je zweyer nächsten ein arithmetisches, so ist die Progression eine arithmetische; ist es ein geometrisches, so ist sie eine geometrische, s. die Artikel, arithmetische und geometrische Reihe.

Projection, Entwerfung, ist die Abbildung eines Gegenstandes auf einer Fläche, durch gerade Linien, welche sich entweder parallel sind, oder nach einem gegebenen Puncte zusammen laufen. Die Puncte, in welchen die geraden Linien die Entwerfungsfläche treffen, geben die Projection oder das Bild des Gegenstandes.

1. Der Fall, da die Entwerfungslinien in einem Puncte zusammen kommen, wird in der Perspectiv betrachtet, deren allgemeine Verfahrungsarten oben erklärt sind.

2. Zwey perspectivische Entwerfungsarten kommen bey der Zeichnung der Himmelscharten und der geographischen vor. Man setze das Auge in den Mittelpunct einer Kugel, und ziehe von demselben nach jedem Puncte der Oberfläche gerade Linien, welche eine die Kugel berührende Ebene treffen. Diese ist die Entwerfungsebene. Alle großen Kreise werden darauf durch gerade Linien abgebildet; alle kleinern Kreise durch Kreise, Ellipsen, oder einen an-

Digitized by Google

dern Kegelschnitt. Denn diese kleinern sind die Grundflächen von Kegeln, deren Scheitelpunct das Auge ist, und welche von der Entwerfungsebene geschnitten werden. Nur wenn die Ebene eines kleinern Kreises der Entwerfungsebene parallel ist, ist die Projection wieder ein Kreis. Diese Projection dient besonders für Himmelscharten. Sie heißt die centrale.

3. Die stereographische Projection ist eine perspectivische Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines großen Kreises, nach dessen einem Pole die Entwerfungslinien gezogen werden, s. stereographische Projection.

4. Die halbe Kugelfläche wird auch auf die Oberfläche eines senkrechten eingeschriebenen Kegels entworfen, durch Linien, welche entweder nach dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte der Kugel und der Grundfläche des Kegels, oder nach dem jenseitigen Endpuncte des Durchmessers gezogen werden. Diese Projection giebt die Sternkegel. Die Übertragung der Puncte von der Kugel auf die Kegelfläche geschieht entweder unmittelbar durch Linien, die in der Ebene eines Quadranten (oder Halbkreises) und einem Durchschnitte des Kegels durch die Axe gezogen werden, oder durch eine leichte trigonometrische Proportion.

5. Wenn die Entwerfungslinien senkrecht auf die Ebene der Tafel (der Entwerfungsebene) stehen, so heißt die Entwerfung eine orthographische (ὀρθος gerade, γραφειν zeichnen, schreiben). Sie wird vorzüglich bey Bauriſſen, Grubenriſſen und Abbildungen von Maschinen angewandt.

6. Die Entwerfungslinien mögen aber auch unter einem gegebenen schiefen Winkel gegen die Tafel geneigt seyn. Doch ist für die Ausübung die orthographische Projection viel bequemer. In gewissen Fällen, wo man horizontale und lothrechte Flächen in einem Abrisse zugleich will erscheinen lassen, pflegt man den Entwerfungslinien eine Neigung von 45° gegen die Tafel zu geben, welche man horizontal oder vertical sich gedenken mag. Dadurch erscheinen die horizontalen wie die lothrechten Linien unverkürzt. Nur wird durch die senkrechten Gegenstände ein

Digitized by Google

Theil von der hinter ihnen liegenden niedrigern Fläche bedeckt. Bey Festungsrissen kommt diese Entwerfungsart bisweilen vor, auch wol bey Grundrissen von Gebäuden.

7. Die gnomonische Projection ist auch eine solche. Die Entwerfungslinien sind mit der Axe des Himmels parallel. Die Linien, welche entworfen werden, sind die Stundenlinien und ähnliche auf der Ebene des Aequators, welche in einem Puncte der Axe zusammenstossen; die entworfenen Linien sind die Stundenlinien auf der Uhrfläche, welche die Tafel ist.

Sätze und Aufgaben über die orthographische Projection.

8. Eine gerade Linie, die in der Richtung der Entwerfungslinien liegt, erscheint in der Projection wie ein Punct.

9. Eine gerade Linie, die parallel mit der Entwerfungsebene ist, wird durch eine ihr gleiche abgebildet.

10. Ist sie geneigt gegen die Entwerfungsebene, so verhält sie sich zu ihrer Entwerfung wie der Sinus totus zu dem Cosinus des Neigungswinkels gegen die Ebene der Tafel.

11. Eine Ebene, die auf die Tafel senkrecht (oder überhaupt parallel mit den Entwerfungslinien) ist, erscheint wie eine gerade Linie. Ihr Bild ist ihr Durchschnitt mit der Tafel.

12. Ist die Ebene der Tafel parallel, so ist die Abbildung einer jeden darauf gezeichneten Figur dieser gleich und ähnlich.

13. Ist sie gegen die Tafel geneigt, so verhält sich eine darauf gezeichnete Figur zu ihrer Abbildung dem Inhalte nach wie der Sinus totus zu dem Cosinus des Neigungswinkels. Denn alle in der Figur auf den Durchschnitt ihrer Ebene mit der Tafel senkrechte werden in demselben Verhältnisse vermindert, dagegen die damit parallelen unverändert bleiben. Ist die Figur eine geradlinichte, so kann sie durch jene erstern Linien in Trapezia getheilt

Digitized by Google

werden, welche zu ihren Projectionen in dem gedachten Verhältnisse stehen, daher die ganzen Figuren eben das Verhältniß haben. Ist die Figur eine krummlinichte, so stehen die Differentiale der Fläche, wenn die Ordinaten nach einer auf den Durchschnitt mit der Tafel senkrechten Richtung gezogen werden, in jenem Verhältnisse, und daher die Flächen auch.

14. Stellt man drey Projectionsebenen rechtwinklicht zusammen, so ist die Summe der Quadrate von den Projectionen einer Figur auf jeder Ebene so groß als das Quadrat der Figur selbst. Der Beweis gründet sich auf einen Satz in dem Artikel, Pyramide, 22. Die Quadrate sind arithmetisch zu nehmen.

15. Die auf der geneigten Ebene gezeichnete Figur sey ein Kreis. Der Durchmesser, welcher mit der Tafel parallel ist, bleibt in der Projection ungeändert; der Durchmesser, welcher auf diesen senkrecht ist, wird nach dem Verhältnisse des Sinus totus zu dem Cosinus des Neigungswinkels gegen die Tafel verkleinert. Alle diesem Durchmesser parallelen Chorden werden in demselben Verhältnisse verkürzt. Hieraus ergiebt sich auch, daß die Projection des Kreises eine Ellipse ist, s. Ellipse, 5.

16. Zu einer orthographischen Abbildung eines Gegenstandes werden zwey Tafeln erfordert, die auf einander senkrecht sind, deren eine die horizontale, die andere die verticale heiße. Es mag auch oft noch eine dritte erforderlich seyn, die auf jede dieser beiden senkrecht steht, um den Gegenstand von oben, von vorn und von der Seite darzustellen. In der That muß diese letztere gedacht werden, wenn die Projection auf derselben auch nicht gezeichnet wird. Denn die Lage eines Punctes im Raume zu bestimmen werden drey Coordinaten erfordert. Der Durchschnitt der horizontalen und der einen verticalen Ebene sey die Axe der Abscissen, x, der Durchschnitt mit der zweyten verticalen die Axe der Ordinaten y, und der Durchschnitt beider verticalen Ebenen die Axe der z, so geben für irgend einen Punct die Coordinaten x, y den relati-

Digitized by Google

den Ort des Punctes auf der horizontalen Ebene an, und die Coordinaten x, z den relativen Ort auf der verticalen Ebene, das ist die Projectionen desselben.

Die Durchschnittslinie der beiden Entwerfungsebenen, der horizontalen und der ersten verticalen, heiße auch hier die Grundlinie.

17. Die Projection einer geraden Linie auf beiden Tafeln zu zeichnen muß man suchen, die Lage zweyer auf ihr befindlichen Puncte zu bestimmen, deren Projectionen diejenigen der geraden Linie auf beiden Entwerfungsebenen geben.

18. Die Projectionen von parallelen Linien auf dieselbe Tafel sind sich parallel.

19. Wenn die Projectionen einer geraden Linie auf beiden Tafeln gegeben sind, so liegen die Puncte P, Q, wo sie die horizontale und die verticale trifft, in den Perpendikeln auf die Grundlinie durch die Puncte, wo die verticalen und horizontalen Projectionen der Linie sie schneiden. — Umgekehrt geben die Puncte P, Q die beiden Projectionen der geraden Linie.

20. Die Projection einer gegen die Tafel geneigten Ebene verbreitet sich über ihre ganze Fläche. Doch ist es, um ihre Lage mittelst der Projection zu erkennen, hinlänglich, wenn ihre Durchschnittslinien mit den beiden Tafeln gezeichnet sind, da eine Ebene durch zwey in ihr befindliche Gerade bestimmt ist. Die Neigung der Ebene gegen die horizontale Tafel und der Winkel der Durchschnittslinie beider mit der Grundlinie giebt den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Ebene und der verticalen Tafel mit der Grundlinie macht. So auch, wenn die beiden Tafeln verwechselt werden. Dieses wird die sphärische Trigonometrie durch Rechnung zeigen. Daselbst wird auch gewiesen, wie es durch Zeichnung gefunden werden kann.

21. Die Durchschnitte zweyer parallelen Ebenen mit jeder der beiden Tafeln sind sich parallel.

Digitized by Google

22. Wenn zwey Ebenen durch ihre Durchschnitte AA, Aa der einen, und BB, Bb der andern mit den beiden Tafeln gegeben werden, so sind dadurch auch die Projectionen ihrer Durchschnittslinie bestimmt. Denn es sind nun die Puncte gegeben, in welchen diese Linie die beiden Tafeln trifft. Der eine ist der Durchschnittspunct der Linien AA, BB auf der einen Tafel, der andere der Durchschnittspunct der Aa, Bb auf der andern.

23. Die Projectionen eines Punctes, der drey Ebenen gemeinschaftlich ist, zu finden, müssen die Projectionen der Durchschnittslinie zweyer derselben gesucht werden; dann die Projectionen der Durchschnittslinie der dritten Ebene mit einer der beiden andern, so geben diese Projectionen, auf jeder der beiden Tafeln, jede durch ihren Durchschnittspunct die Projectionen des Punctes, der den drey Ebenen gemeinschaftlich ist. Der Fall, da die drey Ebenen in einer geraden sich schneiden, macht die Aufgabe zur unbestimmten.

24. Die Projectionen des Punctes zu finden, in welchem eine gegebene gerade Linie eine gegebene Ebene E trifft, ziehe man erstlich die Projectionen jener LL, ll, auf der horizontalen und verticalen Tafel, und die Durchschnitte der Ebene mit denselben. Dann suche man die Projection der Durchschnittslinie der über LL lothrechten Ebene mit der Ebene E auf der verticalen Tafel (22.). Auf dieser liegt die eine gesuchte Projection; eben diese liegt aber auch auf der Projection ll, also in dem Durchschnittspuncte beider Linien. Von diesem Puncte ziehe man eine senkrechte auf die Grundlinie bis an die horizontale Projection LL, so ist der Durchschnittspunct beider die gesuchte Projection auf der horizontalen Tafel.

25. Eine Ebene schneide die horizontale Tafel in der Linie AA; mit dieser werde eine parallele aa auf derselben gezogen, so ist diese die Projection einer auf der Ebene selbst mit AA parallelen. Die Höhe dieser, auch der Tafel parallelen, über aa ist die senkrechte auf

Digitized by Google

die Grundlinie in ihrem Durchschnittspuncte mit a a bis an die Durchschnittslinie B B der Ebene mit der verticalen Tafel. Dadurch lassen sich die Projectionen jedes Punctes der Ebene angeben.

26. Es lassen sich noch manche Aufgaben über die Lage von Puncten, Linien und Ebenen durch Constructionen auf den beiden Tafeln auflösen, welche aber hier zu weit führen würden. Man findet einen vollständigen und schönen Unterricht darüber in den Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (éléments de Géométrie descriptive) par Lacroix, sec. ed. à Paris, 1802. Es befinden sich darin auch Untersuchungen über Durchschnitte der Körper, Abwickelung krummer Oberflächen und berührende Ebenen, nebst einem kurzen Begriff der Perspectiv, alles durch Constructionen auf zwey Ebenen ausgeführt.

Prolata (oblonga) **sphaeroides**, ein Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipse um die große Axe entsteht.

Pronische Zahl ist die Summe einer Zahl und ihres Quadrats oder ihres Cubus, oder ihres Biquadrats, nämlich $a + a^2$; $a + a^3$; $a + a^4$. Die alten Algebraisten, als Cardan, unterschieden diese Formen der Zahlen, welches wir gar nicht nöthig finden, selbst mit besondern Namen, pronicum minus, medium, maius. Sie hätten auch noch zu höhern Potenzen steigen, und die Potenz subtractiv nehmen können.

Proportion, s. Verhältniß.

Proportionale Spirale ist die logarithmische, s. Spirale.

Proportionallineal, s. den folgenden Artikel.

Proportionalzirkel (Circinus proportionum, Compas de proportion, engl. Sector) ist ein geometrisches Instrument, welches aus zwey gleichen Linealen besteht, die wie die Schenkel eines Zirkels mit einander verbunden und um einen Punct beweglich sind. Auf den

Digitized by Google

Linealen sind gerade Linien aus dem Mittelpuncte der Bewegung getragen, die nach verschiedenen Verhältnissen eingetheilt sind, paarweise, auf jedem Lineale eine. Jede dieser getheilten Linien ist ein Maßstab, welcher die Stelle einer Tabelle vertritt, in dem die beygesetzten Zahlen gewisse zu den Längen der Linien gehörige Größen bedeuten. Dazu kommen oft noch Linien an dem äußern Rande parallel mit denselben. Diese dienen schlechthin als Maßstäbe.

1. Die arithmetische Linie (linea partium aequalium) ist eine in gleiche Theile eingetheilte Linie, worauf die beygesetzten Zahlen die Längen von dem Mittelpuncte der Bewegung oder Theilung angeben.

2. Die geometrische Linie (linea planorum, quadratorum) giebt durch die Zahlen der Eintheilung die Quadrate der Längen an, wo das Quadrat der Länge 1 zur Einheit dient. Die Längen verhalten sich wie die Quadratwurzeln der beygezeichneten Zahlen.

3. Die cubische Linie (linea stereometrica, solidorum) giebt durch die Zahlen der Eintheilung die Würfel der Längen an, so daß die Längen selbst sich wie die Cubikwurzeln der Zahlen verhalten.

4. Die Linie der Seiten regulärer Vielecke (linea polygonorum, l. circuli dividendi) zeigt für die beygesetzte Zahl der Seiten, die verhältnißmäßige Länge derselben, so daß jede dieser Längen auf dem Kreise, dessen Halbmesser der Seite des Sechsecks gleich ist, sich so oft herumtragen läßt, als die Anzahl der Seiten angiebt. Die Seite des Sechsecks oder der Halbmesser sey $= r$, die Anzahl der Seiten eines Vielecks $= n$, so ist die Seite $= 2r \sin \frac{180°}{n}$.

Auf dem Proportionalzirkel, wie ihn Galilei angegeben hat, sind die Zahlen der Vielecke in umgekehrter Ordnung gesetzt. Die Länge zu der Zahl 6 ist nun die Seite und die Länge zu einer andern Zahl, z. B. 10, ist der Halbmesser zu dem Zehneck oder Vieleck.

Digitized by Google

5. Die Linie der Chorden der Polygonwinkel (linea subtensarum angulorum Polygonorum) zeigt die Verhältnisse der Chorden von den Nebenwinkeln der Centriwinkel an. Diese sind $= 2r\cos\frac{180^\circ}{n}$. Die Linie ist entbehrlich.

6. Die tetragonische Linie zeigt für die beygesetzte Zahl der Seiten regulärer Vielecke, welche gleichen Inhalt haben, die verhältnißmäßige Länge der Seiten. Der gegebene Inhalt sey aa, die Seite $= v$, so ist $v^2 = \frac{4aa}{n}\,\text{tang}\,\frac{180^\circ}{n}$. Z. B. wenn die Seite des Dreyecks 10000 Theile erhält, ist die Seite des eben so großen Vierecks 6580, des eben so großen Fünfecks 5017, u. s. f.

7. Die Linie für die Eintragung der regulären Körper in eine Kugel zeigt die verhältnißmäßige Länge des Durchmessers einer Kugel und der Seiten der einzutragenden Körper.

8. Die Linie für die Verwandlung der regulären Körper zeigt die verhältnißmäßige Länge der Seiten bey gleichem Inhalte, zugleich mit dem Durchmesser einer gleich großen Kugel.

9. Die Linie der Chorden giebt die Länge der Chorden zu den beygesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobey die Länge zu 60 der Halbmesser ist. Diese Linie dient zugleich als Linie der Sinus für die halben Bogen.

10. Die Linie der Tangenten giebt die Länge der Tangenten zu den beygesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobey die Tangente von 45° der Halbmesser des Kreises ist. Um Verwirrung in der Eintheilung für die kleinen Bogen zu vermeiden, wird diese Linie an der äußern Seite der beiden Schenkel gezeichnet, so daß, wenn beide gerade ausgestreckt werden, sie zusammen die vollständige Linie der Tangenten bis zu der Tangente 2 oder dem doppelten Halbmesser (= tang 63 °26′...) ausmachen.

Digitized by Google

11. Die Linie zur Eintheilung einer geraden Linie dient, eine gerade Linie in 2—12 gleiche Theile zu theilen; ferner die Eintheilung nach dem äußern und mittlern Verhältnisse (extrema et media ratione, Euel. VI. 30.) zu machen; auch zu dem Durchmesser eines Kreises den Umfang oder umgekehrt zu finden. Sie ist entbehrlich.

12. Die Fortificationslinie enthält die verhältnißmäßigen Längen der Halbmesser regulärer Vielecke für eine gegebene Länge der Seite, auch noch die zugehörigen Längen der Flanke, der Kehllinie und der Capitallinie, die aber nach alten Systemen genommen zu werden pflegen. Diese Linie mag füglich wegbleiben, da auch die Maßen an den Bastionen keine bestimmten Verhältnisse haben können.

13. Die metallische Linie enthält die Durchmesser gleich schwerer Kugeln, also überhaupt die ähnlich liegenden Seiten gleich schwerer ähnlicher Körper, von verschiedenen Metallen.

14. Man findet auch noch auf den Proportionalzirkeln einen Kaliberstab für Geschütz und Kugeln an der äußern Seite gezeichnet, bey dessen Gebrauche das Instrument ganz geöffnet wird, daß es ein gerader Maßstab wird.

15. Lambert hat dem Proportionalzirkel eine besondere Einrichtung zu perspectivischen Zeichnungen gegeben, s. Perspectiv. Auf der einen Seite sind fünf Paar Linien gezogen, an welchen die Längen sich umgekehrt wie die Eintheilungszahlen verhalten, um dadurch den perspectivischen Abstand eines Punctes von der Horizontallinie zu finden. Auf der andern Seite sind die Linien der Sinus, Tangenten und Secanten gezeichnet, nebst einer elliptischen Linie, durch deren Hülfe die Ordinaten einer Ellipse für angenommene Abscissen gefunden werden.

16. Jak. Bernoulli hat einen Proportionalzirkel für Schifffahrer angegeben. Opp. T. II. No. 91. Aus dem Rhumb (der Richtung des Schiffes) und der Ver-

Digitized by Google

Änderung der Breite wird dadurch die Veränderung der Länge gefunden.

17. Die Engländer haben viel weniger Doppellinien an ihren Sectoren oder Proportionalzirkeln, aber mehr einzelne an den äußern Seiten als Maßstäbe, von jenen, nach Hutton, nur die arithmetische, diejenige der Chorden, Sinus Secanten, Tangenten bis 45°, und nach einem kleinern Maßstabe über 45°, nebst der Linie der Polygone. Als Maßstäbe einfach, einen in Zolle und kleinere Theile getheilten, ferner für Chorden, Sinus, Tangenten, einige zur Schifffahrt dienende, und einige logarithmische Maßstäbe.

18. Der Proportionalzirkel ist ein nützliches Instrument für Personen, die im Rechnen und in geometrischen Constructionen ungeübt sind. Es ist aber kostbar, besonders wenn es vollständig seyn soll. Auch muß es eine ziemliche Länge haben, wenn man eine gewisse Genauigkeit erhalten will. Mäßig geübte können es füglich entbehren.

19. Der Gebrauch beruhet auf der Lehre von den ähnlichen Dreyecken. In dem Dreyeck ABG, Tab. VIII. Fig. 117. Th. I. sey DE parallel mit BC, so sind die Dreyecke ABC, ADE ähnlich, und es ist AB : AD = BC : DE (Dreyeck 8.). Dadurch werden die Glieder eines gegebenen Verhältnisses AB : AD in diejenigen eines diesem gleichen, BC : DE, verwandelt, von welchen eines BC oder DE gegeben wird. Auf dem Proportionalzirkel (Fig. 153.) nimmt man auf zwey gleichbenannten Linien, AB, AB, die gleichen Längen AC, AC, und AD, AD, so sind CC, DD parallel, bey jeder Eröffnung des Instruments. Öffnet man dasselbe so weit, daß man mit einem Handzirkel zwischen zwey gleichnamigen Puncten C, C eine gegebene Linie faßt, so erhält man zwischen zwey andern gleichnamigen Puncten D, D (die auch auf der andern Seite von C, C liegen mögen) eine Linie DD, die zu CC das Verhältniß AD : AC hat, und die Linien CC, DD haben auf die bey C, D gesetzten

Digitized by Google

Zahlen eben die Beziehungen, wie AC und AD gegen sie haben.

Z. B. CC und DD sollen die ähnlich liegenden Seiten zweyer ähnlichen Figuren seyn, deren Flächen sich wie 3 : 2 verhalten, so nimmt man auf der geometrischen Linie beider Schenkel zwey Puncte C, D, deren Zahlen wie 3 : 2 sind, so verhalten sich die Quadrate von AC und AD wie 3 : 2, daher eben so die ähnlichen über CC und DD gezeichneten Figuren. Ist die eine gegeben, so hat man gleich durch das Instrument die andere.

Man wolle die Seite eines Fünfecks haben, dessen Halbmesser gegeben wird. Auf der Linie der Polygone nehme man zwischen den Puncten 6, 6 die Weite DD dem Halbmesser gleich, und dann die Weite CC zwischen den Puncten 5, 5, so ist CC die gesuchte Seite des Fünfecks. Ist die Seite des Vielecks gegeben, so faßt man diese zwischen den zugehörigen Zahlen, und das Intervall 6, 6, ist der Halbmesser zu demselben.

20. Der Proportionalzirkel hat anfangs noch eine andere Gestalt gehabt, als die jetzt gewöhnliche, hier beschriebene, nämlich die eines Doppelzirkels mit einem verschiebbaren Gewinde, welches nach den bezifferten Abtheilungen auf den Schenkeln gestellt und befestigt wird. Dieser Zirkel bildet zwey Verticalwinkel, an welchen die Abstände der Spitzen sich wie die Längen der gleichen Schenkel verhalten. Speckle in seiner Architectura von Vestungen, welche zum erstenmahle 1589 herausgekommen ist, erwähnt gleich im Anfange eines solchen Zirkels zum Verjüngen, zugleich eines andern zu diesem Zwecke ganz in der Form unsers Proportionalzirkels. „Andere," sagt er, „haben einen breiten Cirkel gemacht, mit einem unbeweglichen Centro, da sie dann auf beiden Linien in der Mitte der gespaltenen Linien die Theilungen der Verjüngungen gemacht, und soweit man ihn allwege aufthut, ist allwege die Erjüngung von einem bis in die 20 Theil gestanden, und hat man solche Theilung mit einem andern Cirkel nehmen und suchen müssen." Er habe, fährt er fort, diese und andere Zirkel im Gebrauche nicht genau

Digitized by Google

gefunden, sondern habe sich andere machen lassen, die völlig so beschaffen sind, wie die noch jetzt üblichen Doppelzirkel mit entgegengesetzten Schenkeln und festem Gewinde. Er hat deren mehrere mit verschiedenem Verhältnissen der Länge der Schenkel abgebildet. Für alle diese Instrumente gebraucht er die Benennung, Proportionalzirkel.

21. Aus dem Doppelzirkel mit beweglichem Gewinde ist vermuthlich der Proportionalzirkel des Jobst Burgi oder Justus Byrgius entstanden, den Levin Hulsius in seinem dritten Tractat der mechanischen Instrumente, Frankfurt 1604, beschreibt. Es sind auf den Schenkeln mehrerley Abtheilungen, sechs Arten, angebracht, um nicht bloß Linien, sondern auch Flächen und Körper zu verjüngen oder auch zu vergrößern, und noch einige Verhältnisse anzugeben. Man faßt mit diesem Zirkel die eine Linie zwischen dem einen Paar Schenkel, und erhält zwischen den Spitzen des andern Paars die dazu gehörige Linie.

22. Clavius beschreibt in seiner Geometria practica, die zuerst zu Rom 1604 herausgekommen ist, einen Proportionalzirkel nach der gegenwärtigen Form. Dieser hat auf der einen Fläche nur die arithmetische Linie, auf der andern die Linie der Chorden. Clavius schlägt den Namen Instrumentum partium vor. Er sagt nicht, daß er ein neues Instrument angäbe.

23. Galilei machte seinen Proportionalzirkel im J. 1606 bekannt, in einer sehr selten gewordenen Schrift: Le Operazioni del Compasso geometrico e militare, Padova, 1606. Die Einrichtung ist ganz wie an den jetzt gewöhnlichen Instrumenten. Die darauf gezogenen Linien sind die arithmetische, geometrische, stereometrische, metallische, polygraphische (für reguläre Vielecke), die tetragonica und eine adjuncta, mittelst welcher Kreisabschnitte und Monden quadrirt werden können. Matthias Bernegger (ein sehr guter Philolog seiner Zeit) hat die Schrift ins Lateinische übersetzt, und mit einem Commentar versehen, welcher wieder ins Italienische übersetzt ist, wie er es sehr verdiente. Er fügte noch die Li-

Digitized by Google

nie der Chorden und zwey Linien für die regulären Körper bey. Ein Mayländer, Balthasar Capra, eignete sich in einer Schrift: Usus et fabrica cujusdam Circini Proportionum, Patav. 1607, die Erfindung dieses Instruments zu, worüber Galilei, mehr als es die Sache verdiente und er es nöthig hatte, sehr aufgebracht wurde, sogar daß, ohnezweifel auf seine Veranlassung, alle vorräthigen Exemplare der Schrift des Capra confiscirt wurden. Er bestätigte durch Zeugnisse, daß er den Proportionalzirkel vor 10 Jahren (um 1597) erfunden habe, und daß seit der Zeit wol auf hundert Stück in Padua wären verfertigt worden. Einem Manne wie Galilei mag man dieses, und wenn die Sache viel wichtiger wäre, auf sein Wort glauben. Vielleicht hat Capra ihn blos necken wollen, auf Anstiften der Neider und Widersacher des Galilei.

24. Die Form des Galileischen Proportionalzirkels ist also nicht neu, wol aber der Gebrauch. Denn die ältere diente nur zur einfachen Verjüngung oder Vergrößerung der Linien, da sie blos die arithmetische Linie enthielt. Die Galileische Einrichtung dient zu mancherley geometrischen Constructionen, und mag selbst zu Rechnungen bisweilen angewandt werden. In Absicht auf die Bekanntmachung durch den Druck ist, nach der von Speckle geschehenen Erwähnung zweyer Verjüngungs-Instrumente, des Byrgius Instrument das ältere, da die Zueignung der Schrift des Hulsius vom 20. May 1603 ist. Die Zueignung des Werks von Clavius ist vom 13. Sept. 1604, und die der Galileischen Schrift vom 10. Jul. 1606.

25. Hutton erzählt in seinem Wörterbuche die Geschichte des Proportionalzirkels folgendermaßen. „Man schreibt, sagt er, die Erfindung dem Guido Baldo oder Ubaldo um das J. 1568 zu. Die erste gedruckte Nachricht davon giebt Caspar Mordente zu Antwerpen im J. 1584, welcher erzählt, daß sein Bruder Fabricius Mordente in dem J. 1554 das Instrument erfunden habe. Darauf hat Daniel Speckle zu Straßburg im J. 1589 es beschrieben, nach ihm Thomas Hood

Digitized by Google

zu Londen 1598; worauf sehr viele Schriftsteller über die praktische Geometrie davon gehandelt haben.“ —

Es ist hier ein Mißverstand in den Benennungen vorhanden. Aus dem, was ich aus des Speckle Werk angeführt habe, sieht man, daß diese ältere Einrichtung ein Doppelzirkel, vermuthlich mit beweglichem Gewinde, gewesen ist. Es wäre unbegreiflich, wie in dem Streite zwischen Galilei und Capra diese frühern Ansprüche auf die Erfindung des Proportionalzirkels nicht in Anregung gekommen sind.

26. Über den Proportionalzirkel sind viele Schriften erschienen. Ein Verzeichniß findet man in Scheibels neuer Ausgabe von Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, Breslau 1781; in Leupolds Theatro Machinarum Arithm. et Geom. wo auch die Byrgische Einrichtung abgebildet und beschrieben ist; und in Kästners Geschichte der Mathematik, 3. Bd. S. 336–352.

Mit dem Proportionalzirkel von gleichem Gebrauch ist verwandt das

Proportionallineal, welches eben solche getheilte Linien enthält als jener auf beiden Schenkeln. Man hat über dabey die Mühe, die beiden ähnlichen Dreyecke zu zeichnen, welche der Proportionalzirkel unmittelbar angiebt. Der dritte Theil der Geometriae practicae Adriani Metii, Franequerae 1625, handelt eigens davon.

Proscatheton heißt bisweilen eine senkrechte gerade, im Griechischen, was auf etwas herabgelassen, gesetzt wird.

Prosinus ist eine Benennung, welche Vieta für die Tangente eines Winkels gebraucht. Sonst ist sie gar nicht angenommen.

Prosthaphaeresis ist eine Abkürzungsmethode, deren sich die Astronomen vor der Erfindung der Logarithmen in einigen Fällen bedienten. Wenn, wie es in der sphärischen Trigonometrie oft der Fall ist, ein Sinus mit einem andern multiplicirt werden soll, so kann man diese

Digitized by Google

Multiplication durch die Formel sin A. sin B = ½ cos (A — B) — ½ cos (A + B), Goniometrie, 27. in eine Subtraction verwandeln. So auch, wenn ein Sinus in einen Cosinus, oder ein Cosinus in einen andern multiplicirt werden soll, durch die Formeln a. a. O. Wenn es aber andere goniometrische Functionen sind, die in einander multiplicirt werden sollen, so wird das Verfahren beschwerlicher; auch wenn ein Sinus oder Cosinus Divisor ist. Man kann diese Fälle auf jenen bringen, aber die Mühe der Vertauschungen wird größer seyn als die Mühe des Multiplicirens oder Dividirens, welches einem geübten Rechner mechanisch ist, da man bey dem andern Verfahren schon mehr Achtsamkeit anzuwenden hat. Auch ist die gehörige Genauigkeit dabey nicht so leicht zu erhalten. Die Logarithmen überheben uns dieser gesuchten Kunstgriffe.

Werner in Nürnberg hat, wie Christmann in seiner Theoria lunae erzählt, in einer Schrift über die Dreyecke die Methode vorgetragen. Da diese aber ungedruckt geblieben ist, so ist sie nicht bekannt geworden. Nachher sind Tycho und Wittich, der eine kurze Zeit ein Gehülfe des erstern war, darauf gekommen. Durch Wittich ward sie bey dessen Anwesenheit in Cassel Justus Byrge bekannt, der die Erfindung etwas erweiterte. Raimarus Ursus erwähnt ihrer in seinem Fundamento astronomico; Clavius machte die Methode allgemein in seinem Werke de astrolabio, L. I. Lemma 53. Melchior Jöstel hat eine besondere Schrift darüber verfaßt, die nicht gedruckt zu seyn scheint.

Ausführlichere Nachricht findet man in Scheibels mathematischer Bücherkenntniß VII. St. in Montucla Geschichte der Mathematik, Th. II. S. 583. nebst einer ausführlichen Darstellung der Methode selbst S. 617—619; in Kästners Gesch. der Mathem. Th. I. S. 566.

Prosthaphäresis bedeutet auch in der Astronomie den Unterschied der mittlern und wahren Bewegung eines Weltkörpers. Von προσθεν, vor, und ἀφαιρεσις, Wegnahme.

Digitized by Google

Provolutio ist die Wälzung einer krummen Linie oder auch einer aus geraden zusammengesetzten auf einer andern. Leibnitz hat diesen Ausdruck gebraucht, in einem Aufsatze: de lineae super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis et composito ex ambobus. Acta Erud. 1706. Opp. T. III. p. 395.

Ptolemäischer Lehrsatz, s. Kreis, 45.

Punct (σημειον) ist, nach Euklides, was keine Theile hat. Nämlich Körper, Flächen und Linien können in gleichartige Theile, unbestimmt viele, getheilt gedacht werden, der Punct aber nicht. Ein Punct ist die gemeinschaftliche Gränze zweyer Theile einer Linie, die aber als Gränze keinen Theil, weder des einen Stücks noch des andern, ausmacht. Eben so ist eine Linie die gemeinschaftliche Gränze zweyer Theile einer Fläche, und eine Fläche die gemeinschaftliche Gränze zweyer Theile eines Körpers. Ein Punct ist, wie Linie und Fläche, ein abstracter Begriff, welchen man nicht sinnlich darstellen kann, den aber selbst der gemeine und ungeübte Verstand sich in den Theilungs- und Endpuncten einer sinnlichen Linie als untheilbar vorstellt.

Wolf sagt: Punctum est, quod quaquaversum se ipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos. Diese Doppelerklärung ist nicht deutlich.

Euklides fängt seine geometrischen Erklärungen mit der des Punctes an. Dieses hat einige befremdet. Allein es setzt dieses am wenigsten aus der sinnlichen Anschauung voraus. Fängt man mit dem sinnlichen Körper an, so muß man von unzählig vielen sinnlichen Beschaffenheiten abstrahiren, um den Begriff eines geometrischen Körpers zu bilden. Auch ist der Begriff eines Körpers mit den Begriffen von Flächen und Linien und Puncten zu sehr verbunden. Hingegen der Begriff eines Theils ist zwar sinnlich, aber doch schon sehr allgemein und einfach, auf Körper, Flächen und Linien zugleich anwendbar.

Digitized by Google

Die Gränze eines Theils ist das nicht Theilbare. So enthält Euklidens verneinende Erklärung eines Punctes den Begriff einer Gränze. Der Punct wird in oder an einer geometrischen Ausdehnung gedacht, ohne einen Theil derselben auszumachen.

Eine Linie ist eine Reihe oder Folge von Puncten, allein eine stetige. Daher läßt sich die Länge nicht durch eine Anzahl von Puncten bestimmen. In zwey concentrischen Kreisen giebt jede Linie aus dem Mittelpuncte einen Punct sowol auf dem kleinern als auf dem größern. Wenn beide sich zugleich auf einer geraden Linie fortwälzen, so legen sich ungleiche, aber ähnliche Bogen an gleich große Theile der geraden Linie an, worauf sie sich wälzen. Th. I. S. 600.

In der Geometrie der krummen Linien vom dritten Grade an, kommen Doppelpuncte, drey- und mehrfache Puncte, Rückkehrpuncte, Wendungspuncte, Schlangenpuncte, conjugirte Puncte vor, wovon an ihren Orten.

Pyramide ist ein geometrischer Körper, begränzt von einer ebenen geradlinichten Figur, als Grundfläche, und so vielen, in einem Puncte zusammenstoßenden, Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat. Der Punct, wo die Seitenflächen zusammen kommen, heißt der Scheitelpunct (vertex) oder Spitze. Die Linien von den Winkelpuncten der Grundfläche nach der Spitze heißen Seitenlinien oder Kanten. Die Höhe einer Pyramide ist die senkrechte von dem Scheitel auf die Grundfläche, nöthigen Falls die erweiterte.

1. Die Unterscheidung der Pyramiden geschieht zunächst nach der Anzahl der Kanten oder der Seitenflächen, in dreyeckige, viereckige, u. s. f. oder auch dreyseitige, vierseitige ꝛc.

2. Die Pyramiden sind gleichseitige oder ungleichseitige. Die Winkelpuncte der Grundfläche von den gleichseitigen liegen alle auf dem Umfange eines Kreises. Denn die geraden, welche in der Grundfläche von

Digitized by Google

jedem Winkelpuncte nach dem Puncte gezogen werden, wo die senkrechte von der Spitze die Grundfläche trifft, sind alle gleich.

3. Gleichseitige Pyramiden, deren Grundfläche eine reguläre Figur ist, nenne man gleichförmige. Die gleichen Seitenlinien sind nicht allein gegen die Grundfläche gleich geneigt, sondern machen auch mit den Seiten derselben gleiche Winkel, daher die körperlichen Winkel an der Grundfläche sich gleich sind.

4. Wenn die Grundfläche und die Seitenflächen gleich große gleichseitige Dreyecke sind, so ist die Pyramide eine reguläre, und bekommt den Namen, Tetraedron. Man nennt auch die hier gleichförmige genannten Pyramiden reguläre.

5. Jeder der Grundfläche parallele Schnitt einer Pyramide ist der Grundfläche ähnlich. Die zusammengehörigen Seiten der Grundfläche und eines Schnittes (die in derselben Seitenfläche befindlichen) verhalten sich wie die zugehörigen Seitenlinien beider Pyramiden, oder wie ihre Höhen.

Die Schnitte selbst verhalten sich wie die Quadrate dieser Linien.

6. Pyramiden, die gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen.

7. Ein dreyseitiges Prisma läßt sich in drey gleich große Pyramiden zerlegen, und daher ist jede dreyseitige Pyramide der dritte Theil eines Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

8. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma über derselben Grundfläche mit derselben Höhe wie an jener.

Alles dieses wird in den Elementarbüchern bewiesen.

9. Die Oberfläche einer gleichförmigen Pyramide wird leicht gefunden. Jede der Seitenflächen ist ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Grundlinie die Seite eines regulären Vielecks, der Grundfläche, und die Höhe die

Digitized by Google

Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreyeck ist, dessen Kathete die Höhe der Pyramide und die senkrechte aus dem Mittelpuncte auf die Seite der Grundfläche sind. Der Halbmesser der Grundfläche sey $= r$; der halbe Centriwinkel $= \varphi$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt eines der Dreyecke $= r \sin \varphi \sqrt{(r^2 \cos \varphi^2 + h^2)}$, und die Summe aller Seitenflächen $= nr \sin \varphi \sqrt{(r^2 \cos \varphi^2 + h^2)}$, wo n die Anzahl derselben ist. Die Grundfläche ist $= nr^2 \sin \varphi \cos \varphi$.

10. Die Seitenflächen einer gleichförmigen Pyramide sind gegen die Grundfläche unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente ist $\frac{h}{r \cos \varphi}$.

11. Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche einen Winkel, dessen Tangente ist $\frac{\sqrt{(r^2 \cos \varphi^2 + h^2)}}{r \sin \varphi}$.

12. Der Neigungswinkel der Seitenflächen sey $= \alpha$, so ist $\sqrt{(r^2 \cos \varphi^2 + h^2)} = r \cos \varphi \sqrt{(1 + \tang \alpha^2)} = r \cos \varphi . \sec \alpha = \frac{r \cos \varphi}{\cos \alpha}$. Daher die Summe aller Seitenflächen $= \frac{nr^2 \sin \varphi . \cos \varphi}{\cos \alpha} = \frac{nr^2 \sin 2\varphi}{2 \cos \alpha}$.

Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche den Winkel, dessen Tangente ist $\frac{\cot \varphi}{\cos \alpha}$.

13. Es sey CABEDFG (Fig. 154.) ein abgekürztes Pyramidenstück, dessen Grundflächen CAB, FDE parallel sind, es soll der Inhalt gefunden werden, aus dem was an dem Stücke gemessen werden kann.

Dieses sind die Seitenlinien der beiden parallelen Flächen, und die Winkel ihrer Seiten, woraus der Inhalt derselben gefunden wird. Wenn die Höhe nicht durch Ablothung gemessen werden kann, so muß sie aus den Winkeln, welche eine der Seitenlinien, AD, mit den Seiten

Digitized by Google

AB und AC macht, und dem Winkel BAC hergeleitet werden. Denn daraus ergiebt sich (sphärische Trigonometrie) der Neigungswinkel der Linie AD gegen die Grundfläche, und dann die Höhe, welche dem Producte aus AD in den Sinus des Neigungswinkels gleich ist. Diese Höhe sey h; die Höhe der ganzen Pyramide x, der weggenommenen y, so ist $x-y=h$. Ferner sey $AB=a$; $DE=b$, so ist $a:b=x:y$, und $y=\frac{bx}{a}$. Da $a:a-b=x:x-y=x:h$ ist, so ist $x=\frac{ah}{a-b}$, $y=\frac{bh}{a-b}$. Ferner sey die untere Grundfläche A, die obere B, so ist $A:B=a^2:b^2$. Nun ist das Pyramidenstück $=\frac{1}{3}Ax-\frac{1}{3}By$. Setzt man für x, y, B ihre Werthe, so wird das Pyramidenstück $=$

$$\frac{1}{3}Ab\,\frac{a^3-b^3}{(a-b)a^2}=\frac{1}{3}Ah.\,\frac{aa+ab+bb}{aa}=$$

$$\frac{1}{3}Ah.\left(1+\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}\right).$$

14. Die dreyseitige Pyramide ist unter den Körpern mit ebenen Seitenflächen was das Dreyeck unter den ebenen geradlinichten Figuren ist, daher sie eine besondere Untersuchung verdienet.

15. Es sey DACB (Fig. 155.) eine dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche ABC. Der Winkel der Seitenlinie DC mit AC sey $=\alpha$; der Winkel derselben mit BC sey $=\beta$, der Winkel $ACB=\gamma$. Ferner sey $AC=a$; $BC=b$; $CD=d$. Es ist der Inhalt der Pyramide $=$

$$\frac{1}{3}abd\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

Der Beweis ist derselbe wie für den Inhalt eines Parallelepipedum, nur daß hier die Grundfläche $=$

Digitized by Google

$\frac{1}{2}$ ab sin γ ist, und daß diese, wegen (8.), mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt werden muß.

16. Durch einige Substitutionen aus Goniometrie 27, 24, 36 wird diese Formel in folgende verwandelt: Inhalt der Pyramide =
$\frac{1}{3}$ abd $\sqrt{(1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma)}$.

17. Die dritte Seite der Grundfläche AB sey = c; die Seitenlinie AD = e.; BD = f, es ist der Inhalt der Pyramide durch die sechs Seitenlinien ausgedruckt =

$$\frac{1}{12}\sqrt{[a^2f^2(b^2+c^2-a^2+d^2+e^2-f^2)} \\ +b^2e^2(a^2+c^2-b^2+d^2+f^2-e^2) \\ +c^2d^2(a^2+b^2-c^2+e^2+f^2-d^2) \\ -a^2b^2c^2-a^2d^2e^2-b^2d^2f^2-c^2e^2f^2].$$

Diese sehr symmetrische Formel wird erhalten, wenn für cos α, cos β, cos γ ihre Werthe durch die Seiten der Dreyecke eingeführt werden. Es ist (Trigonometrie oder Dreyeck, 19, 20.) $\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-e^2}{2ad}$;

$$\cos\beta = \frac{b^2+d^2-f^2}{2bd}; \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Die Rechnung ist etwas lang, übrigens eine blos mechanische Multiplication.

18. Man kann die Combinationen in der Formel noch auf andere Art symmetrisch ordnen, als:

$$a^2b^2(e^2+f^2)+a^2c^2(d^2+f^2)+b^2c^2(e^2+d^2) \\ +a^2d^2(f^2-e^2)+b^2d^2(e^2-f^2)+c^2d^2(e^2+f^2) \\ +a^2e^2f^2+b^2e^2f^2-c^2e^2f^2 \\ -a^2f^2(a^2+f^2)-b^2e^2(b^2+e^2)-c^2d^2(c^2+d^2) \\ +a^2b^2c^2.$$

19. Es sey die Grundfläche ABC einer dreyseitigen Pyramide DABC (Fig. 155.) gegeben, nebst den Neigungswinkeln der Seitenlinien DA, DB, DC gegen die Grundfläche, man soll die Höhe der Pyramide DE und die Lage des Grundpunctes E bestimmen.

Digitized by Google

Man ziehe an den Grundpunct E die geraden AE, BE, CE. Diese verhalten sich wie die Tangenten der Winkel ADE, BDE, CDE, oder wie die Cotangenten der Neigungswinkel EAD, EBD, ECD. Nun ist der Kreis der geometrische Ort für alle Dreyecke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gegebenes Verhältniß der Seiten haben. (Kreis, 54, 55.). Man beschreibe also über zweyen der drey Seiten der Grundfläche, AB, AC, als Chorden, Kreisbogen, deren jeder der Ort des Punctes E sey, so giebt ihr Durchschnitt diesen Punct, also auch die Längen AE, BE, CE. Aus jeder dieses und dem zugehörigen Winkel wird dann die Höhe der Pyramide ED bestimmt.

Die Berechnung ist etwas mühsam und muß in die Trigonometrie verspart werden.

20. Auf gleiche Art wird für vielseitige Pyramiden die Höhe und der Grundpunct gefunden, wenn zwey an einander liegende Seiten AB, AC und der eingeschlossene Winkel BAC, nebst den Neigungswinkeln der durch B, A, C gehenden Seitenlinien gegeben werden.

21. Wenn an einer Pyramide eine Seite AB der Grundfläche, der gegenüber liegende Winkel an der Spitze ADB, und die Neigungswinkel der Seitenlinien AD, BD gegen die Grundfläche gegeben werden, so ist die Höhe und der Grundpunct dadurch bestimmt. Denn aus den Neigungswinkeln ist erstlich das Verhältniß der Linien AE, BE, die nach dem Grundpuncte gehen, gegeben. (Trigonometrie, sphärische, oder Linie, gerade, 35.). Ferner ist durch den Winkel ADB mit den Neigungswinkeln der Winkel AEB der auf DE senkrechten AE, BE gegeben. Die Aufgabe wird nun diese, erstlich über AB als Chorde einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel fasse, und in diesem zwey geraden AE, BE zu ziehen, die ein gegebenes Verhältniß haben. Das erste ist in dem Art. Kreis, 32. gewiesen, das zweyte ist in dem Art. Analysis als Methode, 2. Aufg. S. 91.

Bey Höhenmessungen ist dieses anwendbar.

Digitized by Google

22. Die drey ebenen Winkel der Ecke A (Fig. 156.) an der dreyseitigen Pyramide ABCD seyn alle rechte, so daß die drey Ebenen BAC, DAC, BAD senkrecht auf einander stehen; es ist

$(\Delta BCD)^2 = (ABC)^2 + (ADC)^2 + (ABD)^2$,

wo die Flächen der Dreyecke in Zahlen ausgedruckt zu verstehen sind.

Der Inhalt des Dreyecks BCD werde durch seine drey Seiten nach der Formel, Dreyeck, 34. ausgedruckt. Es sey $BD = a$; $BC = b$; $CD = c$, so ist der Inhalt des Dreyecks $=$

$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$.

Die andern Dreyecke drucke man durch das halbe Product ihrer Katheten aus. Das Product unter dem Wurzelzeichen entwickele man. Es ist erstlich ein Product aus den Factoren $(b+c)^2 - a^2$ und $a^2 - (b-c)^2$ und dieses ist $= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. Nun ist $a^2 = AB^2 + AD^2$; $b^2 = AB^2 + AC^2$; $c^2 = AC^2 + AD^2$. Setzt man diese Werthe für a^2, b^2, c^2 in jenes Product, so wird es $= 4AB^2 . AD^2 + 4AB^2 . AC^2 + 4AC^2 . AD^2$. Die Summe der Dreyecke ist $= \frac{1}{2}AB . AD + \frac{1}{2}AB . AC + \frac{1}{2}AC . AD$, und die Summe der Quadrate von denselben der 16te Theil jener Summe. Das Quadrat des Dreyecks BCD ist ebenfalls der 16te Theil derselben. So ist der Satz erwiesen.

23. Leichter zu übersehen ist folgender Beweis. — Man ziehe auf die eine der Seiten des Dreyecks BCD von A die senkrechte AE, so ist BE senkrecht auf AED, also auf DE, und es ist

$(\Delta BCD)^2 = \frac{1}{4}BC^2 \times DE^2 = \frac{1}{4}BC^2 \times AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 \times AE^2 = \frac{1}{4}BC^2 \times AD^2 + (\Delta ABC)^2$.

Auf gleiche Art ist, wenn von A auf CD und DB senkrechte gezogen werden,

$(\Delta BCD)^2 = \frac{1}{4}DC^2 \times AB^2 + (\Delta ADC)^2$,

$(\Delta BCD)^2 = \frac{1}{4}BD^2 \times AC^2 + \Delta(ABD)^2$.

Die drey Producte sind jedes Summen von zwey quadrirten Dreyecken. Nämlich

Digitized by Google

$BC^2 \times AD^2 = AB^2 \times AD^2 + AC^2 \times AD^2$,
$DC^2 \times AB^2 = AD^2 \times AB^2 + AC^2 \times AB^2$,
$BD^2 \times AC^2 = AB^2 \times AC^2 + AD^2 \times AC^2$.
Hier ist $AB \times AD = 2\Delta ABD$; $AC \times AD = 2\Delta ADC$; $AC \times AB = 2\Delta ABC$. Man addire die drey Werthe von $(\Delta BDC)^2$, setze für die Producte ihre Werthe, und dividire dann alles durch 3, so wird $(\Delta BCD)^2 = (\Delta ABC)^2 + (\Delta ADC)^2 + (\Delta ABD)^2$.

24. Der Satz läßt sich auch auf folgende Art darthun. Die drey Dreyecke ABC, DAB, CAD sind jedes die Projectionen des Dreyecks BCD auf ihre Ebenen. Denn AB ist die Projection von BD, AC von DC, BC von sich selbst, auf die Ebene des Dreyecks ABC. Also ist das Dreyeck ABC gleich dem Dreyeck BCD multiplicirt in den Cosinus des Neigungswinkels der Ebene DBC gegen die Ebene ABC, (Projection, 13.). Eben so ist das Dreyeck ACD gleich dem Dreyeck BCD in den Cosinus des Neigungswinkels gegen die Ebene jenes multiplicirt. Auch ist das Dreyeck ABD gleich dem Dreyeck BCD in den Cosinus des Winkels ihrer Ebenen multiplicirt. Es ist aber, wenn eine Ebene mit drey auf einander senkrecht stehenden Ebenen die Winkel ϑ, ϑ', ϑ'' macht, die Summe, $(\cos\vartheta)^2 + (\cos\vartheta')^2 + (\cos\vartheta'')^2 = 1$, krumme Fläche, 6. Davon ist der Satz eine unmittelbare Folge.

25. Der Satz ist von Tinseau zuerst bekannt gemacht. Mém. présentés, T. IX. De Gua eignete sich ihn aber zu in einer Abhandlung über die dreyseitigen Pyramiden, welche er kurz vor seinem Tode der Akademie der Wissenschaften vorlegte. Das Dreyeck BCD ist in dem rechtwinkligen vierseitigen Körper ABCD dasselbe, was die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreyeck ist, und der Satz ist dem pythagorischen Lehrsatze analog. Auch leistet er zur Complanation krummer Flächen eben die Dienste, als jener Satz zur Rectification krummer Linien.

Digitized by Google

26. Eine Kugel um eine dreyseitige Pyramide beschreiben, heißt zu vier gegebenen Puncten den Halbmesser der durch sie gehenden Kugelfläche finden. Die geometrische Auflösung dieser Aufgabe ist in dem Artikel, Kugel, 53 und 64, auf zweyerley Art gezeigt. Der analytische Ausdruck für den Halbmesser, der sich daraus herleiten läßt, ist aber sehr zusammengesetzt. Man sehe die Elemens de Géométrie par le Gendre, 5e édit. 1804. Wie der Halbmesser, ohne Hülfe einer Construction, durch bloße algebraische Rechnung zu finden sey, ist in dem angeführten Artikel, 66, gewiesen.

27. Da die Coordinaten zu dem Mittelpuncte sich leicht finden lassen, woraus sich dann die Größe des Halbmessers unmittelbar ergiebt, so mag die Rechnung hier noch Platz finden, wiewol ohne den Werth des Halbmessers zu entwickeln.

Die rechtwinklichten Coordinaten einer Kugelfläche seyn x, y, z, die Coordinaten zu dem Mittelpuncte p, q, r, der Halbmesser R, so ist (krumme Fläche, 40.)

$$R^2=(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2.$$

Der Anfang der Coordinaten sey in einem der Winkelpuncte der Grundfläche, die Axe der x lege man in eine ihrer Seiten; die Coordinaten für den ersten Punct sind o, o, o; für den zweyten a, o, o, wo a die eine Seite ist; für den dritten, b, c, o; für den vierten, den Scheitelpunct, d, e, f. Werden diese Werthe successiv für die Coordinaten x, y, z gesetzt, so entstehen die Gleichungen:

I. $R^2=p^2+q^2+r^2.$

II. $R^2=(a-p)^2+q^2+r^2.$

III. $R^2=(b-p)^2+(c-q)^2+r^2.$

IV. $R^2=(d-p)^2+(e-q)^2+(f-r)^2.$

Daraus ist, wenn I. von jeder der folgenden Gleichungen abgezogen wird, und die für p, q, erhaltenen Werthe substituirt werden,

Digitized by Google

V. $2p = a$.

VI. $2q = \frac{bb - ab + cc}{c}$.

VII. $2r = \frac{dd - ad + ee}{f} + \frac{cff - e(bb - ab + cc)}{cf}$

Der Halbmesser ist $R = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$, eine Formel, deren Werth in jedem Falle aus den berechneten Werthen von p, q, r sich leichter wird finden lassen, als aus dem allgemeinen entwickelten Ausdruck.

28. La Grange hat in den neuen Memoiren von Berlin für 1773 analytische Auflösungen einiger Aufgaben über die dreyseitigen Pyramiden gegeben. Sie setzen gar keine Construction voraus, und beruhen auf Gleichungen zwischen den rechtwinklichten Coordinaten, deren je drey zu einem Puncte im Raume gehören. Aus diesen Coordinaten, oder gewissen daraus zusammen gesetzten Ausdrücken, bestehen die Werthe der Größen, die für eine Pyramide gesucht werden. So findet la Grange zuerst Ausdrücke für die Seitenflächen, leichte zwar für die am Scheitelpuncte zusammenlaufenden, aber für die Grundfläche in der That einen zusammengesetzten, nur durch die Form einfachen. Der Scheitelpunct wird zu dem Anfangspuncte der Coordinaten genommen. Wenn s, t, u die Coordinaten zu der Grundfläche sind, und die Gleichung für dieselbe ist, $u = l + ms + nt$, so ist die Höhe der Pyramide $= \frac{l}{\sqrt{(1 + mm + nn)}}$. Dieses läßt sich aus dem Artikel, Linie 51. herleiten. Der Inhalt der Pyramide wird durch eine symmetrische Formel mittelst der Coordinaten zu den drey Winkelpuncten der Grundfläche angegeben. Diese seyn x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; so ist der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{6}(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')$. Der Inhalt durch die sechs Seitenlinien ist oben (17) angegeben. Merkwürdig ist die Aufgabe, in einer dreyseitigen Pyramide denjenigen Punct zu finden, von welchem aus die nach den Ecken gezogenen geraden

Digitized by Google

die Pyramide in vier Pyramiden theilen, deren Verhältnisse gegeben sind. Dadurch gelangt der Verf. auch zu Formeln zur Bestimmung des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel, welche zwar sehr symmetrisch, im Grunde aber sehr zusammengesetzt sind. Ein schöner Satz ist folgender über den Schwerpunct einer dreyseitigen Pyramide. Er ist einerley mit dem Schwerpuncte vier gleicher (mit ihren Schwerpuncten) auf den vier Ecken der Pyramide gestellten Körper.

29. Eine geometrische Kleinigkeit ist noch diese. Eine dreyseitige Pyramide werde parallel mit zwey Seitenlinien geschnitten, die nicht in derselben Ebene liegen: der Schnitt ist ein Parallelogramm.

30. Das Netz einer Pyramide ist die in eine Ebene ausgebreitete Oberfläche. Es ist leicht gezeichnet, wenn nur die Seiten und Winkel der Seitenflächen (mit Inbegriff der Grundfläche) bekannt sind. Die drey um den Scheitelpunct werden nach der Reihe an einander gelegt, an eine derselben wird die Grundfläche über der beiden gemeinschaftlichen Seite gefügt.

Pyramidalzahlen sind die Summen von Polygonalzahlen. Man nennt sie dreyeckige, viereckige, fünfeckige u. s. f. nachdem sie Summen von Trigonal-Tetragonal-Pentagonalzahlen u. s. sind.

Der allgemeine Ausdruck für eine Polygonalzahl ist $p = \frac{1}{2}(m-2)r^2 - \frac{1}{2}(m-4)r$. (Polygonalzahl, 5), wo m die Winkelzahl und r die Stellenzahl der Polygonalzahl ist. Um die Summe von n Polygonalzahlen p zu haben, muß die Summe der Quadrate und der Wurzeln r genommen werden. Es ist
$S.r^2 = \frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)$, und $S.r = \frac{1}{2}r(r+1)$, s. arithm. Reihen höherer Ordn. 14. Daher ist S. p. oder die Pyramidalzahl =
$\frac{1}{12}(m-2)r(r+1)(2r+1) - \frac{1}{4}(m-4)r(r+1)$.
$= \frac{1}{6}[(m-2)r - m + 5]r(r+1)$.
oder auch $S.p = \frac{1}{6}((m-2)r^3 + 3r^2 - (m-5)r)$.

Digitized by Google

Es ist also die rte Trigonal-Pyramidalzahl =
$\frac{1}{6}r.r+1.r+2.$

Die rte Tetragonal-Pyramidalzahl
$=\frac{1}{6}r.r+1.2r+1.$

Die rte Pentagonal-Pyramidalzahl u. s. f.

$\frac{1}{6}r.r+1.3r.$ $\frac{1}{6}r.r+1.4r-1.$

$\frac{1}{6}r.r+1.5r-2.$ $\frac{1}{6}r.r+1.6r-3.$

u. s. w.

Z. B. Trig. Pyram. Z. 1, 4, 10, 20, 35. etc.
Tetrag. Pyram. Z. 1, 5, 14, 30, 55. etc.
Pentag. Pyram. Z. 1, 6, 18, 40, 74. etc.
Herag. Pyram. Z. 1, 7, 22, 50, 95. etc.

Die Anzahl der in einer dreyseitigen gleichförmigen Pyramide in den Zeughäusern aufgesetzten Kugeln ist eine Trigonal-Pyramidalzahl, in einer gleichvierseitigen eine Tetragonal-Pyramidalzahl.

Alle diese Zahlen heißen erste Pyramidalzahlen. Ihre Summen heißen zweyte Pyramidalzahlen; deren Summen dritte; u. s. w. Es verlohnt sich nicht der Mühe diese Summe anzugeben. Sie beruhen auf Summirungen der Potenzen.

Pyrgoidalzahl (thurmförmige Zahl) ist die Summe einer Columnarzahl und Pyramidalzahl von einerley Gattung, wenn in der letztern die Seite oder Wurzel um 1 kleiner ist als in jener. Eine Columnarzahl ist aber das Product aus einer Polygonalzahl in ihre Wurzel. Blos zur Uebung im Rechnen folgt hier die Form einer solchen Zahl, nämlich

$\frac{1}{3}(m-2)r^3-\frac{1}{2}(2m-7)r^2+\frac{1}{6}(2m-7)r.$

Pythagorischer Lehrsatz ist der bekannte Satz, daß in einem rechtwinkligen Dreyeck das Quadrat der Hypotenuse so groß ist als die Summe der Katheten. Der Satz wird nach dem Pythagoras genannt, dem die Entdeckung zugeschrieben wird. Th. II. S. 317. Der Satz öffnete eine Bahn zu neuen Untersuchungen, und ist uns auch als Document der Fortschritte in der Geometrie im

Digitized by Google

6ten Jahrh. v. C. G. wichtig. Pythagoras oder einer ſeiner Nachfolger mag darauf durch eine arithmetiſche Frage gekommen ſeyn, über die Zuſammenſetzung einer rationalen Quadratzahl aus zwey rationalen Quadraten. Denn dieſe Aufgabe haben die Pythagoräer aufgelöſet, da ſie überhaupt ſich viel mit den Eigenſchaften der Zahlen beſchäftigten, ſ. Th. I. 176. Hatte man ſolche Zahlen gefunden, und verſuchte nun die Wurzeln als Linien zu einem Dreyeck zuſammen zu ſetzen, ſo gab der Augenſchein, daß es rechtwinklige Dreyecke wurden. Nun entſtand die Veranlaſſung den Beweis der Allgemeinheit zu ſuchen. Der Beweis, den Euklides von dem Lehrſatze giebt, iſt ſchwerlich der urſprüngliche, da die Zurüſtung zu demſelben zu künſtlich iſt für einen, der den Satz noch nicht kennt.

Die Bemerkung, daß das Quadrat der Hypotenuſe eines gleichſchenkligen rechtwinkligen Dreyecks doppelt ſo groß iſt als das Quadrat einer der gleichen Katheten, war leicht gemacht, ohne Zweifel früher als der allgemeine Satz gefunden ward. Man konnte alſo auch die Seite des vierfachen Quadrats u. ſ. f. in verdoppelter Fortſchreitung finden. Aber andere Vielfache anzugeben ward ſchwierig, eben ſo als irgend welche Zuſammenſetzungen. Man nahm alſo wahrſcheinlich ſeine Zuflucht zu arithmetiſchen Zuſammenſetzungen rationaler Quadrate als der von 9 und 16; von 25 und 144 u. a. Da fand man, daß die Dreyecke rechtwinklig wurden.

Oder man iſt durch eine zufällige leichte Conſtruction darauf gerathen, etwa indem man in ein Quadrat ein anderes einzeichnete, und die Theile verglich, vielleicht gar folgendergeſtalt.

In ein Quadrat ABCD (Fig. 157.) zeichne man ein anderes EFGH ein, indem man AE, BF, CG, DH gleich groß nimmt, und EF, FG, GH, HE zieht. Denn dadurch ſind die Dreyecke EF, FCG, GDH, HAE gleich und ähnlich. Da der W. GFC = BEF iſt, ſo iſt W. EFB + GFC = einem Rechten, daher auch W. GFE. So auch ſind die drey andern Winkel der

Digitized by Google

eingezeichneten gleichseitigen Figur rechte Winkel, und die Figur ist ein Quadrat. Man ziehe GK parallel mit DA, und HL parallel mit AB, welche beide sich in M schneiden, so besteht das Quadrat AC aus den beiden Quadraten AM und MC, und den beiden gleichen Rechtecken DM, BM. Diese Rechtecke sind jedes doppelt so groß als eines der von dem Quadrate AC abgeschnittenen vier Dreyecke. Nimmt man diese vier Dreyecke von dem Quadrate AC weg, so bleibt das Quadrat EFGH übrig. Nimmt man die beiden Rechtecke weg, so bleiben die beiden Quadrate AM, CM übrig. Die Summe dieser beiden ist also dem eingeschriebenen Quadrate gleich. Jene Quadrate sind die Quadrate der Katheten eines der Dreyecke, wie HDG, und das eingezeichnete ist das Quadrat der Hypotenuse HG.

Diesen ungemein einfachen Beweis finde ich in einem englischen Lehrbuche der Geometrie von Henry Boad, London 1733.

Der Euklidische sehr schöne Beweis wird fast in allen Lehrbüchern der Geometrie angetroffen. Man hat sonst noch manche Beweise des berühmten Lehrsatzes. Eine Sammlung von Beweisen findet man in einer akademischen Dissertation von Scherz und Stöber zu Strasburg 1743, und in einer solchen von Lange und Jetze, Halle 1752. Der Beweis, den ich in meinen Anfangsgründen der Geometrie (Encyklopädie, Th. II.) gegeben habe, ist vielleicht sonst nicht angewandt; er ist dem ähnlich, den Pappus bey der Aufgabe gebraucht, zwey Parallelogramme in ein einziges mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Pythagorische Rechentafel ist das Einmahleins in die Fächer eines Quadrats vertheilt. Man schreibt die Einrichtung dem Pythagoras zu, vermuthlich aus einem Mißverstande. Der Abacus der Pythagoräer, welchen Boethius aufbewahrt hat, ist kein Einmahleins. s. Zahlzeichen.

Digitized by Google

Druckfehler und Verbesserungen.

Im ersten Theile.

S. 258. Z. 3. vor φ^7 ein d, und vor φ^9 ein e einzuschieben.
— 270. — 5. st. $y + 2$ l. $y = 2$.
— 336. — 2. v. u. st. $(a + b^n$ l. $(a + b)^n$.
— 337. — 7. v. u. ist der Exponent des Binomium — n.
— 677. — 6. st. 50. l. 53.
— 678. — 2. st. 141. l. 82.
— 760. — 4. lasse man weg; und ähnliche, als welches nur bey senkrechten Parallelepipeden Statt findet.
— 910. — 13. das Citat, Kegelschnitte, ist in Parabel abzuändern.

Im zweyten Theile.

S. 82. Z. 1. v. u. st. y l. y^2.
— 273. — 6. statt unbekannt, setze man unbestimmt.
— 388. — 10. st. $p =$ l. $P =$
— 389. — 16. nach Glieder hinzuzusetzen: durch $x - p$.
— 390. — 12. v. u. statt des ersten = das Zeichen >
— 533. — 16. st. $2 \sin\frac{1}{4}$ l. $2 \sin\frac{1}{2} b$.
— 536. — 5. v. u. st. -2α l. $+2\alpha$.
— 536. — 4. v. u. st. -3α l. $+3\alpha$.
— 587. — 14. st. 35 l. $35 \cos\varphi$.
— 638. — 6. statt + am Ende der Zeile $\times$.
— 682. — 4. v. u. st. 155 l. 255.
— 820. — 9. l. auf die von $x^{m-1}(a + bx^n)^{p+z}$.
— 851. — 10. fehlt das Integralzeichen.
— 860. — 11. l. $(a + b\cos\varphi)^2$.
— 935. zu §. 85. nach hinzu zu setzen: An dem obersten Ende der Elastica, wo das krümmende Gewicht aufgehängt ist, ist $x = o$. Ist hier die berührende horizontal, so ist $cc = o$, und die Gleichung für die Elastica ist $\int y = -\frac{x \int xx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$. Nimmt man die Abscissenlinie auf der berührenden von dem Berührungspuncte an, so ist die Curve conver gegen die Abscissen-

Digitized by Google

linie, und der Halbmesser der Krümmung ist $= + \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Dieses giebt

$$\delta y = + \frac{x^2 x \delta x}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

S. 949. Z. 2. v. u. st. Ram l. Raum.

Im dritten Theile.

S. 1. Kante heißt im Französischen Arête.
— 19. Z. 6. st. PG × PG l. FP × PG.
— 66. — 14. st. $y + \frac{1}{q}$ l. $p + \frac{1}{y}$.
— 77. — 11. st. 47 l. 57.
— 82. — . v. u. st. $+ z$ l. $1 + z$.
— 189. — 13. st. PM × PY l. PM × PN.
— 191. — 4. st. AB l. BB.
— 197. — 11. st. $n^2 b^2 d$ l. $n^2 b d$.
— 200. — 6. Es hätte hier $A = 1$ genommen werden müssen. Oder es ist $2b = \frac{D}{A}$; $\frac{2b}{a} = \frac{B}{A}$ und $\frac{1}{4} B^2 \left(1 + \frac{m^2 c^2 A^2}{D}\right) = AC$.
— 274. — 3 u. 4. v. u. nach Axen zu setzen, der.
— 288. — 14. v. u. st. AN, AP l. MN, NP.
— 288. — 10. v. u. st. Tu l. TU.
— 291. — 19. st. AM l. NM.
— 294. — 7. st. BC l. DC.
— 313. — 10 u. 12. v. u. st. KC l. KE.
— 332. — 7. st. NP l. QP.
— 336. — 12. st. Axe l. Axen.
— 401. — 14. st. $(y - b)^2 \delta y$ l. $(y - b) \delta y$.
— 417. — 6. st. 104 l. 105.
— 439. — 11. v. u. st. genährten l. genäherten.
— 470. — 10. v. u. st. $- \frac{B'}{A'}$ l. $- \frac{B'}{A'} x$.
— 508. — 2. das eine = nach dem Bruche zu setzen.
— 527. — 19. nach nächste zu setzen, ganze.
— 539. §. 119. Kästner sagt in den geometrischen Sammlungen I. Nr. 60, S. 479 ausdrücklich, die Neperischen Logarithmen seyn mit den natürlichen nicht einerley, stimmt also im Wesentlichen mit Karsten überein.
— 577. — 4. muß die Folge der Vorzeichen seyn $+ - + - + -$.

Digitized by Google

Druckfehler und Verbesserungen.

Im ersten Theile.

S. 258. Z. 3. vor φ^7 ein d, und vor φ^9 ein e einzuschieben.
— 270. — 5. st. $y + 2$ l. $y = 2$.
— 336. — 2. v. u. st. $(a + b^n$ l. $(a + b)^n$.
— 337. — 7. v. u. statt der Exponent des Binomium — n.
— 677. — 6. st. 50. l. 53.
— 678. — 2. st. 141. l. 82.
— 760. — 4. lasse man weg; und ähnliche, als welches nur bey senkrechten Parallelepipeden Statt findet.
— 910. — 13. das Citat, Kegelschnitte, ist in Parabel abzuändern.

Im zweyten Theile.

S. 82. Z. 1. v. u. st. x l. y^2.
— 273. — 6. statt unbekannt, setze man unbestimmt.
— 388. — 10. st. $p =$ l. $P =$
— 389. — 16. nach Glieder hinzuzusetzen: durch $x = p$.
— 390. — 12. v. u. statt des ersten = das Zeichen >
— 533. — 16. st. $2 \sin\frac{1}{4}$ l. $2 \sin\frac{1}{2} b$.
— 536. — 5. v. u. st. -2α l. $+2\alpha$.
— 536. — 4. v. u. st. -3α l. $+3\alpha$.
— 587. — 14. st. 35 l. $35 \cos\varphi$.
— 638. — 6. statt + am Ende der Zeile $\times$.
— 689. — 4. v. u. st. 155 l. 255.
— 820. — 9. l. auf die von $x^{m-1}(a + bx^n)^{p+1}$.
— 851. — 10. fehlt das Integralzeichen.
— 860. — 11. l. $(a + b\cos\varphi)^2$.
— 935. zu §. 85. noch hinzu zu setzen: An dem obersten Ende der Elastica, wo das krümmende Gewicht aufgehängt ist, ist $x = o$. Ist hier die berührende horizontal, so ist $cc = 0$, und die Gleichung für die Elastica ist $\int y = -\frac{x\,dxx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$. Nimmt man die Abscissenlinie auf der berührenden von dem Berührungspuncte an, so ist die Curve convex gegen die Abscissen-

Digitized by Google

Halbmesser, und der Halbmesser der Krümmung ist $= + \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Dieses giebt

$$dy = + \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

S. 949. Z. 2. v. u. st. Raum l. Raum.

Im dritten Theile.

S. 1. Kante heißt im Französischen Arête.
— 19. Z. 6. st. PG × PG l. FP × PG.
— 66. — 14. st. $y + \frac{1}{q}$ l. $p + \frac{1}{y}$.
— 77. — 11. st. 47 l. 57.
— 82. — v. u. st. + z l. 1 + z.
— 189. — 13. st. PM × PY l. PM × PN.
— 191. — 4. st. AB l. BB.
— 197. — 11. st. $n^2 b^2 d$ l. $n^2 b d$.
— 200. — 6. Es hätte hier A = 1 genommen werden müssen. Oder es ist $2b = \frac{D}{A}$; $\frac{2b}{a} = \frac{B}{A}$

und $\frac{1}{4} B^2 \left(1 + \frac{m^2 c^2 A^2}{D}\right) = AC$.

— 274. — 3 u. 4. v. u. nach Aren zu setzen, der.
— 288. — 14. v. u. st. AN, AP l. MN, NP.
— 288. — 10. v. u. st. Tu l. TU.
— 291. — 19. st. AM l. NM.
— 294. — 7. st. BC l. DC.
— 323. — 12 u. 10. v. u. st. KC l. KE.
— 332. — 7. st. NP l. QP.
— 336. — 12. st. Axe l. Axen.
— 401. — 14. st. $(y-b)^2 dy$ l. $(y-b)\, dy$.
— 417. — 6. st. 104. l. 105.
— 439. — 11. v. u. st. genährten l. genäherten.
— 470. — 10. v. u. st. $-\frac{B'}{A'}$ l. $-\frac{B'}{A'} x$.
— 508. — 2. das eine = nach dem Bruche zu setzen.
— 527. — 19. nach nächste zu setzen, ganze.
— 539. §. 119. Kästner sagt in den geometrischen Sammlungen I. Nr. 60, S. 479 ausdrücklich, die Neperischen Logarithmen seyn mit den natürlichen nicht einerley, stimmt also im Wesentlichen mit Karsten überein.
— 577. — 4. muß die Folge der Vorzeichen seyn
$+ - + - + -$.

Digitized by Google

S. 659. Z. 12. vor gerade zu setzen, gegebene.
— 685. — 11. st. $Bx^{-\frac{7}{2}}$ l. $Bx^{\frac{7}{2}}$.
— 685. — 12. st. $Cx^{-\frac{1}{2}}$ l. $Cx^{\frac{11}{2}}$
— 685. — 13. st. $Ax^{-\frac{1}{2}}$ l. $Ax^{\frac{1}{2}}$
— 722. — 4. v. u. st. (z x cos α l. z(x cos α.
— 723. — 6. nach y sin β tin).
— 749. — 5. st. nach y l. nach x.
— 767. — 6. v. u. st. f (y) l. F (y).
— 775. — 5. v. u. ist z wegzulassen.
— 804. — 18 u. 20. v. u. st. Lk l. LK.
— 832. — 14. v. u. st. denselben l. zwey.

Verbesserungen in den Figuren.

Fig. 109. ist noch die gerade A E zu ziehen.
— 119. ist die Chorde A G zu ziehen.
— 122. ist die Chorde C F zu ziehen.
— 149. ist noch die Linie V O zu ziehen.

Nachricht.

Die Figuren 151. 152. welche auf der Platte nicht Platz hatten, werden bey dem vierten Theile nachgeliefert. Sie gehören zu den Exempeln in dem Artikel Porisma, und konnten am ersten wegbleiben, mögen auch leicht nach der Angabe daselbst gezeichnet werden.

Dem vierten Theile werde ich noch Ergänzungen beyfügen.

Digitized by Google